

WYKŁAD
RACHUNKÓW PRAKTYCZNYCH

SZCZEGÓLNIIE DLA KLASS NIŻSZYCH

SZKÓŁ GIMNAZYALNYCH I REALNYCH,

TUDZIEŻ

DLA SEMINARIÓW I SZKÓŁ MIEJSKICH

przez

[Jana Antoniego]

Professora Dr. Brettnera,

Dyrektora Król. Gimnazjum Św. Maryi Magdaleny, Radcę Regencyi i Prowincyalnej Rady Szkólnej
w Poznaniu, Członka wielu niezonych Towarzystw, kawal. orderu orła czerwonego IV. kl.

Z NIEMIECKIEGO NA JĘZYK POLSKI PRZEŁOŻONY

przez

Dr. W. Milewskiego,

Radcę Regencyi i Prowincyalnej Rady Szkólnej w Poznaniu.

DRUGIE WYDANIE POPRAWIONE I ROZSZERZONE.

*Gimnazjum Św. Maryi Magd. .
w Poznaniu*

N. S. 13

1860

POZNAŃ.

NAKŁADEM KSIĘGARNI JANA KONSTANTEGO ŻUPAŃSKIEGO.

1859.

BIBLIOTEKA UNIW. W POZNANIU



II
282757

Wypożycza się
tylko do czytelní

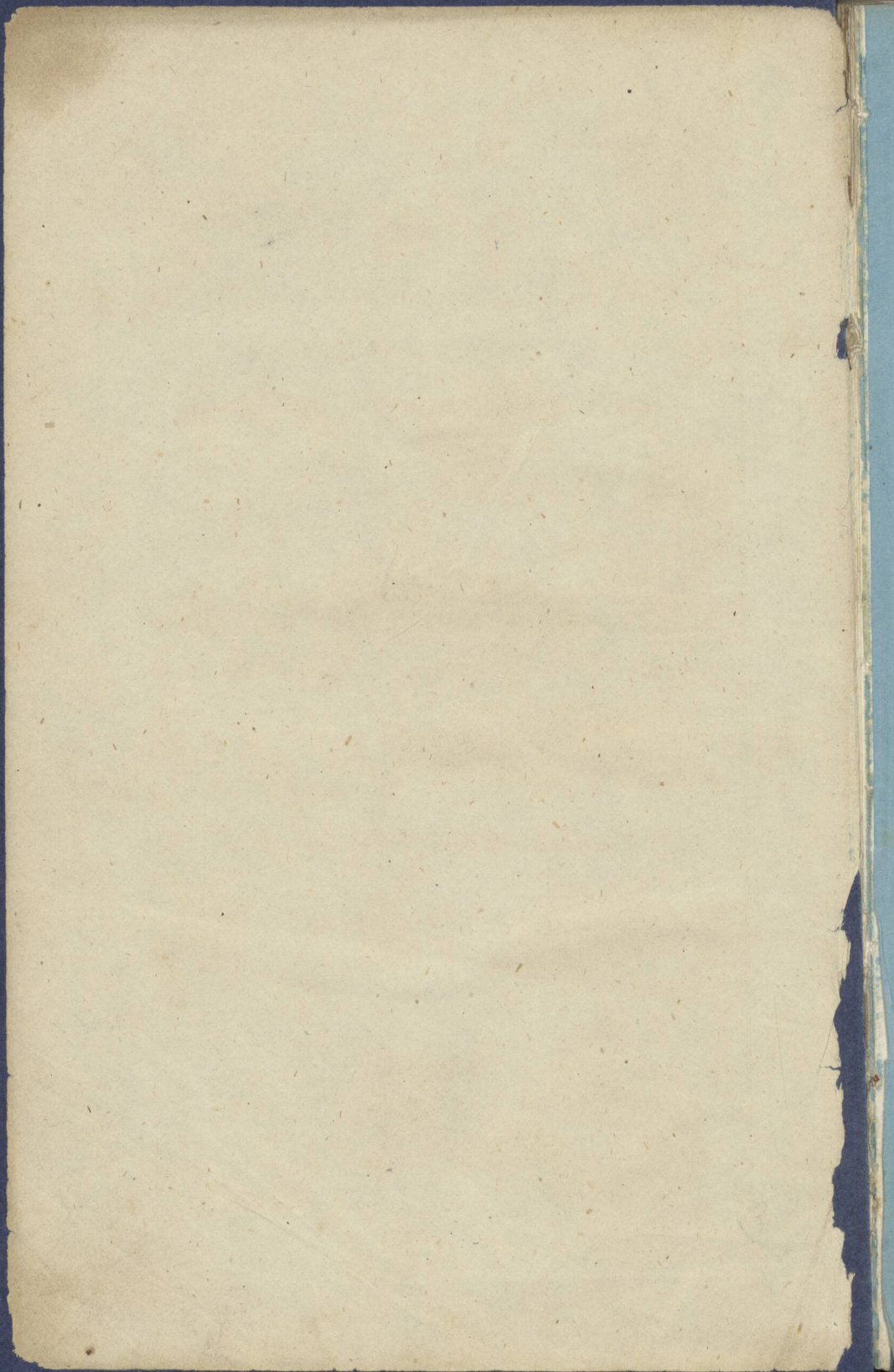
22/21



10
ave

A28

many nyd 3. 1865



WYKŁAD
RACHUNKÓW PRAKTYCZNYCH

SZCZEGÓLNIIE DLA KLASS NIŻSZYCH

SZKÓŁ GIMNAZYALNYCH I REALNYCH,

TUDZIEŻ

DLA SEMINARYÓW I SZKÓŁ MIEJSKICH

przez

Professora Dr. Brettnera,

Dyrektora król. Gimnazjum Św. Mar. Magd., Radcę Regencyi i Prowincyalnej Rady szkólnej
w Poznaniu, Członka wielu uczonych Towarzystw, kawal. orderu orla czerw. IV. kl.

Z NIEMIECKIEGO NA JĘZYK POLSKI PRZEŁOŻONY

przez

Dr. W. Milewskiego,

Radcę Regencyi i Prowincyalnej Rady Szkólnej w Poznaniu.

DRUGIE WYDANIE POPRAWIONE I ROZSZERZONE.

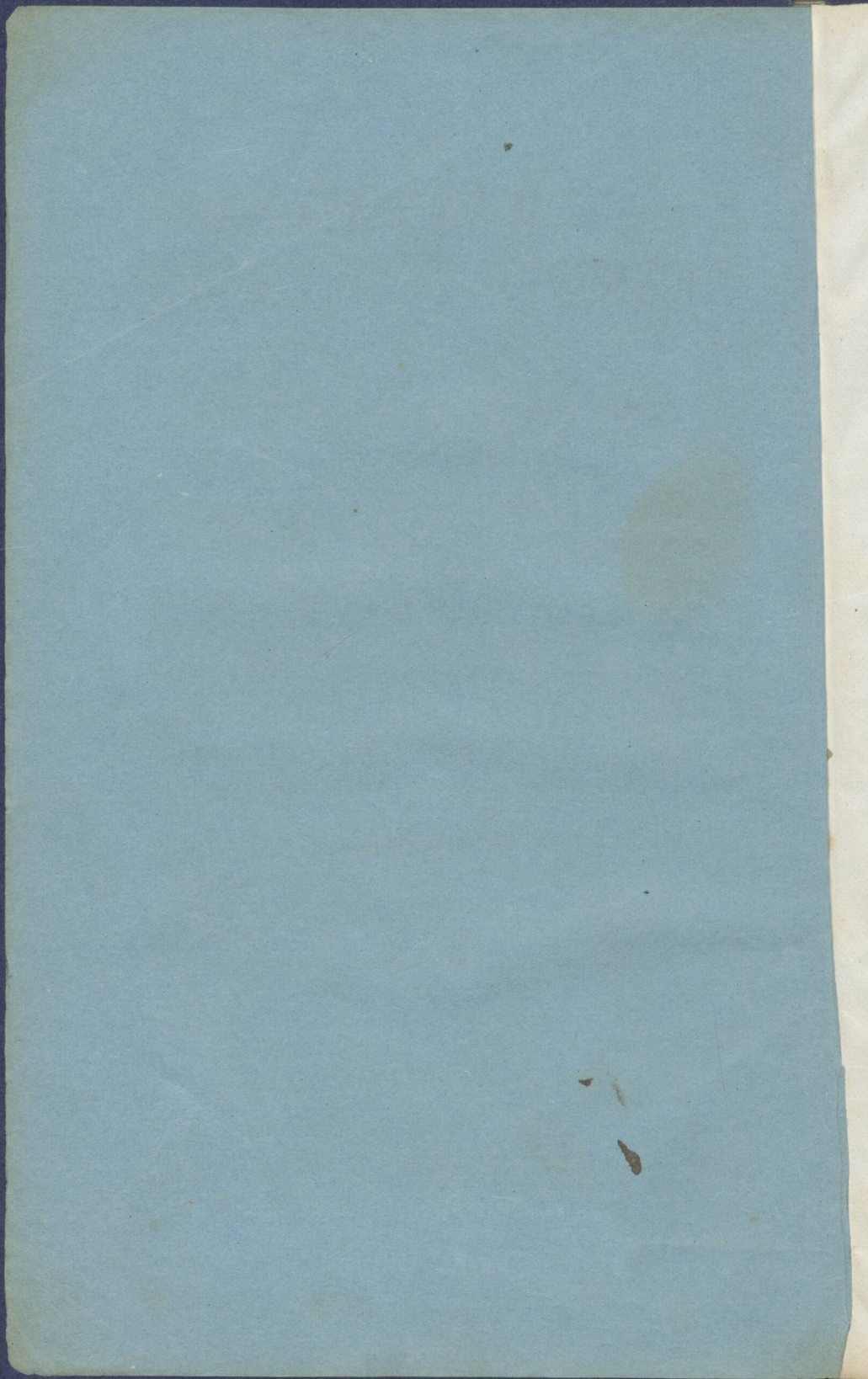


POZNAŃ.

NAKLADEM KSIĘGARNI JANA KONSTANTEGO ŻUPAŃSKIEGO.

1859.

Poznań, czcionkami M. Zoerna.



WYKŁAD RACHUNKÓW PRAKTYCZNYCH

SZCZEGÓLNIIE DLA KLASS NIŻSZYCH

SZKOŁ GIMNAZYALNYCH I REALNYCH,

TUDZIEŻ

DLA SEMINARIÓW I SZKOŁ MIEJSKICH

przez

[Jana Antoniego]

Professora Dr. Brettnera,

Dyrektora Król. Gimnazjum Św. Maryi Magdaleny, Radcę Regencyi i Prowincyalnej Rady Szkólnej w Poznaniu, Członka wielu uczonych Towarzystw, kawal. orderu orła czerwonego IV. kl.

Z NIEMIECKIEGO NA JĘZYK POLSKI PRZEŁOŻONY

przez

Dr. W. Milewskiego,

Radcę Regencyi i Prowincyalnej Rady Szkólnej w Poznaniu.

DRUGIE WYDANIE POPRAWIONE I ROZSZERZONE.

*Gimnazjum Św. Maryi Magd.
w Poznaniu*

N. 513

1860

POZNAŃ.

NAKŁADEM KSIĘGARNI JANA KONSTANTEGO ŻUPAŃSKIEGO.

1859.

WYKŁAD

RAZUNKOW PRAKTYCZNYCH

SZKOL GIMNAZJALNYCH I REALNYCH

7757282



Dr. W. Mirowskiego

Handwritten signature in cursive script, likely of the author or recipient.

1860

POZNAŃ

Poznań, czcionkami M. Zoerna.

515 01451

PRZEDMOWA.

W przedmowie do pierwszego wydania tak wyraziłem myśl przewodniczącą układowi tego dziełka:

„Starałem się uniknąć wszelkich zastraszających trudności, zachowując jednak wszędzie potrzebną ścisłość; usiłowałem również główne tylko rzeczy, krótko wprawdzie, lecz dokładnie wyłożyć: gdyż takim sposobem, nie ograniczając nauczyciela w wykładzie, nastęrczyłem uczniowi dosyć pomocy przy powtarzaniu szkólnego wykładu w domu. Przykładów i zadań znajdzie każdy w miejscach stosownych liczbę dostateczną. O ile się zaś z tego zadania wywiązałem, znawcy osądzić potrafią.“

Nie miałem najmniejszego powodu do odstąpienia od powyższej zasady przy układaniu niniejszego wydania drugiego; jednakże w wielu miejscach wykład rzeczy poprawiłem i dodatkami uzupełniłem. Nie zaniedbałem także wyłożyć systemu nowych wag i monet,

a podług nich odmienić także podane przykłady, których liczbę w miarę potrzeby pomnożyłem.

Wydanie pierwsze dziełka niniejszego, przetłumaczone w roku 1846 przez Dra. Milewskiego, naówczas nauczyciela matematyki i fizyki w Gimnazjum Ostrowskiem, dziś z handlu księgarskiego zupełnie wyszło. A gdy potrzeba jego coraz mocniej czuć się dawała, uprosiłem Pana Radcę Dra. Milewskiego, by przekładem niniejszego wydania drugiego znów zająć się zechciał. Podjął się on przez przyjaźń dla mnie pracy tej tém chętniej, im bardziej nietylko potrzebę, ale i pożyteczność dziełka tego uznawał. Będzie to zaiste dla nas najmiłą nagrodą, jeżeli zespolone usiłowania nasze przez wydanie niniejsze pożądane dla szkół polskich wydadzą owoce.

Poznań, dnia 12. Marca 1859.

Autor.

ROZDZIAŁ I.

0 liczbach, o systemie liczb dziesiętkowym i o liczeniu.

1. Rzeczy pojedyncze zowią się równogatunkowemi, jeżeli w znamionach swych zupełnie ze sobą się zgadzają; w razie przeciwnym różnogatunkowemi nazywane bywają. Jeżeli dwie lub więcej rzeczy w części wspólne, w części różne znamiona posiadają, wtedy ze względu na pierwsze równogatunkowemi, ze względu na drugie różnogatunkowemi się zowią.

Miedź i miedź, drzewo i drzewo, — żywica i kamień, róża i koń, — miedź i cynk jako metale w ogólności i potem jako dwa różne metale.

2. Rzecz każda pojedyncza ze względu na siebie samą uważana, nazywa się jednością; mnogość równogatunkowych rzeczy albo wielość różnogatunkowych jedności nazywa się liczbą. Mnogość równogatunkowych rzeczy podać, albo oznaczyć, ile rzeczy tego samego gatunku mamy, zowie się liczyć. Liczyć zaczynamy od jedności, oznaczając ją wyrazem jedno i dodajemy zawsze jedną jedność do drugiej, przez co dwa, trzy, cztery i t. d. otrzymujemy. Gdy zaś bez końca jedności składać albo jedność wiele razy do siebie dodać i przy każdej mnogości ze składaniem jedności poprzestać możemy, wypada ztąd, że nieskończenie wiele liczb mamy.

Drzewo — Dwa drzewa znaczy to samo co dwa razy jedno drzewo.

Kwiat — Dwanaście kwiatów znaczy to samo co dwanaście razy jeden kwiat.

Jedność także jest liczbą, gdyż jako mnogość równogatunkowych części uważaną być może, np. srebrnik jest jednością srebrnika, ale liczbą fenygów.

Licz od jednego do stu, od stu do dwieście.

Licz od pięciu do dwudziestu, od trzydziestu do pięćdziesiąt i napowrót od sześćdziesiąt do czterdziestu, od dziewiętnastu do czterech i t. d.

3. Cyfry są widome znaki liczby oznaczające, tak jak zgłoski widomemi znakami są dla głosów i słów. Mamy dziesięć cyfer przez Arabów wynalezionych, a te są:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0,

z których ostatnia do zapełnienia próżnego miejsca, inne zaś do oznaczenia mnogości służą.

4. System liczb dziesiątkowy. W jaki sposób można przez tak mało cyfer wszystkie liczby wyrazić? Tylko w ten, że wartość każdej liczby od dwóch rzeczy zależy: robimy:

1. raz od jej figury albo formy,
2. drugi raz od miejsca, na którym ją postawimy.

Wartość cyfer od ich formy zależy jest nigdy niezmienną, tak że 9 zawsze największą, 1 zaś zawsze najmniejszą liczbę oznacza, — lecz wartość cyfer zależy od miejsca jest wprawdzie zmienną ale niedowolną, tylko podług pewnego prawa się zmieniająca, tak że każda cyfra dziesięć razy więcej znaczy, jeżeli o jedno miejsce wyżej ku lewej ręce stoi, a zatem dziesięć razy mniej, jeżeli o jedno miejsce niżej ku prawej stoi; i tak np. oznacza jedno na drugim miejscu ku lewej ręce stojące więcej niż 9 na pierwszym miejscu; 9 na drugim miejscu znaczy dziesięć razy więcej niż 9 na pierwszym miejscu stojące i t. d.

Liczmy od jednego do dziesięciu i tworzymy z dziesięciu takich jedności wyższą jedność, i liczymy tu znów od jednego do dziesięciu; przez to otrzymujemy dziesiątki, z których dziesięć razem wzięte wyższą jedność, stami nazwaną, dają, a których dziesięć do siebie dodanych wyższą jedność tysięcy tworzy i t. d. Na taki sposób powstają:

Jedności, Dziesiątki, Sta, Tysiące, Dziesiątki tysięcy,

1. 2. 3. 4. 5.

i Sta tysięcy.

6.

Zaczynając liczyć miejsca od prawej ku lewej ręce widzimy, że jedności na pierwszym, dziesiątki na drugim i t. d. miejscu stoją.

Milion, Dziesiątki milionów, Sta milionów, Tysiące mi-

7. 8. 9. 10.

mionów, Dziesiątki tysięcy milionów i Sta tysięcy milionów.

11. 12.

| | | | |
|--|----------------------|---------------|-----------------|
| Bilion, | Dziesiątki bilionów, | Sto bilionów, | Tysiące bilion, |
| 13. | 14. | 15. | 16. |
| Dziesiątki tysięcy bilionów i Sto tysięcy bilionów. | | | |
| 17. | 18. | | |
| Trylion, Dziesiątki trylionów, Sto trylionów, Tysiące | | | |
| 19. | 20. | 21. | 22. |
| trylionów, Dziesiątki tysięcy trylionów i Sto tysięcy trylionów. | | | |
| 23. | 24. | | |
| Kwadrilion i t. d. | | | |
| 25. | | | |
| Kwintylion i t. d. | | | |
| 31. | | | |

Jeżeli na jakim miejscu żadna cyfra nie stoi, wtedy takowe zapełnia się zerem, dla czego też zero cyfrą miejsce zapełniająca jest nazwane. Liczba

314295087

zawiera więc 7 jedności, 8 dziesiątek, żadnych set, 5 tysięcy i t. d.

5. Liczenie uczy dwóch rzeczy: 1. każdą cyframi oznaczoną liczbę wymawiać, i 2. każdą wymówioną liczbę cyframi napisać.

I. Reguły uczące nas wymawiać wszelkie liczby pisane.

- a) Nie mów na cyfry 1, 2, 3.....9, jedna jedność, dwie jedności i t. d., tylko jedno, dwa i t. d.
- b) Nie mów na cyfry 10, 20, 30.....90, jedna dziesiątka, dwie dziesiątki i t. d., tylko dziesięć, dwadzieścia, trzydzieści i t. d.
- c) Nie mów na cyfry 11 i 12: jedno i dziesięć, dwa i dziesięć, tylko jedenaste i dwanaście.
- d) Nie mów na cyfry 13, 14.....19: trzy i dziesięć, cztery i dziesięć i t. d., tylko trzynaście, czternaście i t. d.
- e) Wymawiaj przy każdej dwucyfrowej liczbie, wyjąwszy tych, które pod c i d wymienione zostały, najpierw dziesiątki (podług b.), potem jedności (podług a.), połączone przez wyraz „i“, np.

43 znaczy: czterdzieści i trzy,

99 znaczy: dziewięćdziesiąt dziewięć.

Jak więc się wymawiają liczby: 81, 18, 66, 13, 31, 73, 24, 42, 82, 28, 76, 67, 99, 53, 35, 11, 21, 12, 45, 54?*)

*) W języku niemieckim każda dwucyfrowa liczba wymawia się prze-

f) Wymawiaj 100, 200, 300, 400, 500.....900 i t. d.; sto, dwieście, trzysta, czterysta, pięćset.....dziewięćset.

g) Wymawiaj w każdej trzema wartość posiadającymi cyframi oznaczonej liczbie najpierw sta, potem dziesiątki a na końcu jedności.

456 znaczy: czterysta pięćdziesiąt i sześć, — jak więc się wymawiać będą liczby: 396, 369, 936, 963, 639, 693, 425, 524, 329, 932, 476, 385, 444, 399, 561, 888?

Jeżeli w liczbie trzycyfrowej na pierwszym miejscu zero stoi, wtedy przy wymawianiu liczby tej jedności się opuszczają; jeżeli zaś na drugim miejscu zero stoi, wtedy dziesiątki się nie wymawiają.

408 znaczy: czterysta ośm, ale

480 znaczy czterysta osmdziesiąt.

Co znaczy: 501, 510; 909, 990; 470, 407; 880, 808; 303, 330; 602, 620; 305, 503; 350, 530?

h) Wymawiaj liczby 1000, 2000, 3000.....9000: tysiąc, dwa tysiące i t. d. W każdej innej czterocyfrowej liczbie wymawiaj najpierw tysiące, potem sta, dziesiątki, i jedności (podług g). Jeżeli na trzecim miejscu zero stoi, przy wymawianiu liczby takiej sta się opuszczają.

Jak więc wymawiać się będą liczby 5421, 1245, 4125; 8800, 8080, 8008; 7650, 7065, 7605; 8899, 9898, 9988?

i) Nie mów na liczby 10000, 20000.....90000: jedna dziesiątka tysięcy, dwie dziesiątki tysięcy i t. d., tylko dziesięć tysięcy, dwadzieścia tysięcy, trzydzieści tysięcy i t. d. a liczby 11000, 12000, 13000 i t. d. nazwiemy jedenaście tysięcy, dwanaście tysięcy i t. d.; jak więc wymawiać się będzie każda pięciocyfrowa liczba, mając wzgląd na regułę pod (h) przepisaną?

55000, 50500, 50050, 50005; 76543, 34567, 75634, 35647; 99999, 91234, 56145, 12121, 11122, 22111, 21211, 44444.

k) Wymawiaj liczby 100000, 200000.....900000: sto tysięcy, dwieście tysięcy i t. d.; jak więc wymawia się każda sześciocyfrowa liczba, zważając na reguły poprzednie?

cicznie jak w języku polskim, t. j. najpierw wymawiają się jedności, a potem dopiero dziesiątki. I tak mówi się na liczbę 43 w niemieckim trzy i czterdzieści, drei und vierzig; na liczbę 99 dziewięć i dziewięćdziesiąt, neun und neunzig.

tysiące, ośmset siedemdziesiąt dziewięć milionów, ośmset sześćdziesiąt sześć tysięcy, trzysta czternaście. Wymów liczby: 3445667 — 56432087 — 3384570073 — 65847361056 — 11143432879 — 40803214569. — Wymów liczby napisane dziewięciu siódmkami, jedenastu trójkami, ośmnastu dwójkami, dwudziestu czterema osemkami, szesnastu jednościami, jedną jednością i dziesięciu zerami.

II. Reguły uczące nas pisać wszelkie liczby wymówione.

Reguła ta wynika z tej reguły, która nas uczy jak każdą napisaną liczbę wymawiać należy. Ponieważ każdą liczbę od najwyższej klasy wymawiać zaczynamy, dla tego też każdą liczbę od najwyższej klasy pisać zaczynamy, myśląc zaraz o tém, na których miejscach takowa stoi i ile cyfer jeszcze z prawej ręki przyjść musi. Pewność nabyta w pisaniu liczb sześciocyfrowych nadaje nam także pewności w pisaniu liczb wielocyfrowych, gdy takowe podług ich klas tylko uporządkować i od lewej ku prawej pisać należy. I tak np. mając napisać trzysta bilionów, ośmset ośmdziesiąt ośm tysięcy, siedemset siedemdziesiąt siedem milionów, trzysta trzydzieści trzy tysiące, sześćset sześćdziesiąt sześć, piszemy:

300888777333666.

6. Rachować znaczy ze znanych albo danych liczb nieznaną wynaleść. Rachując bez cyfer, wyobrażając tylko sobie liczby, mówimy, że rachujemy w głowie i nazywamy takie rachowanie rachunkiem pamięciowym, odróżniając takowe od rachowania cyframi, które uskuteczniamy przez pisanie cyfer. Oba sposoby rachowania są działaniem ducha naszego i w obydwóch ćwiczyć nam się należy.

Sztuka rachowania czyli arytmetyka jest wiadomością, która nam reguły podaje, za pomocą których z liczb znanych nieznaną wynaleść możemy.

Sztuka rachowania jest częścią nauki matematyką zwaną. Oprócz rachunku cyfrowego albo zwyczajnych rachunków praktycznych mamy rachunek ogólny, który za pomocą liter alfabetu uskuteczniamy, a który w średnich i wyższych klassach gimnazyów i innych szkół wyższych uczonym bywa.

7. Wszystkie liczby, których rozmaitem połączeniem przy rachowaniu się trudnimy, dzielą się na liczby imienne i bezimienne czyli bezwzględne. Przy pierwszych jest rodzaj rzeczy przez dodanie ich nazwy oznaczonym, przy drugich zaś nie; pierwsze oznaczają nam bliżej mnogość i nazwisko

jedności, drugie tylko samą mnogość. I tak „siedem“ jest liczbą bezwzględną, która nie więcej nie oznacza, jak tylko że siedem równogatunkowych wprawdzie, ale zupełnie dowolnych rzeczy posiadamy. „Siedm groszy“ przeciwnie jest liczbą imienną, gdyż nietylko pewną mnogość, ale mnogość pewnych rzeczy posiadamy, to jest mnogość groszy, a nie drzew albo kamieni i t. d.

8. Imienne i bezwzględne liczby mogą znów być całkowitemi, albo ułamkowemi, albo nareszcie mieszanemi. Całkowite liczby albo całości są złożeniem jedności czyli mnogością jedności; liczby ułamkowe albo ułamki są częściami jedności albo złożeniem części jedności; mieszane liczby natomiast są połączeniem całości z ułamkiem.

Rachowanie liczbami imiennemi poprzedza rachowanie liczbami bezwzględnemi, a rachowanie ułamkami poprzedza rachowanie całościami.

9. Ponieważ do każdej liczby, która przecie więcej niż jest jak tylko mnogością jedności, jedną albo więcej jedności tego samego gatunku dodać albo też od niej odjąć możemy, i ponieważ wypadek znów liczbę jakąś dać musi, wypada stąd, że z liczb tylko dwojakim sposobem, to jest przez zwiększanie albo przez zmniejszanie, inne liczby powstać mogą — albo, że z liczbami dwie tylko odmiany przedsięwziąć możemy, to jest odmianę zwiększania i pomniejszania, przez którą ostatnią — liczbę aż do zniknięcia jej pomniejszać możemy.

10. Liczbę każdą na dwojaki sposób zwiększać możemy, raz dodając do niej nierówną, drugi raz równą liczbę. Choć i w obydwóch razach te same reguły zachowujemy, w drugim jednak wielu skróceń użyć można, przez co dwa działania powstają.

4 i 6 daje razem 10

4 i 4 8

3 i 5 i 7 i 10 są razem wzięte równe 25

5 i 5 i 5 i 5 20

Używając znaków, z których krzyżyk stojący, + „plus, więcej, zwiększone o,“ a dwie nad sobą leżące kreski, = „równe“ oznacza, będziemy mieli:

$4 + 6 = 10$, i $4 + 4 = 8$,

$3 + 5 + 7 + 10 = 25$, i $5 + 5 + 5 + 5 = 20$.

W ostatnich dwóch razach mówi się krócej:
 2 razy 4 jest równe 8, i 4 razy 5 jest równe 20 i pisze się:
 $2 \times 4 = 8$, albo też $2 \cdot 4 = 8$
 $4 \times 5 = 20$, albo też $4 \cdot 5 = 20$. Znak \times albo \cdot ozna-
 cza tu wyraz „razy.“

Pierwszy sposób zwiększania, dodając tylko liczbę do liczby, nazywamy dodawaniem (additio), drugi sposób zaś, biorąc jedną liczbę tyle razy, ile druga ma w sobie jedno- ści, nazywamy mnożeniem (multiplicatio). Mnożenie jest tylko skróconém dodawaniem.

Liczby dane nazywają się w dodawaniu liczby dodajne, w mnożeniu zaś czynniki. Ten z czynników, który kilka razy do siebie dodać mamy, nazywa się mnożną (multiplicandus), ten zaś, który okazuje, ile razy mnożną do siebie dodać mamy, nazywa się mnożnikiem (multiplicator). Wypadek dodawania zowie się summą, wypadek mnożenia iloczynem.

11. Mamy też dwa sposoby pomniejszania, gdyż od danej liczby mniejszą jaką liczbę raz albo kilka razy odjąć można. W obydwóch razach podług tych samych zasad postępować możemy; gdy jednak w drugim razie wiele skróceń mamy, dwa nowe powstają działania.

20 o 8 zmniejszone daje 12

20 o 5 cztery razy zmniejszone daje zero; gdyż:

20 o 5 zmniejszone daje 15

15 o 5 10

10 o 5 5

5 o 5 0.

Oznaczając to przez znaki, z których kreska poprzeczna — „minus, mniej, zmniejszone o“ oznacza, będziemy mieli:

$20 - 8 = 12$

$20 - 5 - 5 - 5 - 5 = 0$. W ostatnim razie mówimy krócej: 5 mieści się w 20 cztery razy, albo 20 można na 4 równe części podzielić i piszemy tak:

$5 : 20 = 4$

oznaczając przez dwa punkta zdanie „mieści się we“.

Pierwszy sposób zmniejszania, odejmując liczbę jaką od większej, nazywamy odciąganiem (subtractio); drugi zaś sposób, dzieląc liczbę jaką na tyle części ile druga ma w sobie jedności, nazywamy dzieleniem (divisio). Dzielenie jest skróconém odciąganiem. Z danych liczb zowie się w od-

ciąganiu ta, którą zmniejszamy, ujemną (minuendus), ta, o którą zmniejszamy, lub którą odejmujemy, odjemną (subtrahendus); w dzieleniu nazywamy tę liczbę, którą dzielimy, dzielną (dividendus), tę zaś, która nam pokazuje na ile równych części dzielna ma być podzieloną, dzielnikiem (divisor). Wypadek odciągania zowie się resztą albo różnicą (differentia), wypadek dzielenia i orazem (quotiens).

12. Tak jak mnożenie jest skróconém dodawaniem, a dzielenie skróconém odciąganiem, tak téż odciąganie jest odwrotném dodawaniem, a dzielenie odwrotném mnożeniem.

$5 + 3 + 7 = 15$, znaczy: 5 i 3 i 7 razem dodane czyni 15, albo 5 plus 3 plus 7 jest równe 15, albo summa z 5 i 3 i 7 jest 15.

$5 - 3 = 2$ znaczy: od 5 odciągnięte 3 daje 2, albo 5 minus 3 jest równe 2, albo różnica między 5 a 3 jest 2.

6×4 albo $6 \cdot 4 = 24$ znaczy: 4 pomnożone przez 6 daje 24, albo 6 razy 4 jest 24, albo iloczyn z 6 i 4 jest 24.

$3 : 27 = 9$ znaczy: 27 podzielone przez 3 daje 9, albo 3 mieści się w 27 9 razy, albo iloraz z 27 podzielonych przez 3 jest 9.

UWAGA. Niektórzy piszą dzielną po lewej a dzielnik po prawej ręce znaku dzielenia.

ROZDZIAŁ II.

Cztery proste działania liczb całkowitych.

Ponieważ liczby całkowite bezwzględniemi i imiennemi są, rozróżnić więc będziemy cztery działania z liczbami bezwzględniemi i cztery działania z liczbami imiennemi. Pierwsze działania poprzedzać muszą, bo już przy dodawaniu liczb imiennych zachodzi dzielenie liczb bezwzględnych, kiedy summę całości mniejszych przez summę całości większych wyrazić chcemy, np. oznaczając, ile srebrników czyni dana summa fenyków.

I. Cztery działania proste liczb bezwzględnych całkowitych.

Dodawanie.

13. Aby summę dwóch lub kilku liczb wynaleść, podpisujemy dane liczby do dodawania tak pod sobą, aby liczby

jedności wyższych w głowie i dodając takową zaraz do liczb równorzędowych. Rachując przykład nasz sposobem takim będziemy mieli:

$$\begin{array}{r}
 3764 \\
 834124 \\
 3842 \\
 99 \\
 \hline
 841829
 \end{array}$$

mówiąc tak, $9 + 2 = 11$, $11 + 4 = 15$, $15 + 4 = 19$, pisząc 9 w miejscu jedności i zliczając potem dziesiątki tak: $1 + 9 = 10$, $10 + 4 = 14$, i t. d.

Że sposób ostatni dodawania fałszywym nie jest, wynika z poprzedzających dwóch przy dodawaniu użytych sposobów i z praw systemu dziesiątkowego.

Dodawanie od lewój ku prawej ręce byłoby bardzo niedogodnym, ponieważ summa jedności wyższych często odmienianą być by musiała dla koniecznego dodania do niej jedności wyższych z dodawania jedności niższych powstałych. Tam tylko, gdzie summy pojedyncze dziesięciu nie wynoszą, dodawanie od lewój ku prawej lub przeciwne równie jest dogodnym.

Odciąganie.

14. Dla znalezienia różnicy dwóch liczb, podpisujemy odjemną pod ujemną tak, żeby, jak przy dodawaniu, liczby równorzędowe pod sobą stały; podkreślamy wszystko linią dla odróżnienia różnicy od liczb danych do odciągania; zaczynamy odciągać od jedności postępując coraz wyżej od prawej ku lewej. Z liczb 87643 — 53212 tworzymy więc:

87643 ujemną, liczbę mającą być zmniejszoną,

53212 odjemną, liczbę mającą być odjętą.

34431 różnicę,

a mówimy: 2 od 3 zostaje 1, myśląc przytém, dwie jedności od 3 jedności zostaje 1 jedność, — dalej 1 od 4 zostaje 3, co znaczy, 1 dziesiątka od 4 dziesiątek zostaje 3 dziesiątki i t. d.

Jeżeli, jak tutaj, wszystkie liczby odjemnej mniejsze są jak liczby ujemnej nad niemi stojące, wtedy możnaby bez popełnienia błędu, także od lewój ku prawej ręce odciągać, co jednak bardzo niedogodnem jest, jeżeli w ujemnej są liczby mniejsze jak pod niemi stojące liczby odjemnej, w którym razie pożyczac przymuszeni jesteśmy. 8 jedności od 3

jedności odciągać nie mogą; jeżeli jednak przy tych 3 jednościach jeszcze dziesiątki się znajdują, wtedy pożyczam sobie jedną dziesiątkę, która, będąc równą 10 jednościom, z danymi 3 jednościami 13 jedności daje, od których 8 jedności odciągnąć mogą; t t. d. Gdybyśmy mieli 87543 — 45928, musielibyśmy, zaczynając odciągać od lewej, tak postąpić:

$$\begin{array}{r} 10 \quad 10 \\ 87543 \\ 45928 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ 162 \\ 15 \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{r} 42 \\ 162 \\ 15 \end{array}} \right\} \text{ i mielibyśmy } 41615$$

t. j. 4 od 8 zostaje 4, 5 od 7 zostaje 2, — ale 9 (set) od 5 (set) nie idzie, pożyczamy więc od liczb wyższych najbliższej ku lewej stojących, tu od 7 (tysięcy) jednej jedności (jednego tysiąca), która na miejscu 5^u postawiona 10 (set) znaczy, a $10 + 5 = 15$, $15 - 9 = 6$; lecz liczba poprzedzająca 7 została przez to zmniejszoną na 6, nie mamy więc poprzednio $7 - 5$, tylko $6 - 5 = 1$; liczbę więc dawniej znaną 2 zmienić musimy i na jej miejsce wypadek prawdziwy 1 napisać i t. d.

Pracę tę zbyt długą możemy łatwo skrócić zaczynając sposobem wiadomym od prawej ku lewej odciągać tak: 1. dla uniknięcia wszelkiego błędu piszemy przy liczbie od której pożyczaliśmy punkcik, który nam przypomina, że liczba ta o jedną jedność już jest niższą, i 2. nie piszemy dziesięciu jedności niższych wziętych z jednej wyższej jedności wcale tylko w głowie to zatrzymujemy. Będzie więc:

$$\begin{array}{r} 87.54.3 \\ 45\ 92\ 8 \\ \hline 41\ 61\ 5 \end{array} \quad \text{albo} \quad \begin{array}{r} 87543 \\ 45928 \\ \hline 41615 \end{array}$$

to zaś tak wyrazić możemy:

$$87543 = 80000 + 6000 + 1500 + 30 + 13$$

$$45928 = 40000 + 5000 + 900 + 20 + 8$$

$$41615 = 40000 + 1000 + 600 + 10 + 5$$

Przy pożyczaniu na jeden szczegółowy przypadek bliżej uważać trzeba, jeżeli ujemna jedno albo więcej zer ma. Stósuując wiadome reguły do dwóch następujących przykładów:

| | |
|------------------------|---|
| ¹⁰ 485.0 | ⁹ ^{10.10} 43.05 |
| 321 8 | 31 4 9 |
| 163 2 | 11 5 6 |

następującą otrzymamy regułę: zero do którego pożyczamy znaczy 10, zero zaś od którego pożyczylimy, znaczy 9 tylko. W pierwszym bowiem razie zero zwiększone o 10 jednostki, żadnej jednostki nie traci, w drugim razie zaś o jedną jednostkę zmniejszonym zostaje. I tak mamy:

| | |
|-----------|-------------|
| 25.0.0.05 | 5.0.0.0.0.0 |
| 14 5 4 91 | 4 0 9 0 9 9 |
| 10 4 5 14 | 9 0 9 0 1 |

Próby dodawania i odciągania.

15. Każdy rachunek, który liczbę szukaną fałszywie nam podaje, nie ma żadnej wartości; po rozwiązaniu więc każdego przykładu przekonać się trzeba czyli takowy fałszywym nie jest, co naturalnie przez rachunek tylko znowu uskutecznionym być może i w którym znów pobłądzi można. Próba więc każdego przykładu jest tylko drugim rachunkiem, przez który o prawdziwości pierwszego przekonać się i błędy, jeżeli jakie były, poprawić chcemy.

Dla uniknienia wszelkich błędów dobrze jest jeden i ten sam przykład kilka razy przerachować i jeżeli idzie różnemi sposobami np. dodawając w dodawaniu liczby raz od góry ku dołowi, drugi raz od dołu ku górze i t. d.

Odciąganie wykładamy zaraz po dodawaniu, ponieważ próba dodawania robi się przez odciąganie, a próba odciągania przez dodawanie.

16. Summa prawdziwa jest równa wszystkim liczbom do dodawania danym, — odciągając więc wszystkie liczby dane do dodawania, oprócz jednej, od summy ogólnej, różnica musi być równa tej jednej opuszczonej liczbie, albo, jeżeli i tę od summy jeszcze odciągniemy, różnica musi dać zero, — albo, dodając wszystkie liczby dane do dodawania oprócz jednej np. pierwszej lub ostatniej i odciągając tę summę od summy ogólnej różnica dać musi liczbę pierwszą lub ostatnią; będzie więc:

| | | |
|---------|--------|---------|
| 3876 | 3876 | 3876 |
| 340 | 340 | 340 |
| 8304 | 8304 | 8304 |
| 396 | 396 | 396 |
| 1.29.16 | 129.16 | 1.29.16 |
| 38 76 | 125 20 | 90 40 |
| 9.0 40 | 396 | 38 76 |
| 3 40 | | |
| 87.0.0 | | |
| 83 0 4 | | |
| 3 9 6 | | |

17. Różnica okazuje, 1. o ile ujemna mniejszą jest jak ujemna i dla tego musi summa z różnicy i odjemnej równą być ujemnej; 2. o ile ujemna większą jest jak odjemna i dla tego musi ujemna zmniejszona o różnicę dać odjemną. Próbę odciągania można więc i przez dodawanie i przez odciąganie robić, jak następujący przykład okazuje:

| | |
|-----------------|--------------|
| 79.28.5.0.0 | 7928500 |
| 37 35 9 44 | 3735944 |
| 41 92 5 56 | 4192556 |
| (+) 79 28 5 00 | (-) 3735944 |

Mnożenie.

18. Działanie to, które jak wiemy tylko skróconem dodawaniem jest, wymaga znajomości tak nazwanej tabliczki Pitagorasa, podającej nam iloczyny wszystkich liczb jednocyfrowych. Iloczyny wszystkie w tabliczce téj, zwykle jeden raz jedno zwanéj, zawarte, koniecznie na pamięć umieć należy. Tabliczkę tę łatwo sobie każdy na następujący sposób ułożyć może: Napisz w rzędzie jednym przy sobie wszystkie liczby jednocyfrowe, dodaj każdą do siebie, podpisz otrzymaną summę pod nią, przez co drugi rząd otrzymasz; potem dodaj do każdej liczby drugiego rzędu liczbę nad nią stojącą w pierwszym rzędzie i utwórz z tego rząd trzeci i t. d., to jest, do każdej liczby jakiegokolwiek rzędu dodaj nad nią stojącą liczbę w pierwszym rzędzie aż dziewięciu rządów nie otrzymasz. Tak powstanie następująca tabliczka.

| | | | | | | | | |
|---|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Wielkie i małe jeden raz jedno.

19. Oba czynniki są jednocyfrowe. Iloczyn ten stoi w poprzedzającej tabliczce; ile np. 4×6 daje, znajdziemy, jeżeli od liczby 6 w pierwszym rzędzie stojącej na dół pójdziemy aż do rzędu od liczby 4 się zaczynającego, gdzie na liczbę 24 natrafimy, albo idąc od liczby 4 w pierwszym rzędzie się znajdującą na dół aż do rzędu od liczby 6 się zaczynającego znów 24 znajdziemy, gdyż:

$$4 \times 6 = 6 \times 4.$$

20. Jeden z czynników jest jednocyfrowy, drugi wielocyfrowy. Podpisujemy czynnik jednocyfrowy pod jednościami czynnika wielocyfrowego, dodajemy potem jedności, dziesiątki, sta i t. d. ostatniego tyle razy do siebie, ile jedności czynnik jednocyfrowy w sobie zawiera, a to uskuteczniamy za pomocą poprzedzającej tabliczki; przyczem na to uważać należy, że, jeżeli dziesiątki kilka razy do siebie dodajemy, znów dziesiątki otrzymamy, miejsce więc jedności wypełnić musimy; że równie, dodając kilka razy sta do siebie, znów sta dostaniemy, miejsca więc dziesiątek i jedności wypełnić nam należy i t. d. Tym sposobem znalezione iloczyny częściowe podpisujemy podług reguł dodawania pod sobą, dodajemy je a summa znaleziona daje nam iloczyn szukany. I tak daje więc 3×78495 :

$$\begin{array}{r}
 78495 \text{ mnożną} \\
 3 \text{ mnożnik} \\
 \hline
 15 \\
 270 \\
 1200 \\
 24000 \\
 210000 \\
 \hline
 235485 \text{ iloczyn ogólny,}
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{czynniki} \\ \\ \text{iloczyny częściowe,} \\ \end{array}$$

t. j. 3 razy 5 jednoŝci daje 15 jednoŝci, przyczem 3 jednoŝci nie trzeba, — 3 razy 9 dziesiãtek daje 27 dziesiãtek, a wiêc 270, — 3 razy 4 sta daje 12 set, a zatem 1200 i t. d.

W przykãdnie tym nie siê nie zmieni, jeŝeli zera opuŝcimy, ale inne cyfry na sòsownych miejscach postawimy; to czyniãc bête:

$$\begin{array}{r}
 78495 \\
 \quad 3 \\
 \hline
 \quad 15 \\
 \quad 27 \\
 \quad 12 \\
 \quad 24 \\
 \quad 21 \\
 \hline
 235485
 \end{array}$$

Pracê naszã o wiele skrócimy, jeŝeli wypadków uŝytych tu działañ, to jest mnoŝenia i dodawania, pojedynczo wypisywaã nie bête, tylko naraz wypadek ogólny z obydwóch. Tak bowiem mówiã moŝemy:

78495 $3 \times 5 = 15$, piŝemy 5 jako 5 jednoŝci, za 3 trzymujãc jedno jako jednã dziesiãtkã w gò-
 235485 wie, — $3 \times 9 = 27$, to jest równie 27 dziesiãtkom, dodajãc 1 z jednoŝci powstała dziesiãtkã, mamy 28, piŝemy 8 dziesiãtek na miejscu dziesiãtek, a dodajemy 2, poniewaŝ oznaczajã sta, do dalszego iloczynu set i t. d.

Ten sposòb jest najpraktyczniejszym przy mnoŝeniu. Zaczynajãc mnoŝyc od najwyŝszych liczb mnoŝnej i uŝywajãc przy tem najpierwszã, wyŝej podanã, metody mnoŝenia, nie natraflibyŝmy wprawdzie na 3 jednoŝci, pracy jednak naszãj skróciã nie mogliŝbyŝmy.

| | |
|--------|--------|
| 78495 | 78495 |
| 3 | 3 |
| 210000 | 21 |
| 24000 | 24 |
| 1200 | 12 |
| 270 | 27 |
| 15 | 15 |
| 235485 | 235485 |

21. Oba czynniki sã wielocyfrowe, — jeden z nich jednak ma, wyjãwszy pierwszã mnogòŝã istotnã oznaczajãcã cyfrã, tylko same zera np.:

$$400 \times 5262.$$

Mnożymy przez cyfrę jak w (20) i piszemy z prawej strony iloczynu tyle zer ile czynnik dany ich posiada. Tutaj tak wnosić można: $4 \times 5262 = 21048$, gdy jednak 4 nie oznacza 4 jedności, tylko 4 sta, mnożnik zatem podług praw systemu dziesiętkowego 100 razy jest większy jak ten przez który mnożyliśmy, — iloczyn więc ten 21048 też 100 razy większy być musi, a będzie wtedy 100 razy większym jeżeli z liczb iloczynu 21048 każda 10 razy większą wartość mieć będzie. To stanie się przez dopisanie z prawej strony dwóch zer, przez napisanie więc 2104800, gdyż takim sposobem 8 jedności zamieni się na 8 set, 4 dziesiątki na 4 tysiące i t. d. Jeżeli więc liczbę jaką przez jedność wyższego rzędu mnożyć mamy, otrzymamy iloczyn, dopisując do mnożnej tyle zer, ile jedność wyższa w mnożniku ich posiadała, przy 10 więc jedno, przez 100 dwa, przy 1000 trzy i t. d. np.:

$$\begin{aligned} 10 \times 7834 &= 78340 \\ 100 \times 7834 &= 783400 \\ 1000 \times 7834 &= 7834000 \end{aligned}$$

22. Oba czynniki są wielocyfrowe i składają się ze samych mnogość istotną oznaczających cyfer, np.:

$$342 \times 5234.$$

Mając wzgląd na (20) i (21) przykład ten tak napisać i rachować możemy:

$$\begin{array}{r} 5234 = 5234 \\ 342 = 300 + 40 + 2 \\ \hline 10468 \text{ powstało z } 2 \times 5234 \\ 209360 \quad - \quad \text{z } 40 \times 5234 \\ 1570200 \quad - \quad \text{z } 300 \times 5234 \\ \hline 1790028 \end{array}$$

Nie rozkładając mnożnika 342 na $300 + 40 + 2$, ani wypisując zer w iloczynach częściowych mamy:

$$\begin{array}{r} 5234 \\ 342 \\ \hline 10468 \\ 20936 \\ 15702 \\ \hline 1790028 \end{array}$$

przyczem na to uważać należy, że każdy iloczyn częściowy od tego miejsca po prawej się zaczyna, na którym przynależna liczba mnożnika stoi.

Oba czynniki są wielocyfrowe, a przy tem jeden albo obydwaj mają zera na końcu. Mnożymy liczby, z cyfer mnogość istotną oznaczających złożone, podług poprzedzających reguł i do iloczynu otrzymanego dopisujemy z prawej strony tyle zer, ile ich obydwaj czynniki posiadają, lub ile jeden z nich posiada, jeżeli drugi zer na końcu nie ma. Że postępowanie takie jest nie błędnem na taki sam sposób jak w (21) łatwo okazać można.

$$\begin{array}{r}
 5387 \\
 \times 2400 \\
 \hline
 21548 \\
 10774 \\
 \hline
 12928800
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 253000 \\
 \times 3400 \\
 \hline
 1012 \\
 759 \\
 \hline
 86020000
 \end{array}$$

24. Jeżeli się w środku mnożnika zera znajdują, wtedy mnożymy tylko przez cyfry istotną mnogość oznaczające, czyniąc każdy iloczyn częściowy od tego miejsca pisać, na którym liczba mnożnika, przez którą mnożyliśmy, stała. Mamy więc 3008×38425 będzie:

$$\begin{array}{r}
 38425 \\
 \times 3008 \\
 \hline
 307400 \\
 115275 \\
 \hline
 115582400
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} 38425 \\ \times 3008 \\ \hline 307400 \\ 115275 \\ \hline 115582400 \end{array}} \right\} \text{ powstałe z }
 \begin{array}{r}
 38425 \\
 3008 \\
 \hline
 307400 \\
 00000 \\
 00000 \\
 115275 \\
 \hline
 115582400
 \end{array}$$

25. Ścisłe wzięwszy trzy tylko zachodzą przypadki przy mnożeniu, a te są:

1. obydwaj czynniki są jednocyfrowe, np. 9×8 ,
2. jeden czynnik jest jednocyfrowy, drugi wielocyfrowy, np. 5×7453 , albo też 4×7500 ,
3. obydwaj czynniki są wielocyfrowe, np. 384×76832 , albo 275×41800 , albo też 1700×4893060 .

W drugim razie jest wygodniej czynniki jednocyfrowe a w trzecim czynniki mniejszy wzięść za mnożniki, gdyż mniej iloczynów częściowych otrzymamy, co dodawanie tychże bardzo ułatwia. Piszemy więc:

$$\begin{array}{r}
 7453 \\
 \times 5 \\
 \hline
 37265
 \end{array}
 \qquad
 \text{a nie}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 5 \\
 \times 7453 \\
 \hline
 15 \\
 25 \\
 20 \\
 35 \\
 \hline
 37265
 \end{array}$$

również:

$$\begin{array}{r}
 76832 \\
 384 \\
 \hline
 307328 \\
 614656 \\
 230496 \\
 \hline
 29503488
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{a nie} \\
 \hline
 76832 \\
 768 \\
 1152 \\
 3072 \\
 2304 \\
 2688 \\
 \hline
 29503488
 \end{array}$$

26. Tak jak więcej niż dwie liczby do siebie dodawać możemy, tak też więcej jak dwa czynniki przez siebie mnożyć można. Poczyn z więcej jak z dwóch czynników otrzymamy, jeżeli najpierw dwa jakiegokolwiek z nich przez siebie pomnożymy, wypadły iloczyn przez trzeci czynnik a ten znów iloczyn przez czwarty czynnik i t. d. pomnożymy. Widzimy więc, że mnożyć kilka liczb przez siebie więcej nie znaczy, jak tylko mnożenie dwóch liczb kilka razy powtórzyć. Mając $25 \times 715 \times 4321$ będzie:

$$\begin{array}{r}
 715 \\
 25 \\
 \hline
 3575 \\
 1430 \\
 \hline
 17875 \\
 4321 \\
 \hline
 17875 \\
 35750 \\
 53625 \\
 71500 \\
 \hline
 77237875
 \end{array}
 \quad
 \text{albo}
 \quad
 \begin{array}{r}
 4321 \\
 715 \\
 \hline
 21605 \\
 4321 \\
 \hline
 30247 \\
 3089515 \\
 25 \\
 \hline
 15447575 \\
 6179030 \\
 \hline
 77237875
 \end{array}$$

25. Do przedszego rachowania dadzą się reguły w następujących przykładach zastosowane często z korzyścią użyć.

1. Dla 9, 19, 29...99, które liczby równe są $10-1$, $20-1$, $30-1$,... $100-1$, i t. d.

$$\begin{array}{l}
 9 \times 235 = \left\{ \begin{array}{l} 3.25.0 \\ 325 \\ \hline 2925 \end{array} \right. \quad 19 \times 325 = \left\{ \begin{array}{l} 65.0.0 \\ 325 \\ \hline 6175 \end{array} \right. \\
 99 \times 325 = \left\{ \begin{array}{l} 325.0.0 \\ 325 \\ \hline 32175 \end{array} \right. \quad 999 \times 325 = \left\{ \begin{array}{l} 325.0.0.0 \\ 325 \\ \hline 324675 \end{array} \right.
 \end{array}$$

2. Dla 11, 21, 31, ... 101, które liczby równe są $10 + 1$, $20 + 1$, $30 + 1$, ... $100 + 1$ i t. d.

$$11 \times 325 = \begin{array}{r} 3250 \\ 325 \\ \hline 3575 \end{array} \quad 101 \times 325 = \begin{array}{r} 32500 \\ 325 \\ \hline 32825 \end{array}$$

3. Dla 11 oprócz tego:

$11 \times 18 = 198$, to jest $8 + 1 = 9$, które to 9 w środku piszemy między 1 i 8;

$11 \times 87 = 957$, to jest $7 + 8 = 15$, — z tego piszemy 5 w środku, 1 zaś dodajemy do 8;

$11 \times 345 = 3795$, to jest 5, potem $5 + 4 = 9$, potem $4 + 3 = 7$ i 3 i t. d.

Te skrócenia wypływają z praw mnożenia, które nam okazują na których miejscach iloczyny częściowe stoją. I tak mamy:

$$\begin{array}{r} 18 \\ 11 \\ \hline 18 \\ 18 \\ \hline 198 \end{array} \quad \begin{array}{r} 87 \\ 11 \\ \hline 87 \\ 87 \\ \hline 957 \end{array} \quad \begin{array}{r} 345 \\ 11 \\ \hline 345 \\ 345 \\ \hline 3795 \end{array}$$

28. Że mnożenie przez samo tylko dodawanie skutecznie można i że mnożenie tylko skróconem dodawaniem jest, łatwo się przekonać możemy. Zamiast:

$$\begin{array}{r} 3546 \\ 5 \\ \hline 17730 \end{array} \quad \text{możemy napisać:} \quad \begin{array}{r} 3546 \\ 3546 \\ 3546 \\ 3546 \\ 3546 \\ \hline 17730 \end{array}$$

Korzyść mnożenia okazałaby się bardziej jeszcze widoczną przy mnożeniu 325×79827 , bo gdybyśmy to mnożenie przez dodawanie odbyć chcieli, musielibyśmy liczbę 79827, do siebie 325 razy dodać i dopiero summa $79827 + 79827 + 79827 \times \text{etc.}$ dałaby żędaną liczbę.

Dzielenie.

29. Liczbę daną na tyle części podzielić, ile druga ma w sobie jedności, znaczy to samo, co dowiedzieć się ile razy jedna liczba w drugiej się mieści. Że zaś czynnik każdego dwuliczbowego iloczynu w tym iloczynie tyle razy

się mieści, ile drugi czynnik tego samego iloczynu ma w sobie jedności; (i tak np. uważając 60 za iloczyn z liczb 12 i 5 powstały, widzimy że 12 w 60 mieści się razy 5, 5 zaś w 60 razy 12), możemy przeto dzielnik uważać za jeden czynnik, dzielną za iloczyn a iloraz za drugi czynnik i tak mówić: dzielić znaczy z danego iloczynu i jednego czynnika drugi czynnik wynaleść. Tak też jeszcze wnosić by można: iloczyn jest tyle razy większym od jednego czynnika, ile drugi ma w sobie jedności, albo każdy czynnik jest tyle razy mniejszym od iloczynu, ile drugi czynnik ma w sobie jedności, zkad też wypada, że iloraz taką częścią dzielnej być musi, ile dzielnik ma w sobie jedności, że więc dzielić znaczy: liczbę daną to jest dzielną tyle razy zmniejszyć ile druga, to jest dzielnik ma w sobie jedności. I dla dzielenia więc trzeba umieć jeden raz jedno; — lecz gdy dla mnożenia uczyliśmy się tabliczki Pitagorasa mówiąc:

$$\begin{array}{l} 1 \times 2 = 2, \\ 2 \times 2 = 4 \\ 2 \times 3 = 6 \\ \text{i t. d.} \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{l} 1 \times 3 = 3 \text{ i t. d.} \\ 2 \times 3 = 6 \\ 3 \times 3 = 9 \\ \text{i t. d.} \end{array}$$

w dzieleniu przeciwnie, aby szybko wiedzieć z jakich czynników każda liczba się składa, tabliczkę wiadomą odwrotnie poznać musimy, mówiąc:

$$\begin{array}{l} 2 = 1 \times 2, \\ 4 = 2 \times 2 \\ 6 = 3 \times 2 \\ \text{i t. d.} \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{l} 3 = 1 \times 3 \text{ i t. d.} \\ 6 = 2 \times 3 \\ 9 = 3 \times 3 \text{ dalej:} \\ 3 = 1 \times 3 \\ 4 = 1 \times 3 + 1 \\ 5 = 1 \times 3 + 2 \\ 6 = 2 \times 3 \\ \text{i t. d.} \end{array} \quad \text{i} \quad \begin{array}{l} 4 = 1 \times 4 \\ 5 = 1 \times 4 + 1 \\ 6 = 1 \times 4 + 2 \\ 7 = 1 \times 4 + 3 \\ 8 = 2 \times 4 \\ \text{i t. d.} \end{array}$$

30. Dzielnik jest jednocyfrowy a dzielna najwięcej dwucyfrowa bez zer. Dzielna jest albo czystym iloczynem dzielnika, jak np. 8 jest czystym iloczynem z 2 i 4; albo nie jest czystym iloczynem, gdy kilka jeszcze jedności w sobie zawiera nad najbliższy niższy iloczyn a mniej niż do wyższego iloczynu potrzeba. np. 14 znaczy 4 pomnożone przez 3, ale zostają jeszcze 2 jedności i 14 więc nie jest ani czystym iloczynem z 4 przez 3 ani iloczynem 4 przez 4. Używając tabliczki Pitagorasa szukamy dzielnika w pierwszej kolumnie po lewej i w rzędzie całym w którym ta liczba leży znajdujemy w pierwszym razie dzielną albo w drugim

liczbę najbliższą iloczynowi liczby danej pomnożonej przez inną liczbę; idąc od tej liczby wprost ku górze natrafiamy w pierwszym rzędzie na iloraz.

I tak piszemy np.:

$$3 : 27 = 9$$

$$5 : 33 = 6 \text{ i zostaje } 3$$

$$\frac{30}{3}$$

Dzielnik jest jednocyfrowy, dzielna zaś dwu- albo wielocyfrowa, ale składa się tylko z samych dziesiątek, albo z samych set i t. d. Ponieważ części, jak się samo przez się rozumie, tego samego gatunku być muszą, jak to cośmy podzielnili, wypada ztąd, że iloraz z dziesiątków tylko dziesiątki, iloraz ze set tylko sta i t. d. dać może, tak jak iloraz z jedności jedności tylko daje. Będzie więc:

$$2 : 80 = 40$$

$$2 : 800 = 400$$

$$2 : 8000 = 4000$$

32. Dzielnik jest jednocyfrowy, dzielna zaś wielocyfrowa i składa się z różnych cyfer i zer. Jasnem to jest, że liczby do różnych rzędów należące osobno dzielonymi być muszą. Zamiast $2 : 846$ piszemy podług (31) tak:

$$2 : 846 = 2 : 800 + 40 + 6 = 400 + 20 + 3 = 423, \text{ co}$$

skrótliwie bardzo możemy, pisząc każdą liczbę ilorazem w miejscu jej przynależnem, robiąc tak:

$$2 : 846 = 423 \text{ i}$$

mówiąc: 2 w 8 idzie 4 razy, 2 w 4 idzie 2 razy i 2 w 6 idzie 3 razy. Początkujący tak pisze:

$$2 : 846 = 423$$

$$8$$

$$\frac{4}{4}$$

$$4$$

$$\frac{6}{6}$$

$$\frac{6}{6}$$

Jeżeli jakiegokolwiek rzędu liczba nie jest czystym iloczynem dzielnika, jak tu jest $8 = 4 \times 2$, właściwie $800 = 400 \times 2$, $40 = 20 \times 2$ i $6 = 3 \times 2$; wtedy reszta każdego rzędu zamienia się na liczby następnego 10 razy mniej znaczącego rzędu i tam bywa dzieloną, — a więc:

$$2 : 958 = 2 : 900 + 50 + 8$$

$$2 : 800 + 150 + 8 \text{ i na koniec}$$

$$2 : 800 + 140 + 18 = 400 + 70 + 9 = 479$$

albo tak:

$$2 : 958 = 400 + 70 + 9 = 479$$

$$800$$

$$\underline{158}$$

$$140$$

$$\underline{18}$$

$$18$$

$$\dots$$

najkrócej zaś:

$$2 : 958 = 479$$

$$8$$

$$\underline{15}$$

$$14$$

$$\underline{18}$$

$$18$$

$$\dots$$

Trafia się często, że liczba najwyższego rzędu nie jest podzielna i dla tego już ona na liczbę niższego rzędu zamienioną być musi t. j. że zaraz z początku w dwie pierwsze liczby dzielić musimy, np.:

$$8 : 1786 = 223 \text{ i } 2 \text{ zostaje.}$$

$$16$$

$$\underline{18}$$

$$16$$

$$\underline{26}$$

$$24$$

$$\underline{2}$$

Że w ilorazie nie zawsze na końcu zera stoją, przy końcu dzielnej takowe się znajdują, następujące pokazują przykłady:

$$2 : 800 = 400 \text{ a } 2 : 7650 = 3825$$

$$5 : 960 = 192 \text{ a } 5 : 9600 = 1920$$

To ztąd pochodzi, że iloczyn który tu jest dzielną nie tylko wtedy zerami się kończy, jeżeli jeden albo też obydwa czynniki zerami się kończą, ale i wtedy jeżeli jeden z czynników ma na końcu liczbę parzystą (2, 4, 6, 8), drugi zaś liczbę 5, np. $2 \times 5 = 10$, $4 \times 5 = 20$, $42 \times 5 = 210$, $424 \times 15 = 6360$ i t. d.

33. Dzielnik jest wielocyfrowy, dzielna zaś też z tyłu albo z jeszcze więcej składa się cyfer. Łatwe są te wszystkie przykłady do rachowania, w których dziesiątki przez dziesiątki, sta przez sta i t. d. również, gdzie sta z dziesiątkami przez dziesiątki, tysiące ze stami i dziesiątkami przez dziesiątki dzielić mamy, albo jeżeli dzielnik jest jednością rzędu wyższego, jak 10, 100, 1000 etc.

$$1. \quad 20 : 80 = 4 \quad 200 : 800 = 4 \\ 2000 : 8000 = 4; \quad 20000 : 80000 = 4$$

gdyż jak 2 jedności w 8 jednościach 4 razy się mieszczą, tak też 2 dziesiątki w 8 dziesiątkach 4 razy mieścić się muszą i t. d. Gdy zaś we wszystkich tych przykładach ten sam iloraz otrzymaliśmy, jak z dzielenia $2 : 8$, następującą stawiamy regułę: jeżeli dzielnik i dzielna na końcu zera mają można z obydwoch równą liczbę zer wypuścić.

$$2. \quad 20 : 800 = 40, \text{ bo z (1) wpływa} \\ 20 : 800 = 2 : 80 = 40.$$

Można też napisać:

$$20 : 800 = 40$$

$$\begin{array}{r} 80 \\ \hline 0 \\ 0 \end{array}$$

Również: $200 : 800000 = 2 : 8000 = 4000$ i t. d.

$$3. \quad 20 : 860 = 43, \text{ albo } 2 : 86 = 43$$

$$\begin{array}{r} 80 \\ \hline 60 \\ 60 \\ \hline \dots \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ \hline 6 \\ 6 \\ \hline \dots \end{array}$$

co też tak pisać możemy:

$$20 : 860 = 20 : 800 + 60 = 40 + 3 = 43.$$

Również:

$$20 : 8640 = 20 : 8000 + 600 + 40 = 400 + 30 + 2 = 432$$

krótko tak:

$$20 : 8640 = 432 \text{ albo } 2 : 864 = 432$$

$$\begin{array}{r} 80 \\ \hline 64 \\ 60 \\ \hline 40 \\ 40 \\ \hline \dots \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ \hline 6 \\ 6 \\ \hline 4 \\ 4 \\ \hline \dots \end{array}$$

4. Jeżeli dzielnik jest jednością rzędu wyższego, wtedy najłatwiej otrzymamy iloraz, jeżeli od dzielnej z końca po prawęj ręce tyle cyfer odetniemy, ile ich w dzielniku przy końcu stało; przy 10 więc jedną, przy 100 dwie, przy 1000 trzy i t. d. Liczba z lewéj strony odciętych miejsc zostająca jest ilorazem, a liczba odcięta jest resztą na sposób zwyczajny dalej dzielić się nie dająca, np.:

$$10 : 8412 = 841 \text{ i } 2 \text{ zostaje reszty}$$

$$10 : 8410 = 841$$

$$100 : 8412 = 84 \text{ i } 12 \text{ zostaje}$$

$$1000 : 8412 = 8 \text{ i } 412 \text{ zostaje. i t. d.}$$

Że rachować w ten sposób możemy wypada ztąd, że otrzymany iloraz w istocie taką częścią dzielnej jest, jaką dzielnik, tutaj jedność wyższego rzędu, okazuje; przez odcięcie bowiem jednéj cyfry, drugie miejsce stanie się pierwszym, trzecie drugiem i t. d., t. j. dziesiątki staną się jednościami, sta dziesiątkami i t. d. każda liczba zamieni się na liczbę 10 razy mniejszą. Przez odcięcie dwóch miejsc stanie się trzecie miejsce pierwszym, czwarte drugiem i t. d., to jest sta staną się jednościami, tysiące dziesiątkami i t. d., dla czego cała liczba na liczbę 100 razy mniejszą się zamieni.

5. Wszystkie przykłady dotychczasowe tak rozłożyć się dały, że iloczyny dzielnika przy znajomości tabliczki Pitagorasa łatwo z pamięci znalezionemi być mogły; trudniejszym jest dzielenie gdy dzielnik tak jest wielkim, że iloczynów z niego powstałych w pamięci zachować nie możemy, np.

$$316 : 68572 \text{ i } 456 : 139869$$

Następującego sposobu tu użyć trzeba:

$$316 : 68572 = 217$$

$$456 : 139869 = 306$$

$$\begin{array}{r} 632 \\ \hline 537 \\ 316 \\ \hline 2212 \\ 2212 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1368 \\ \hline 3069 \\ 2736 \\ \hline 333 \end{array}$$

t. j. szukamy, ile razy dzielnik w najwyższych liczbach dzielnej się mieści, odcinając sobie od dzielnej z lewéj strony tyle cyfer, ile ich dzielnik ma lub jedną jeszcze więcej, gdyby najwyższa liczba dzielnej mniejszą być miała jak najwyższa liczba dzielnika; w pierwszym więc z naszych przykładów pytamy się ile razy 316 w 685 się mieści, w dru-

gim zaś, ile razy 456 w 1398 się mieści, albo raczej, ile razy 316 w 68500 idzie i równie ile razy 456 w 139800 się mieści. Poszukiwanie to ułatwimy sobie, szukając w pierwszym razie ile razy pierwsza lewa liczba dzielnika w pierwszej lewej liczbie dzielnej się mieści, w drugim zaś, jeżeli szukamy ile razy pierwsza liczba dzielnika w dwóch pierwszych liczbach dzielnej się mieści, t. j. tutaj jeżeli się pytamy, ile razy 3 w 6 i ile razy 4 w 13 się mieści, przy czém jednak i na najbliższe liczby dzielnika uważać należy, gdyż często, ponieważ i przez te dzielić musimy, iloraz częściowy o jedną jedność mniejszym stać się może. Tutaj zatem:

$$3 : 6 = 2, \text{ więc téż: } \quad 4 : 13 = 3, \text{ więc téż}$$

$$316 : 685 = 2 \quad 456 : 1398 = 3.$$

Przez iloraz ten częściowy mnożymy cały dzielnik i otrzymany iloczyn odciągamy od najwyższych liczb dzielnej. Reszta musi być zawsze, jeżeliśmy dobrze rachowali, mniejsza jak dzielnik, a zatem:

$$316 : 68572 = 2$$

$$\begin{array}{r} 632 \\ \hline 53 \end{array}$$

$$456 : 139869 = 3$$

$$\begin{array}{r} 1368 \\ \hline 30 \end{array}$$

Potem spuszczaamy najbliższą albo kilka z najbliższych liczb dzielnej do reszty, t. j. tyle aż reszta ze spuszczeniem cyframi razem wzięta większą się stanie jak dzielnik, przez który potem dzielimy, przy czém na to uważać należy, że przy każdej spuszczonej cyfrze dzielnej w ilorazie także jedną cyfrę przypisać musimy; przypisujemy więc w ilorazie zero jeżeli reszta ze spuszczeniem z dzielnej cyframi przez dzielnik jeszcze jest podzielna, w innym razie zaś inną jaką cyfrę. Przez każdy następny szczegółowy iloraz mnożymy cały dzielnik, iloczyn ten odciągamy od reszty i tak długo tak postępujemy, aż ostatnia cyfra dzielnej t. j. jedności spuszczeniem nie zostaną. Mamy więc:

$$316 : 68572 = 217$$

$$\begin{array}{r} 632 \\ \hline 537 \\ 316 \\ \hline 2212 \\ 2212 \\ \hline \dots \end{array}$$

$$456 : 139869 = 306$$

$$\begin{array}{r} 1368 \\ \hline 3069 \\ 2736 \\ \hline 333 \end{array}$$

Dłuższe przykłady takowego obrachowania jest następane:

$$316 : 68572 = 200 + 10 + 7 = 217$$

$$\begin{array}{r} 63200 \\ \underline{5372} \\ 3160 \\ \underline{2212} \\ 2212 \\ \hline \dots \end{array}$$

34. Ścisłe wzięwszy tak jak w mnożeniu tak téż i w dzieleniu trzy przypadki zachodzić tylko mogą, a te są:

1. dzielnik jest jednocyfrowy, dzielna zaś jedno-, najwięcej dwucyfrowa, np. $2 : 8$ albo $8 : 72$.

2. dzielnik jest jednocyfrowy, dzielna zaś wielocyfrowa, np. $4 : 4876$.

3. dzielnik i dzielna są liczby wielocyfrowe, np.

$$287 : 43667 \text{ albo } 40 : 6009.$$

Przy dodawaniu i mnożeniu muszą najmniej dwie liczby, przy odciąganiu zaś i dzieleniu mogą tylko dwie liczby być dane. Przy pierwszych dwóch działaniach liczby dane jakkolwiek między sobą przemienić możemy, przy drugich dwóch zaś nie, i tak jest:

$$2 + 8 + 7 = 8 + 2 + 7 = 7 + 8 + 2 \text{ i t. d., również}$$

$$2 \times 3 \times 5 = 3 \times 5 \times 2 = 2 \times 5 \times 3 \text{ i t. d., ale}$$

$$10 - 7 \text{ nie jest to samo co } 7 - 10, \text{ również}$$

$$3 : 12 \text{ nie jest to samo co } 12 : 3.$$

35. Skrócenia przy dzieleniu używane z następujących przykładów poznać możemy.

$$8 : 9147632 = 1143454$$

11

34

27

36

43

32

$$35 : 7844000 = 223828$$

83

134

290

100

300

20

$$25 : 114000 = 4560$$

$$\begin{array}{r} 140 \\ 150 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$44 : 4400132 = 100003$$

$$\begin{array}{r} 0 \\ 0 \\ \hline 132 \\ \dots \end{array}$$

36. Że dzielenie przez powtórzone odciąganie, które jednak więcej czasu i miejsca zabiera, odbyć można i że więc dzielenie tylko skróconem jest odciąganiem, łatwo się przekonamy, odciągając dzielnik od dzielnej kilka razy. i tak np. $2 : 8 = 4$ moglibyśmy następującym znaleźć sposobem:

$$\begin{array}{r} 8 \\ 2 \dots 1 \\ \hline 6 \\ 2 \dots 1 \\ \hline 4 \\ 2 \dots 1 \\ \hline 2 \\ 2 \dots 1 \\ \hline 0 \end{array}$$

ale chcąc znaleźć takim sposobem iloraz 40 od $2 : 80$, iloraz 423 od $2 : 846$ i t. d. musielibyśmy w pierwszym razie 2 od 80 czterdzieści razy, w drugim zaś 2 od 846 czterysta dwadzieścia trzy razy odciągnąć.

Próby mnożenia i dzielenia.

37. Próba mnożenia robi się przez dzielenie, próba zaś dzielenia przez mnożenie, podobnie jak to przy dodawaniu i odciąganiu widzieliśmy. Ponieważ iloczyn jeden czynnik tyle razy w sobie zawiera, ile drugi ma w sobie jedności, musimy więc dzieląc iloczyn przez jeden czynnik za iloraz drugi czynnik otrzymać, skoro wszystko dobrze rachowanem było. Jeżeli więc jeden z czynników za dzielnik, iloczyn za dzielną weźmiemy i jeżeli z dzielenia tychże wypadły iloraz drugiemu jest równy czynnikowi, wtedy rachunek nasz jest dobry.

$$3 \times 963 = 2889 \text{ i } 3 : 2889 = 963$$

albo $963 : 2889 = 3$.

38. Ponieważ iloraz okazuje ile razy dzielnik w dzielnej się mieści, musi przeto, skoro rachunek był dobrym, iloczyn z dzielnika i ilorazu dzielnej być równy. Jeżeli więc mnożąc dzielnik przez iloraz, w razie gdy dzielenie zaszło, dzielną otrzymamy lub jeżeli dzielenie nie zaszło, gdy iloczyn z dzielnika i ilorazu do reszty pozostałej z dzielenia dodany dzielną daje, wtedy dobrze dzieliliśmy.

$$4 : 8064 = 2016 \text{ i } 2016 \times 4 = 8064$$

albo:

$$5 : 4487 = 897 \text{ i } 897 \times 5 = 4485$$

$$\begin{array}{r} 48 \\ 37 \\ \hline 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2 \\ 4487 \\ \hline \end{array}$$

II. Cztery działania proste liczb imiennych całkowitych.

39. Liczby imienne oznaczające mnogość pewnego gatunku czyli mnogość jednostki imiennych dzielą się na równoimienne i różnoimienne, albo na niewiązane i wiązane. Tamte z jednego tylko składają się gatunku, np. 20 talarów, albo 80 funtów, albo 12 arkuszy; te zaś z kilku gatunków różnej wielkości, tak że zawsze pewna mnogość niższych jednostki na jedną wyższego rzędu jedność idzie, i tak np. 30 talarów 16 srebrników 4 fenycgi są taką liczbą związaną, gdy 12 fenycgów jednemu srebrnikowi, a 30 srebrników jednemu talarowi są równe.

Liczbę, która nam okazuje ile jednostki niższego rzędu na jedną jedność wyższego rzędu idzie, albo ile jednostki niższych z jednej jednostki wyższej zrobić możemy, nazywamy liczbą zamiany albo liczbą redukcyjną dla tych gatunków; i tak jest liczba 30 liczbą zamiany dla talarów i srebrników; 12 liczbą zamiany dla srebrników i fenycgów.

40. Mnogości wyższego rzędu możemy zamieniać na mnogości niższego, a mnogości niższego na mnogości wyższego. Pierwsze skuteczniamy przez mnożenie, drugie przez dzielenie liczby danej przez liczbę zamiany.

1. Ile srebrników daje 25 talarów?

Odpowiedź: 25

30

750 srebrników.

2. Ile talarów daje 1440 srebrników?

Odpowiedź: $30 : 1440 = 3 : 144 = 48$ tal.

3. Jeżeli mamy liczbę rzędu najniższego, wtedy często powstaje przez zamianę liczby niewiązanej na mnogości wyższych rzędów liczba wiązana. I tak mając 38468 fenygów wyrazić przez liczbę talarów, srebrników i fenygów, rachujemy tak:

$$12 : 38468 = 3205 \text{ \textit{sr}bgr.} \quad 30 : 3205 = 106 \text{ tal.}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 68 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20 \\ 205 \end{array}$$

$$\hline 8 \text{ fen.} \quad \hline 25 \text{ \textit{sr}bgr.}$$

albo téż:

$$12 \mid 38468 \mid 3205 \mid 106 \text{ tal.}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ 68 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20 \\ 205 \end{array}$$

$$\hline 8 \text{ fn. } 25 \text{ sr.}$$

a więc 38468 fen. = 106 tal. 25 \textit{sr}g. 8 fen.

4. Jeżeli jaką liczbę imienną z trzech albo więcej gatunków złożoną na taką liczbę wiążaną zamienić mamy, któraby najwyższego gatunku albo wyższych tylko gatunków nie oznaczała; albo jeżeli liczbę wiążaną na taką niewiązaną zamienić mamy, któraby tylko najniższy gatunek wyrażała; wtedy mnożymy liczbę najwyższego gatunku przez liczbę zamiany, dodajemy jedności niższego gatunku, potem tę summę mnożymy znów przez następną liczbę zamiany itd.

Jak można 8 talarów 16 srebrników 4 fenygi przez same srebrniki i fenygi wyrazić?

Odpowiedź: 8

$$\begin{array}{r} 30 \\ \hline 240 \\ 16 \\ \hline 256 \text{ sr. } 4 \text{ fen.} \end{array}$$

$$\hline 240$$

$$\hline 16$$

$$\hline 256 \text{ sr. } 4 \text{ fen.}$$

Ile fenygów daje 11 tal. 22 sr. 8 fen?

Odpowiedź: 11 albo dodając niższe 11

$$\begin{array}{r} 30 \\ \hline 330 \\ 22 \\ \hline 352 \end{array} \quad \begin{array}{r} 30 \\ \hline 352 \\ 12 \\ \hline 704 \end{array}$$

$$\hline 330 \text{ zionych iloczynów}$$

$$\hline 22 \text{ w myśli.}$$

$$\hline 352$$

$$\hline 12$$

$$\hline 704 \quad 4232 \text{ fen.}$$

$$\hline 704$$

$$\hline 352$$

$$\hline 4224$$

$$\hline 8$$

$$\hline 4232 \text{ fen.}$$

Zamienianie liczby wiązanej na mnogości wyższego albo średniego rzędu np. tal., śr. fen. na same talary lub na same srebniki należy już do rachunku ułamkowego.

Nim do działań z liczbami imiennymi przystąpimy, musimy najpierw dokładnie poznać liczby zamiany w państwie Pruskiem używanych pieniędzy, wag i miar długości, płaszczyzn i brył; dla czego tu następujący przegląd dajemy.

I. Wagi krajowe używane od 1. Lipca 1858. 1 ładunek okrętowy (Last) = 40 centnarom, 1 centnar = 100 funtom, 1 funt = 30 łotom, 1 łót = 10 kwintlom, 1 kwintel = 10 centimom, 1 centim = 10 granom (Gron). Jeszcze mniejsze części wyrażają się przez dziesiątne części grana.

Uwaga. 1. Dawniej zawierał ładunek w sobie także 4000 funtów jak i teraz, ale centnar miał 110 funtów, funt 32 łoty, łót 4 kwintle.

2. Stary funt zawiera w sobie prawie 468 (dokładniej 467,71104) grammów francuzkich, nowy funt zaś 500; nowy funt jest więc o 32 (dokładniej o 32,28896) grammów cięższym od starego.

3. Francuzki gramm jest wagą centimetru sześciennego czystej wody w stanie największego jej skupienia t. j. przy temperaturze + 4, 108° C lub + 3, 286° R.

4. Centimetr sześcienny jest sześcianiem, którego każda krawędź centimetr wynosi t. j. tak jest długą jak setna część metra. Metr zaś jest dziesięto-milionową częścią długości kwadrantu południka ziemi i wynosi 3 stopy 2 cale 2,817 linii pruskiej miary.

5. Dla porównania wag starych i nowych tej samej nazwy następująca służyć może tablica:

| <i>stare wagi.</i> | <i>nowe wagi.</i> |
|---|--|
| 1 funt = 468 grammom, | 1 funt = 500 grammom, |
| 1 łót = $4\frac{68}{30}$ = $14\frac{2}{3}$ grammom, | 1 łót = $\frac{500}{30}$ = $16\frac{2}{3}$ grammom, |
| 1 kwintel = $\frac{468}{3 \cdot 2 \cdot 4}$ = $3\frac{3}{4}$ grammom, | 1 kwintel = $\frac{500}{3 \cdot 0 \cdot 10}$ = $1\frac{2}{3}$ grammom, |
| 1 centnar = 110.468 = 51480 gr. | 1 cent. = 100.500 = 50000 gram., |
| 1 ładunek = 4000.468 = 1872000 gr. | 1 ładunek = 4000.500 = 1200000 gr. |

Widzimy więc, że nowy funt, nowy łót i nowy ładunek większe są niż stary funt, stary łót i stary ładunek, przeciwnie zaś są nowy kwintel i nowy centnar lżejsze jak stary kwintel i stary centnar. Z tego wynika, że ceny towaru co do funtów, łotów i ładunków teraz wyższe są, co do kwintli i centnarów zaś niższe jak dawniej.

| |
|---|
| Jest zaś 36 starych centnarów prawie = 35 starym centnarom, |
| 14 funtów = 15 funtom, |
| 7 łotów = 8 łotom, |
| 11 kwintli = 5 kwintlom. |

II. Monety krajowe. Na mocy konwencji tyczącej się wybijania monet a w dniu 24 Stycznia 1857 r. w Wiedniu między państwami niemieckimi z wyjątkiem Hamburga, Lybeki, Bremenu i Meklemburgii zawartej, za podstawę

przy wybijaniu monet wzięto funt nowy pruski, równający się 500 grammom francuzkim. Z funta czystego srebra ma się wybić 30 talarów albo 45 guldenów, albo $52\frac{1}{2}$ guldena. Mamy więc trojaką stopę menniczną, to jest stopę trzydziesto talarową, czterdziesto pięć guldenową (stopę menniczną austryacką) i pięćdziesiąt dwa i pół guldenową (stopę menniczną południowych państw niemieckich). U nas będzie użyta stara trzydziesto talarowa. Wybijane zaś będą: dwutalarówki (zawierające w sobie 2 łoty czystego srebra), talarówki (zawierające w sobie 1 łót czystego srebra), szóste części talara (5 srebrników), dwunaste części talara $2\frac{1}{2}$ srebrnika), i pół srebrniki (trzygroszówki).

Co do złotych monet mają na przyszłość tylko być wybijane korony i pół korony, z których pierwsze $\frac{1}{30}$ funta, drugie zaś $\frac{1}{100}$ funta czystego złota w sobie zawierają. Wartość frydrychsora wynosi 5 tal. 20 srebr., wartość więc korony musiałaby stosunkowo do frydrychsora 9 tal. 11 srebr. 10 fen. wynosić, jako moneta jednak handlowa kursowi podległa wyższej wartości niż 9 tal. 5 srebrników mieć nie będzie.

Do monety zdatkowej liczymy oprócz $2\frac{1}{2}$ (półzłotków), 1 i $\frac{1}{2}$ srebrnika, także i monety miedziane, które jako jedno, dwu, trzy i cztero fenygowe pieniądze wybijane bywają. Wartość fenyga zaś jest taką, że 12 fenygów równa się jednemu srebrnikowi.

Uwaga. Według dawniej 14 talarowej stopy wybijano 14 talarów z grzywny to jest z pół starego funta czystego srebra. Stare pruskie talary były 12to łotowe t. j. zawierały w sobie 12 części srebra, 4 części miedzi. Terazniejszy funt menniczny dzieli się na 1000 części a wagą czystego srebra i złota w monetach zawartego wyraża się także w częściach tysięcznych. Stosunek całej wagi (t. j. wagi srebra i miedzi w monecie zawartych) do wagi droższego metalu (t. j. wagi srebra lub złota w monecie zawartego) da się w następujących liczbach wyrazić:

w talarach 1000: 900,
w srebrnikach 1000: 520,
w monetach $2\frac{1}{2}$ srebrnikowych 1000: 375,
w srebrnikach i pół srebrnikach 1000: 220,
w koronach i pół koronach 1000: 900.

Ponieważ stary talar ($\frac{1}{2}$ starego łóta ważący) jeszcze nie o fenyg wyższą ma wartość niż nowy (1 nowy łót ważący), w zwyczajnym więc kursie równoimienne monety według starej i nowej stopy mennicznej wybijane równe wartości mieć będą.

III. Waga aptekarska i lekarska w przyszłości od wagi handlowej różnić się nie będzie, nie oznaczono jednak jeszcze czasu, od którego stare wagi z użycia wyjść mają.

Dzisiaj jeszcze jest 1 funt aptekarski = 24 starym pruskim łotom = 12 uncjom, 1 uncja = 8 drachmom, 1 drachma = 3 skrupułom, 1 skrupuł = 12 granom.

IV. *Miara papieru.* 1 bela = 10 ryzom, 1 ryza = 20 librom, 1 libra papieru do pisania = 24 arkuszom, 1 libra papieru do drukowania = 25 arkuszom.

V. *Miara przędzy.* 1 kopa = 60 sztukom, 1 sztuka = 4 motkom, 1 motek = 60 pasmom, 1 pasmo = 20 nitkom, jedna nitka 4 albo 2 łokciom.

VI. *Miara płótna.* 1 kopa = 3 półkom, 1 półka = 20 łokciom, 1 weba = 72 łokciom.

VII. *Miara zboża.* 1 laszt = 3 wensplom, 1 wenspel = 2 małderzom, 1 małderz = 12 szeflom, 1 szefel = 4 ćwiartkom, 1 ćwiartka = 4 mackom, 1 macka = 4 miarom, 1 miarka = 4 ćwiarteczkom.

VIII. *Miara wina* od 1821 roku. 1 fura = 3 okseftom, 1 okseft = $1\frac{1}{2}$ beczce = 3 wiadrom = 6 ankrom = 180 kwarantom, więc 1 beczka = 2 wiadrom, 1 wiadro = 2 ankrom, 1 anker = 30 kwarantom, 1 kwarta = 4 kwaterkom.

IX. *Miara piwa.* 1 war = 9 kadziom, 1 kadź = 2 fasom, 1 fasa = 2 beczkom, 1 beczka = 4 ćwierćbezczkom, 1 ćwierćbezczki = 25 kwarantom, 1 kwarta = 4 kwaterkom.

X. *Miara długości* od roku 1821. a) podług prętów dwunastkowych. 1 mila = 2000 prętów = 24000 stóp = $11294\frac{1}{4}$ łokci, 1 pręt = 12 stopom, 1 łokieć = $2\frac{1}{8}$ stopy, 1 stopa = 12 calom, 1 cal = 12 liniom, 1 linia = 12 skrupułom. — b) podług prętów dziesiętnych. 1 mila = 2000 prętów = 20000 stóp, 1 pręt = 10 stopom, 1 stopa = 10 calom, 1 cal = 10 liniom, 1 linia = 10 skrupułom, 1 sążeń = 6 stóp.

XI. *Miara powierzchni.* a) pręt kwadratowy ma 144 stóp kwadratowych. 1 mila kwadratowa = $22222\frac{2}{3}$ mórg = 400000 prętów kwadratowych, 1 huba = 30 morgom, 1 morga = 180 prętom kwadratowym, 1 pręt kwadratowy = 144 stopom kwadratowym, 1 stopa kwadratowa = 144 calom kwadratowym, 1 cal kwadratowy = 144 liniom kwadratowym, 1 linia kwadratowa = 144 skrupułom kwadratowym. b) pręt kwadratowy ma 100 stóp kwadratowych, 1 mila kwadratowa = $22222\frac{2}{3}$ mórg = 400000 prętów kwadratowych, 1 pręt kwadratowy = 100 stopom kwadratowym, 1 stopa kwadratowa = 100 calom kwadratowym.

XII. *Miary sześciennie albo kubiczne* a) podług miary dwunastkowej. 1 pręt kub. = 1728 stop. kub., 1 stopa ku-

biczna = 1728 calom kub., 1 cal kub. = 1728 liniom kub.
 b) podług miary dziesiętnój. 1 pręt kub. = 1000 stop. kub.,
 1 stopa kub. = 1000 calom kub., 1 cal kub. = 1000 liniom
 kubicznym.

XIII. *Miara czasu.* 1 rok = 12 miesięcy = 52 tygodniom
 1 dniowi albo dwom dniom, to jest = 365 albo 366
 dniom, podług tego czy rok jest zwyczajny lub przestępny,
 1 miesiąc = 4 tygodniom = 30 dniom, 1 tydzień = 7
 dniom, 1 dzień = 24 godzinom, 1 godzina = 60 minutom,
 1 minuta = 60 sekundom, 1 sekunda = 60 tercjom, 1
 tercja = 3 chwilom.

W istocie rzecz się ma inaczej, gdyż miesiąc Styczeń, Marzec, Maj,
 Lipiec, Sierpień, Październik i Grudzień po 31 dni mają, zaś Kwiecień,
 Czerwiec, Wrzesień i Listopad po 30. Luty nakoniec w trzech następnych
 latach 28, a w czwartym roku 29 dni ma.

XIV. Przy sprzedaży i kupnie na sztuki liczy się na kopę 60
 sztuk lub 4 mendele, na mendel 15 sztuk, na tuzin 12 sztuk.

Niewiązane albo równoimienne liczby.

42. Cztery działania liczb niewiązanych odbywają się według
 zasad dla liczb bezwzględnych podanych i różnią się tylko
 tém, że tutaj mamy liczby przywiązane do jedności imiennój.

1. 2 tal. + 8 tal. + 18 tal. = 28 tal. albo

$$\begin{array}{r} 2 \text{ tal.} \\ 8 \text{ tal.} \\ 18 \text{ tal.} \\ \hline 28 \text{ tal.} \end{array}$$

2. 428 cent. — 366 cent. = 62 cent. albo 428 cent.

$$\begin{array}{r} 428 \text{ cent.} \\ - 366 \text{ cent.} \\ \hline 62 \text{ cent.} \end{array}$$

3. $7 \times 325 \text{ kop} = 2275 \text{ kop}$ albo 325 kop

$$\begin{array}{r} 325 \text{ kop} \\ \times 7 \\ \hline 2275 \text{ kop.} \end{array}$$

4. $9 : 117 \text{ wiertel} = 13 \text{ wiertel}$.

Przy mnożeniu i dzieleniu tak równoimiennych jak różnoimiennych liczb uważać na to należy, że mnożnik zawsze tak jak w (3) liczbą bezwzględną być musi, co samo z siebie wypada, gdyż, jak każdy widzi, pytać się możemy, ile otrzymamy biorąc 7 tal. 3 razy, ale bez sensu byłoby pytać się, ile będziemy mieli, jeżeli 7 tal. 3 tal. razy weźmiemy? Inaczej rzecz się ma przy dzieleniu, gdzie dziel-

nik, gdy dzielna zawsze jest liczbą imienną, imienną albo bezwzględną liczbą być może. I tak mając:

3 : 18 tal. pytamy się; co jest trzecią częścią od 18 tal. albo ile otrzymamy, jeżeli 18 tal. na 3 równe części podzielimy, — ale mając

3 tal. : 18 tal. pytamy się: ile razy mieszczą się 3 tal. w 18 tal., albo jaką częścią są 3 tal. od 18 tal.

Że oba pytania sens mają, jest samo przez się widocznym. Również wypada z

$$3 : 18 \text{ tal.} = 6 \text{ tal. i}$$

$$3 \text{ tal.} : 18 \text{ tal.} = 6$$

że iloraz zawsze jest liczbą imienną, jeżeli dzielnik liczbą bezwzględną a dzielna liczbą imienną jest, że zaś iloraz liczbą bezwzględną będzie, jeżeli dzielna i dzielnik liczbami są imiennymi. Jest więc jedno i to samo, czy mamy

$$3 \text{ tal.} : 18 \text{ tal.} = 6, \text{ czy też } 3 : 18 = 6$$

gdy w obydwóch razach iloraz liczbą jest bezwzględną.

Pytając się, ile kosztują 3 łokcie, jeżeli łokieć 6 tal. kosztuje? lub też chcąc się dowiedzieć, ile kosztuje łokieć skoro 3 łokcie 18 tal. kosztują? nie możemy położyć

$$3 \text{ łokcie} \times 6 \text{ tal.} \text{ tylko } 3 \times 6 \text{ tal.} = 18 \text{ tal.}$$

$$3 \text{ łokcie} : 18 \text{ tal.} \text{ tylko } 3 : 18 \text{ tal.} = 6 \text{ tal.}$$

Wiązane albo różnoimiennie liczby.

Dodawanie.

43. Rozumie się samo przez się, że tylko ten sam gatunek oznaczające wiązane liczby do siebie dodawać możemy, i tak tal., śr., fen. do tal., śr., fen. ale nie do cent., funt., łótów albo nie do kop, mendeli, sztuk i t. d. Liczby dane do dodawania podpisujemy tak pod sobą, aby nie tylko liczby równogatunkowe. ale także i różnoimiennie jedności tychże liczb równogatunkowych pod sobą stały; zaczynamy dodawać od najniższych gatunków i idziemy dalej do najbliższych wyższych, dodając zaraz do nich liczby gatunków wyższych z dodania gatunków niższych powstałe. To ostatnie jest przyczyną, że od najniższych gatunków dodawać zaczynamy; — w tym tylko razie, jeżeli summa każdego niższego gatunku mniejszą jest jak jedność każdego wyższego gatunku, równie dogodnie i od najwyższych gatunków zacząć dodawać możemy np.:

| | | | |
|---------|--------|--------|---------------|
| 36 tal. | 28 śr. | 6 fen. | |
| 144 | · 22 | · 7 | · 12 : 31 = 2 |
| 89 | · 13 | · 9 | · 7 |
| 128 | · 21 | · 4 | |
| 66 | · 8 | · 5 | · 30 : 94 = 2 |
| 3 | · 2 | | · 4 |
| 466 | · 4 | · 7 | |

albo:

| | | | |
|--------|-----------|-----------|----------------|
| 18 dni | 21 godzin | 59 minut. | |
| 2 | · 20 | · 19 | · 60 : 182 = 3 |
| 22 | · 22 | · — | · 4 |
| — | · 23 | · 50 | |
| 4 | · 9 | · 54 | · 24 : 98 = 4 |
| 4 | · 3 | | · 2 |
| 50 | · 2 | · 2 | |

Odciąganie.

44. Równie i tutaj tylko wiązane liczby tego samego gatunku od siebie odciągać możemy. Dla tego więc podpisujemy odjemną pod ujemną tak, żeby równorzędowe jedności równoimiennych liczb pod sobą stały: zaczynamy odciągać od najniższych gatunków, idąc potem do najbliższych wyższych. Zaczynamy zaś dla tego od najniższych, że często pożyczać musimy, co zawsze wtedy się zdarza, kiedy liczba jakiegokolwiek gatunku w ujemnej mniejsza jest jak pod nią stojąca liczba odjemnej, ten sam gatunek oznaczająca. Pożyczamy wtedy jedną jedność wyższego gatunku, z której naturalnie tyle jedności niższego gatunku powstaje, ile jedności liczba zamiany w sobie zawiera. I tak niech będzie:

| | | | | | |
|----------|--------|--------|--------------|-----------|---------|
| 459 tal. | 18 śr. | 6 fen. | 31.40. cent. | 88. funt. | 10 łót. |
| 375 | · 12 | · 2 | · 11 40 | · 94 | · 27 |
| 84 | · 6 | · 4 | · 19 99 | · 93 | · 13 |

45. Tutaj też należy obrachowanie wieku jakiej osoby. Czas śmierci jest w takich przykładach ujemną, czas urodzenia odjemną; obydwa czasy liczymy od narodzenia Chrystusa podług lat, miesięcy, dni, godzin i t. d. Rok, miesiąc, dzień muszą jednak o jedną jedność być zmniejszonymi, np. w zadaniu, ile lat miał A., jeżeli urodził się o godzinie 3 po południu 5 Września 1746 roku a umarł o 6 rano 15 Maja 1832 roku?

| | | | |
|----------|------------|--------|----------|
| 1831 lat | 4 miesiące | 14 dni | 6 godzin |
| 1745 | · 8 | · 4 | · 15 |
| 85 | · 8 | · 9 | · 15 |

przyczem jednak, chcąc długość wieku w ten sposób obra-
chować, na różną długość miesięcy, przyjmując zawsze, że
tylko z 30 dni są złożone, na zwyczajne i przestępne lata
żadnego względu nie mieliśmy.

Mnożenie.

46. Ponieważ każdy gatunek mnożnej tyle razy do sie-
bie dodać mamy, ile bezwzględna liczba mnożnika ma
w sobie jedności, zaczynamy więc mnożyć od najniższego
gatunku i zamieniamy otrzymany iloczyn, jeżeli jest wię-
kszym jak liczba zamiany, na liczbę wyższych gatunków.
Jedności wyższe, które takim sposobem otrzymaliśmy, do-
dajemy do iloczynu wyższego gatunku i t. d. Chcąc się np.
dowiedzieć ile daje 12 tal. 24 śr. 15 fen. 15 razy wzięte
piszemy:

$$\begin{array}{r}
 12 \text{ tal. } 24 \text{ śr. } 11 \text{ fen.} \\
 \quad \quad \quad 15 \\
 \hline
 192 \text{ tal. } 13 \text{ śr. } 9 \text{ fen.}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 12 : 165 = 13 \\
 \quad \quad 45 \\
 \quad \quad \quad 9 \\
 \hline
 15 \times 24 = 360 \\
 \quad \quad \quad 13 \\
 \quad \quad \quad \quad 30 : 373 = 12 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 73 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 13 \\
 \hline
 15 \times 12 = 180 \\
 \quad \quad \quad 12 \\
 \hline
 192
 \end{array}$$

albo tak:

$$\begin{array}{r}
 12 \text{ tal.} \quad 24 \text{ śr.} \quad 11 \text{ fen.} \\
 \quad \quad \quad 15 \\
 \hline
 180 \quad \cdot \quad 360 \quad \cdot \quad 12 \mid 165 \mid 13 \\
 12 \quad \cdot \quad 13 \quad \quad \quad 45 \\
 \hline
 192 \text{ tal. } 30 \mid 373 \mid 12 \quad 9 \text{ fen.} \\
 \quad \quad \quad 73 \\
 \quad \quad \quad 13 \text{ śr.}
 \end{array}$$

Jeżeli mnożnik na czynniki rozłożyć się da, jak tu 15
= 3 × 5, wtedy można całe mnożenie przez częściowe łatwiejsze mnożenia wykonać, i tak jest np.:

$$\begin{array}{l}
 15 \times 12 = 180 \text{ i} \\
 3 \times 5 \times 12 = 36 \times 5 \text{ téż} = 180.
 \end{array}$$

Na taki sam sposób i przy liczbach imiennych postąpić możemy.

| | | | |
|-----------|----------|-------------------|--------|
| 12 tal. | 24 śr. | 11 fen. | |
| | | $15 = 3 \times 5$ | |
| 36 . | 72 . | 33 . | (3) |
| 12 | 13 | | |
| 192 tal. | 30 373 | 12 12 165 | 13 (5) |
| | 73 | 45 | |
| | 13 śr. | 9 fen. | |
| 16 cent. | 82 funt. | 22 łót. | |
| | | $35 = 5 \times 7$ | |
| 80 . | 410 . | 110 — | (5) |
| 28 | 25 | | |
| 588 cent. | 100 2895 | 28 30 770 | 25 (7) |
| | 95 funt. | 170 | |
| | | 20 łót. | |

Robota ta jeszcze o wiele skrócić się da, jeżeli przy każdym częściowym mnożeniu gatunki niższe zaraz na wyższe zamienimy: będzie wtenczas:

| | | | |
|---------|--------|-------------------|-----|
| 12 tal. | 24 śr. | 11 fen. | |
| 2 | 2 | $15 = 3 \times 5$ | |
| 38 . | 14 . | 9 — | (3) |
| 2 | 3 | | |
| 192 . | 13 . | 9 — | (5) |

i téż:

| | | | |
|----------|----------|-------------------|-----|
| 16 cent. | 82 funt. | 22 łót. | |
| 7 | 3 | $35 = 5 \times 7$ | |
| 84 . | 13 . | 20 — | (5) |
| | 4 | | |
| 588 . | 95 . | 20 — | (7) |

Dzielenie.

47. Dodawać i mnożyć zaczynamy zawsze od najniższych gatunków, ponieważ summy i iloczyny z niższych gatunków wypadłe nieraz tak wielkimi być mogą, że na jedności wyższych gatunków zamienić się dają i ponieważ wtedy z niższych gatunków wypadłe liczby wyższych gatunków zaraz do summ i iloczynów wyższych gatunków dodawać możemy. Odciągać zaczynamy téż od najniższych gatunków, ponieważ często od wyższych gatunków pożyczają jesteśmy przymuszeni;

dzielić zaś przeciwnie zaczynamy od najwyższych gatunków, gdy z dzielenia wyższych gatunków jedności pozostać mogą, które jako jedności wyższe dzielić się nie dadzą, dla czego je na jedności niższe zamienić musimy, jako takowe do jedności niższych tego samego gatunku dodajemy i sumę otrzymaną dopiero dzielimy. Reguła dzielenia jest więc następująca: Dziel najpierw gatunek najwyższy, resztę pozostałą zamień przez mnożenie odpowiednią liczbą zamiany na liczbę następnego gatunku, dodaj do niej jedności dane tego samego gatunku i dziel potem sumę otrzymaną; pozostała z dzielenia tego resztę zamień na liczbę następnego gatunku i t. d. 192 tal. 13 śr. 9 fen. mają między 15 osób równo być podzielone; ile każda dostanie?

$$15 : 192 \text{ tal. } 13 \text{ śr. } 9 \text{ fen.} = 12 \text{ tal. } 24 \text{ śr. } 11 \text{ fen.}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ \hline 12 \\ \hline 30 \end{array}$$

$$15 : 373 = 24$$

$$\begin{array}{r} 73 \\ \hline 13 \\ \hline 12 \\ \hline 35 \\ \hline 13 \end{array}$$

$$15 : 165 = 11$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \hline \end{array}$$

Łatwiejsze przykłady, jak np.: co jest 5tą częścią od 188 tal. 10 śr. 10 fen., można téż tak obrachować:

$$5 \mid 188 \text{ tal. } 10 \text{ śr. } 10 \text{ fen.}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \hline 37 \cdot 20 \cdot 2 \cdot \end{array}$$

Jeżeli dzielnik na czynniki rozłożyć się da, możemy trudne nieraz dzielenie przez kilkakrotne łatwiejsze częściowe dzielenia wykonać, dzieląc dzielną najpierw przez jeden czynnik dzielnika, otrzymany iloraz potem przez drugi czynnik i t. d. i tak na przykład ponieważ $15 = 3 \times 5$, możemy zamiast

$$15 : 75 = 5, \text{ położyć } 5 : 75 = 15 \text{ i}$$

$$3 : 15 = 5$$

a zatem też

$$15 : 192 \text{ tal. } 13 \text{ sr. } 9 \text{ fen.}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3) \ 64 \cdot 4 \cdot 7 \\ \hline 4 \quad 4 \end{array}$$

$$5) \ 12 \cdot 24 \cdot 11$$

albo:

$$15 : 192 \text{ tal. } 13 \text{ sr. } 9 \text{ fen.}$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 3 \\ 5) \ 38 \cdot 14 \cdot 9 \\ \hline 2 \quad 2 \end{array}$$

$$3) \ 12 \cdot 24 \cdot 11$$

Mamy 309 cent. 16 funt. 24 łót. podzielić na 24 równe części, — jak wielką będzie każda część?

Ponieważ $24 = 4 \times 6 = 3 \times 8 = 3 \times 2 \times 2 \times 2$ otrzymamy rezultat z łatwością dzieląc po kolei przez każdy z 2 lub 4 czynników, na które 24 rozłożyć się dało. I tak jest:

$$24 : 309 \text{ cent. } 16 \text{ funt. } 24 \text{ łót.}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 100 \\ 4) \ 77 \cdot 29 \cdot 6 \\ \hline 5 \quad 500 \quad 30 \\ 6) \ 12 \cdot 88 \cdot 6 \end{array}$$

albo:

$$24 : 309 \text{ cent. } 16 \text{ funt. } 24 \text{ łót.}$$

$$\begin{array}{r} 500 \\ 5 \quad 4 \quad 120 \\ 8) \ 38 \cdot 64 \cdot 18 \\ \hline 2 \quad 200 \\ 3) \ 12 \cdot 88 \cdot 6 \end{array}$$

lub też:

$$24 : 309 \text{ cent. } 16 \text{ funt. } 24 \text{ łót.}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad 30 \\ 3) \ 103 \cdot 5 \cdot 18 \\ \hline 2) \ 51 \cdot 52 \cdot 24 \\ 2) \ 25 \cdot 76 \cdot 12 \\ 2) \ 12 \cdot 88 \cdot 6 \end{array}$$

- Przykłady do rachunków poprzednich.

1. Średnica ziemi wynosi 1719 mil, średnica księżycy tylko 465; o ile mil jest więc średnica ziemi większą jak średnica księżycy?

2. W roku 1839 znano Amerykę już od lat 347; w którym więc roku została Ameryka odkryta?

3. Głos przechodzi w jednej sekundzie 1050 stóp; jeżeli więc między błyskawicą i grzmotem 11 sekund upływa, jak daleko wtedy jest burza od nas oddaloną?

4. Ile razy jest góra Montblanc 14000 stóp wysoka, wyższą, niż góra śnieżna (Schneefoppe), która 4950 stóp jest wysoka?

5. Ile wynoszą roczne rozchody w gospodarstwie, jeżeli się wydaje w Styczeniu 35 tal. 18 śr.; w Lutym 40 tal. 28 śr. 6 fen.; w Marcu 38 tal. 12 śr. 8 fen.; w Kwietniu 34 tal. 28 śr.; w Maju 42 tal. 16 śr. 4 fen.; w Czerwcu 53 tal.; w Lipcu 29 tal. 18 śr. 4 fen.; w Sierpniu 35 tal.; we Wrześniu 47 tal. 7 śr. 7 fen.; w Październiku 42 tal. 11 śr.; w Listopadzie 44 tal. 18 śr. i w Grudniu 50 tal. 16 śr. 3 fen.?

6. Fryderyk wielki urodził się 24 Stycznia 1712 roku, a umierając miał lat 74, 6 miesięcy, 24 dni; kiedy więc umarł?

7. Ile lat miał Piotr wielki, gdy 11 Lipca 1672 roku się urodził a umarł 18 Maja 1725 roku?

8. Ile waży woda w naczyniu 18 stóp sześciennych zawierającym, jeżeli jedna stopa sześcienna wody 60 funt. 28 łót. i 2 kwintle waży?

9. Pięciu kupców zyskuje przy pewnym przedsięwzięciu, na które równe summy dali, 1950 tal. 25 śr. 10 fen. ile więc każdy z nich dostanie?

10. Jeżeli dziecko 31 funt. a dorosły człowiek 1 cent. 45 funt. waży, ile razy jest tenże cięższy jak dziecko?

11. W roku 1839 podczas rewii pod Poczdamem jechało w 14 dniach na kolei żelaznej 50000 osób z Berlina do Poczdamu; jeżeli przyjmujemy że z tych 15000 na pierwszym miejscu jechało po 17 śr. 6 fen., 20000 na drugim po 12 śr. 6 fen. a reszta na trzecim po 7 śr. 6 fen., pytanie jest: 1. ile było dochodu za każde miejsce? 2. ile było w ogóle dochodu? 3. ile było dochodu w przecięciu codziennie?

12. Z dwóch pomp wylewa jedna w jednej sekundzie 2 funty wody, druga zaś 3 funty; z pierwszej płynie woda przez 40 minut 3 sekundy, z drugiej przez 24 minut 40 sekund, z której z pomp płynie więcej wody i o ile więcej?

13. Ile minut potrzebuje pruska poczta do ujechania jednej mili, jeżeli w 33 godzinach 44 mil ujeżdża?

14. Ile razy prędzej jak poczta jedzie się wozem parowym na kolei żelaznej, na której 4 mile w 44 minutach się ujeżdża?

15. Stolarz zrobił dla pewnej szkoły 22 ławek i 6 stołów; za każdą ławkę żąda po 26 śr. a za każdy stół po 2 tal. 24 śr. 9 fen., ile wynosi jego rachunek?

16. Jeżeli płaca roczna pewnego urzędnika 880 tal. wynosi, ile wynosi jego płaca miesięczna?

17. Jeżeli ktoś miesięcznie 1 tal. 16 śr. 6 fen. podatku płaci, ile zapłaci ogółem podatku przez 12 lat.

18. Ile kosztuje tuzin koszul, jeżeli kopa płótna 12 tal. kosztuje a na każdą koszulę 4 łokcie wyjdą i jeżeli za robotę każdej koszuli 9 śr. 9 fen. zapłacić musimy?

19. Ile pieniędzy wydaliśmy kupiwszy 18 łokci materyi pewnej po 16 śr. 8 fen. , 12 łokci sukna po 2 tal. 23 śr. 6 fen. , kapelusz za 2 tal. 15 śr. i innych drobniejszych rzeczy za 1 tal. 10 śr. 10 fen. ?

20. Karól ma do żądania z 7 tal. 18 śr. 9 fen. trzecią część, ze 100 tal. 20 śr. 10 fen. dziesiątą część, z 66 tal. 7 śr. 6 fen. szóstą część i nareszcie z 44 tal. 20 śr. 14 fen. czternastą część; ile więc w ogóle ma do żądania?

21. A. ma dostać od B. szóstą część z 458 tal. 7 śr. 6 fen. , ale powinien B zapłacić dwudziestą część z 886 tal. 25 śr. ; ile ma więc A po zrobionym obrachunku do żądania?

22. W gospodarstwie pewnym zrobiono w jednym tygodniu zimą następujące wydatki: za mięso 2 tal. 18 śr. 10 fen. , za jarzynę 17 śr. 9 fen. , za kawę, cukier i śmietanę 25 śr. 4 fen. , za chleb 1 tal. 5 śr. 6 fen. , za światło 8 śr. 6 fen. , za opał 1 tal. 2 śr. 9 fen. , za mąkę i jaja 11 śr. 4 fen. i za mydło i mączkę 1 tal. 4 śr. 4 fen. , ile ogółem wszystko wyniosło?

23. Kupiec pewien miał pewnego towaru 116 cent. 80 funt. 20 lótów ; z tego sprzedał najpierw 40 cent. 16 funt. 20 lót. ; potem 8 cent. 79 funt. 22 lót. ; potem 20 cent. 7 funt. a nareszcie 22 cent. 22 funt. 22 lótów ; ile mu się jeszcze zostało?

24. Kupcowi pewnemu przysłano trzy razy ten sam towar; pierwszy raz 100 cent. 60 funt. , drugi raz 91 cent. 90 funt. a trzeci raz 217 cent. 80 funt. ; kupiec ten ma komu innemu z towaru tego trzecią i czwartą część odstąpić; ile to wynosi?

ROZDZIAŁ III.

0 ułamkach.

I. O ułamkach prostych.

48. Dzieląc całość na części równe i biorąc z tych części jedną albo więcej, wtedy tak wzięte jak i pozostałe części są *ułamkiem*; ułamek więc jest oznaczeniem jednej lub więcej części jakiej całości.

Każdy ułamek oznacza się przez dwie liczby, gdyż jedna z tych liczb okazywać musi na ile równych części całość rozłożoną została, druga zaś ile takich części wzięliśmy. Pierwsza liczba zowie się *mianownikiem* (Nenner), druga zaś *licznikiem* (Zähler). Liczby te, *wyrazami ułamka* zwane, piszemy tak pod sobą, ażeby licznik stał u góry, mianownik u dołu i rozdzielamy je linijką. Ułamek $\frac{3}{5}$ znaczy więc, że całość na 5 równych części podzieloną została i że z tych 5ciu części cztery wzięliśmy.

Przy wymawianiu ułamka wymawiamy najpierw licznik, potem mianownik, dorozumiewając się przy ostatnim wyrazie „części“, i tak mówimy: $\frac{4}{5}$ cztery piąte, $\frac{6}{8}$ sześć ósmych t. j. sześć ósmych części.

Ułamek $\frac{4}{5}$ może też znaczyć: ze 4 danych całości wzięliśmy część piątą; ale wtedy powiedzieć musimy: ułamek jest częścią jedną lub kilku całości, np. $\frac{1}{5}$ jest ósmą częścią jedną całości, zaś $\frac{7}{8}$ jest ósmą częścią siedmiu całości.

Część pojedyncza jest tém większą na im mniej części jedna i ta sama całość podzieloną została, i tak są trzecie części jednej i téj samej całości, np. talara, większe jak piąte części, ułamek więc oznacza tem większe części im mniejszym jego mianownik jest. Wielkość ułamka nie zależy jednak tylko od wielkości części, ale także i od ilości tychże, to jest wielkość ułamka nie zależy tylko od mianownika, ale także i od licznika i każdy ułamek jest tem większym im większy jego licznik a im mniejszy jego mianownik.

49. Porównywając wielkość dwóch ułamków ze sobą, cztery przypadki rozróżnić nam należy.

1. Ułamki dane mają równe liczniki i równe mianowniki, jak ułamki $\frac{2}{5}$ i $\frac{3}{5}$. Ułamki takie są sobie zupełnie równe, gdyż równe ich mianowniki okazują, że części pojedyncze w obydwóch są sobie równe, liczniki zaś równe okazują, że ilość części pojedynczych w obydwóch jest ta sama. Jest więc $\frac{2}{5} = \frac{3}{5}$.

2. Ułamki dane mają równe liczniki a nierówne mianowniki, jak ułamki $\frac{2}{4}$ i $\frac{2}{5}$. Ułamek z mniejszym mianownikiem jest oczywiście większy, gdyż ułamki dane oznaczają wprawdzie dla równych liczników równą ilość części, lecz części ułamka mniejszy mianownik mającego są większe. A zatem $\frac{2}{4} > \frac{2}{5}$.

3. Ułamki dane mają równe mianowniki a nierówne liczniki, jak $\frac{2}{4}$ i $\frac{3}{4}$. Ułamek z większym licznikiem jest większy, gdyż dla równych mianowników są części pojedyncze w obydwóch ułamkach wprawdzie sobie równe, ale ułamek mający większy licznik ma takich części więcej. Będzie więc $\frac{2}{4} < \frac{3}{4}$.

4. Ułamki dane mają nierówne liczniki i nierówne mianowniki. Ułamki takie mogą być sobie równe lub też nie, np. $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, ale $\frac{2}{3}$ nie $= \frac{3}{4}$. Niekiedy jednak, porównując np. ułamki $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{5}$, można zaraz z pewnością oznaczyć, że $\frac{2}{3}$ mniejsze jak $\frac{3}{5}$, lub znakami znacząc, że $\frac{2}{3} < \frac{3}{5}$, gdyż

dla $7 > 6$ są części pojedyncze w $\frac{7}{6}$ mniejsze jak w $\frac{5}{6}$, a oprócz tego dla $3 < 5$ jest części mniejszych mniej jak większych. Jest więc: $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$.

Różne gatunki ułamków.

50. Dzielać kilka całości na równą liczbę części, możemy z całej summy ogólnej tyle wziąć części, że takowe ani jednej całości nie dają, lub też że takowe jedną lub kilka całości dają, lub też nareście, że takowe jedną lub kilka całości i oprócz tego kilka jeszcze części wynoszą.

Ułamek żadnej całości nie dający, który się po tém poznaje, że licznik jego mniejszy jest jak mianownik, nazywa się *ułamkiem właściwym* (echter Bruch) np. $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$.

Ułamek same całości, jedną lub więcej w sobie zawierający, który się po tém poznaje, że mianownik mieści się w liczniku bez reszty, nazywa się *ułamkiem niewłaściwym* (unechter Bruch), np. $\frac{13}{3}$, $\frac{13}{3}$, $\frac{5}{2}$.

Niewłaściwym zowie się także i ten ułamek, który całości i części w sobie zawiera a który się po tem poznaje, że mianownik w liczniku się wprawdzie mieści ale nie schodzi np. $\frac{13}{3}$, $\frac{13}{3}$, $\frac{13}{3}$.

Ułamki właściwe poznają się więc po tém, że licznik ich mniejszy jak mianownik, w ułamku zaś niewłaściwym jest licznik większy jak mianownik.

51. 1. Każdy ułamek jest oznaczeniem dzielenia licznika przez mianownik czyli dzielenia, w którym licznik jest dzielną, a mianownik dzielnikiem. Ztąd wypada 1. że każdy ułamek na przykład dzielenia zamienić można, biorąc mianownik za dzielnik a licznik za dzielną, 2. każdy przykład dzielenia na ułamek zamienić można, czyli że każde dzielenie *za pomocą ułamków* (bruchweise) wykonać można, biorąc dzielną za licznik a dzielnik za mianownik. Mamy więc:

$$\frac{12}{3} = 3 : 12 \text{ albo } \frac{5}{2} = 5 : 2 \text{ i}$$

$$4 : 7 = \frac{4}{7} \text{ albo } 3 : 15 = \frac{1}{5}.$$

2. Wykonywając dzielenie w ułamku niewłaściwym znajdujemy liczbę całości, której tenże ułamek jest równym, np.

$$\frac{45}{5} = 5 : 45 = 9.$$

Każdą całość można też przeciwnie jako ułamek z jakimkolwiek mianownikiem wyrazić, mnożąc całość przez dowolny lub dany mianownik i dzieląc potem otrzymany iloczyn za pomocą ułamków przez tenże mianownik — przez co nie wartość, tylko forma danej całości się zmienia. I tak, mając 5 w formie ułamka wyrazić, otrzymamy:

$$\begin{aligned} \text{dla mianownika } 2, \quad & \frac{2 \times 5}{2} = \frac{10}{2} \\ & 3, \quad \frac{3 \times 5}{3} = \frac{15}{3} \\ & 6, \quad \frac{6 \times 5}{6} = \frac{30}{6} \end{aligned}$$

Przykłady. Wyraż 6 przez liczbę 3ich części, 11 przez liczbę 10tych części, 4 przez liczbę 100nych części, 30 przez liczbę 5tych części, 60 przez liczbę 6tych części, 11 przez liczbę 11tych części, 120 przez liczbę 4tych części, 80 przez liczbę 7ych części, 9 przez liczbę 8ych części, 40 przez liczbę 7ych części.

3. Oznaczając liczbę całości w ułamku niewłaściwym i dodając do nich resztę jako ułamek, otrzymamy liczbę mieszaną t. j. liczbę złożoną z całości i ułamka.

$$\begin{aligned} \frac{7}{3} &= 5 : 3 = 1\frac{4}{3}, \quad \frac{10}{2} = 9\frac{1}{2} \\ \frac{101}{8} &= 12\frac{5}{8}, \quad \frac{13}{4} = 3\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Właściwie jest:

$$\begin{aligned} \frac{7}{3} &= \frac{5}{3} + \frac{2}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1\frac{2}{3} \\ \frac{10}{2} &= \frac{18}{2} + \frac{2}{2} = 9 + \frac{2}{2} = 9\frac{1}{2} \text{ i t. d.} \end{aligned}$$

Często trzeba liczby mieszane zamienić na równe im ułamki niewłaściwe; całość wyraża się naturalnie wtedy przez liczbę takich części, jakie mianownik ułamka danego oznacza i do otrzymanego iloczynu dodaje się licznik danego ułamka. Reguła jest więc następująca: liczba cała mnoży się przez mianownik danego ułamka, do iloczynu dodaje się licznik, summa otrzymana pisze się jako licznik a mianownik ułamka danego podpisuje się jako mianownik; jest więc:

$$\begin{aligned} 5\frac{3}{4} &= \frac{5 \times 4 + 3}{4} = \frac{20 + 3}{4} = \frac{23}{4} \\ 2\frac{3}{5} &= \frac{13}{5}, \quad 1\frac{5}{6} = \frac{11}{6}, \quad 10\frac{2}{3} = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Przykłady. Jakie mieszane liczby powstają z ułamków:

$$\frac{29}{3}, \frac{16}{5}, \frac{81}{10}, \frac{111}{12}, \frac{44}{5}, \frac{66}{7}, \frac{79}{7}, \frac{89}{11}, \frac{100}{6}, \frac{1111}{10}, \frac{11}{11}, \frac{11}{11}, \frac{55}{9}?$$

Jakie niewłaściwe ułamki powstają z $2\frac{3}{4}$, $8\frac{1}{5}$, $11\frac{2}{3}$, $18\frac{4}{5}$,

$$100\frac{1}{2}, 16\frac{4}{5}, 20\frac{1}{7}, 8\frac{6}{9}, 110\frac{4}{5}, 88\frac{1}{10}, 6\frac{2}{7}, 11\frac{1}{11}?$$

Zmniejszanie czyli zniżanie i sprowadzanie ułamków do jednego mianownika.

52. Już z przykładów $\frac{9}{8} > \frac{7}{8} < \frac{8}{8}$ w §. 49 podanych

wypada w ogóle, że każdy ułamek się powiększa 1., kiedy jego licznik się zwiększa a mianownik się nie zmienia, 2. kiedy jego mianownik się zmniejsza a licznik się nie zmienia, — dalej, że każdy ułamek na dwojaki sposób się zmniejsza, 1. jeżeli przy tym samym mianowniku licznik się zmniejsza, i 2. jeżeli przy tym samym liczniku mianownik się zwiększa. Scisłej tak to wyrazić możemy:

1. Mnożąc w ułamku licznik przez jakąkolwiek całą liczbę, mnożymy cały ułamek, — gdyż, jeżeli mianownik się nie zmienia, pojedyncze części zachowują swą wielkość, przez mnożenie zaś licznika otrzymamy tyle razy więcej części, ile cała liczba ma w sobie jedności, dla tego też cały ułamek tyle razy większym się stał.

Mnożąc w ułamku mianownik przez jakąkolwiek całą liczbę, dzielimy cały ułamek, — gdyż, jeżeli licznik się nie zmienia, mnogość części zostaje ta sama, ile razy zaś mianownik przez mnożenie się zwiększa, tyle razy każda pojedyncza część, a zatem też summa wszystkich części t. j. cały ułamek się zmniejsza.

Ztąd wypada:

Mnożąc w ułamku licznik i mianownik tą samą liczbą, wartość ułamka wcale się nie zmienia, chociaż ułamek przez większe liczby wyrażonym zostanie, — ile razy bowiem więcej części nowy ułamek wyraża, tyle razy też każda część jest mniejszą; jest więc:

$$\frac{3 \times 8}{9} = 3 \times \frac{8}{9}$$

$$\frac{8}{8} = 3 : \frac{8}{9}$$

$$\frac{3 \times 9}{3 \times 8} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{3 \times 8}{3 \times 9} = \frac{8}{9}$$

2. Dzieląc w ułamku licznik przez jakąkolwiek całą liczbę, dzielimy cały ułamek, — gdyż jeżeli mianownik się nie zmienia, części pojedyncze także się nie zmieniają, lecz dzieląc licznik otrzymamy tyle razy mniej części, ile liczba całkowita ma w sobie jedności, dla czego też ułamek tyle razy mniejszym się stał.

Dzieląc w ułamku mianownik przez jakąkolwiek liczbę całkowitą, mnożymy cały ułamek, — gdyż nie zmieniając licznika, nie zmieniamy także mnogości pojedynczych części; lecz ile razy mianownik przez dzielenie się zmniejsza,

tyle razy t ż każda pojedyncza cz eść, a zatém t ż summa wszystkich t. j. cały ułamek si  zwiększa.

Ztąd wypada:

Dzieląc w ułamku licznik i mianownik t  samą liczb , wartość ułamka się nie zmienia, chociaż ułamek przez mniejsze liczby wyrażonym zostanie, ile razy bowiem mniej cz eści nowy ułamek wyraża, tyle razy t ż każda cz eść jest większą; jest więc:

$$\frac{2 : 8}{10} = 2 : 10$$

$$\frac{8}{2 : 10} = 2 \times 10$$

$$\frac{2 : 8}{2 : 10} = 10$$

3. Mając jakikolwiek ułamek w większych lub mniejszych liczbach bez zmienienia jego wartości wyrazić, na dwójaki sposób to uskutecznić możemy, albo mnoc albo dzieląc obydw  wyrazy danego ułamka jedną i t  samą liczb ; jest więc:

$$\frac{150}{75} = \frac{30}{15} = \frac{6}{3} \text{ albo tak: } \frac{150}{75} \left| \frac{30}{15} \right| \frac{5}{15} \left| \frac{3}{3} \right|$$

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{12}{24} = \frac{90}{120} = \frac{360}{480} \text{ i t. d.}$$

$$\text{albo téz: } \frac{3}{4} \left| \frac{2}{8} \right| \frac{3}{12} \left| \frac{5}{20} \right| \frac{4}{16} \left| \frac{360}{480} \right|$$

Ułamek jaki w mniejszych liczbach bez zmienienia jego wartości wyrazić znaczy ułamek ten zmniejszyc lub zniyc, ułamek za jaki w większych liczbach bez zmienienia jego wartości wyrazić znaczy ułamek dany zwi kszyc. Pierwsze uskuteczniamy przez dzielenie, drugie przez mnożenie obydwóch wyrazów ułamka danego przez jedną i t  samą liczb .

Uwaga. Zamiast ułamek „zniyc“ mówi się zwykle „zmniejszyc“, chociaż wyrażenie to nie jest wlaściwym, gdyż wartość ułamka się nie zmniejsza. Również nie zupełnie odpowiedni m jest wyrażenie „ułamek zwi kszyc.“

53. Zniżanie ułamków dla tego tak jest ważnym, że z mniejszemi liczbami nie tylko łatwiéj i prędziej rachować, ale że i błędów wszelkich łatwiéj unikn c możemy. Jeżeli więc jaki ułamek przez kilka liczb zniyc sje daje, bierzemy dla tego zwykle największe, aby wyrazy nowego ułamka przez jak najmniejsze liczby wyrazić można.

Liczb  jaką mierzyc znaczy dowiedzieć się, ile razy jedna liczba w drugiej się mieści. Gdy więc takim sposobem dzielnik jest miarą dzielnéj, nazywamy t ż przy zniżaniu

ułamków liczbę, przez którą licznik i mianownik dzielimy miarą licznika i mianownika. Jak znajduje się więc *największa wspólna* miara licznika i mianownika albo w ogóle dwóch liczb danych? Liczba większa dzieli się przez mniejszą; jeżeli mniejsza w większej bez reszty się mieści, wtedy mniejsza liczba jest największą wspólną miarą obydwóch; jeżeli zaś dzielenie nie schodzi, wtedy bierze się reszta za dzielnik, przeszły dzielnik za dzielną i dzieli się znowu. — tak długo aż znów reszta jaka niepozostanie, przez którą przeszły dzielnik się dzieli, aż nakoniec dzielenie zupełnie zejdzie albo jedno jako ostatnia reszta zostanie. W pierwszym razie jest ostatni dzielnik największą wspólną miarą dla danych liczb, w drugim zaś ułamek w mniejszych liczbach wyrazić się nie da, np.

Dla $\frac{756}{2260}$ mamy:

$$\begin{array}{r} 756 : 2260 = 2 \\ \underline{1512} \\ 748 : 756 = 1 \\ \underline{748} \\ 8 : 748 = 93 \\ \underline{28} \\ 4 : 8 = 2 \end{array}$$

a zatem $\frac{756}{2260} = \frac{189}{565}$

Dla $\frac{851}{744}$ mamy:

$$\begin{array}{r} 744 : 851 = 1 \\ \underline{744} \\ 107 : 744 = 6 \\ \underline{642} \\ 102 : 107 = 1 \\ \underline{102} \\ 5 : 102 = 20 \\ \underline{100} \\ 2 : 5 = 2 \\ \underline{1} \end{array}$$

a zatem $\frac{851}{744}$ zniżyć się nie da.

✗ Liczby żadnej wspólnej miary nie mające, nazywają się *niedzialki względne* (Primzahlen unter sich, relative Primzahlen) np. 15 i 22; liczba zaś każda nie dająca się dzielić tylko przez siebie samą lub jedność nazywa się *niedzielną* albo *niedzialkiem* (Primzahl an sich, absolute Primzahl), np. 11, 13. — Liczby mające 2 za miarę zowią się *parzyste*, wszystkie zaś inne *nieparzyste*.

✗ Z reguł służących do szybkiego zniżania ułamków uważamy sobie następujące: każda liczba da się bez reszty podzielić: przez 2, jeżeli w miejscu jedności liczba parzysta

lub zero stoi, np. 394 albo 390, — przez 3, jeżeli summa cyfer liczby danej da się przez 3 podzielić, np. 3081, — przez 4, jeżeli ostatnie dwie liczby z prawej strony przez 4 dzielić się dają, lub jeżeli są zerami, np.: 14024, 18440, 5800, — przez 5, jeżeli w miejscu jedności 5 albo zero stoi, np. 2115 albo 2110, — przez 6, jeżeli liczba dana przez 2 i 3 jest podzielna, np. 6012, — przez 8, jeżeli trzy ostatnie liczby są liczbą przez 8 podzielna lub też zerami, np. 463848, 146400, 12000, przez 9, — jeżeli summa poprzeczna cyfer liczby danej jest liczbą przez 9 podzielna, np. 114642, — przez 10, jeżeli na końcu jedno zero stoi, przez 100, jeżeli dwa zera, przez 1000 jeżeli 3 zera na końcu stoją etc., — przez 12, jeżeli jest przez 3 i 4 podzielna, np. 714384, — przez 18, jeżeli jest przez 2 i 9 podzielna, np. 468162, — przez 36 nakoniec, jeżeli przez 4 i 9 dzielić się da, np. 6287436.

54. Zwiększanie ułamków. t. j. równoczesne mnożenie licznika i mianownika jedną i tą samą liczbą jest dla tego tak ważne, że od tego sprowadzanie ułamków do jednego mianownika zależy, ułamki zaś wtedy tylko dodawać i odciągać można, jeżeli są równoimienne.

Równoimienne ułamki są te, które mają równy mianownik, np. $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{10}$, różnoimienne zaś te, które mają różne mianowniki, jak np. $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{11}$. Jeżeli ułamki różnomianowne do jednego sprowadzimy mianownika, wtedy tenże nazywa się *mianownikiem ogólnym* (Generalnenner). — Przy sprowadzaniu ułamków do jednego mianownika uważać będziemy najpierw dwa, a potem dopiero więcej ułamków.

I. W dwóch ułamkach mogą być mianowniki takie, że żadnej wspólnej miary nie mają, np. w $\frac{3}{8}$ i $\frac{5}{6}$, albo mianownik jeden jest miarą drugiego, jak w $\frac{1}{18}$ i $\frac{5}{6}$, gdzie 6 jest miarą 18, albo nakoniec oba mianowniki mają wspólną miarę, jak w $\frac{3}{8}$ i $\frac{1}{12}$, gdzie 8 i 12 za miarę 4 mają.

1. W pierwszym razie mając ułamki $\frac{3}{8}$ i $\frac{5}{6}$ mnożymy licznik i mianownik każdego ułamka przez mianownik drugiego, przez co wartość danych ułamków podług (52) się nie zmienia, a jednak oba ułamki jeden mianownik, t. j. iloczyn z danych mianowników otrzymają. Zamienia się więc:

$$\frac{3}{8} \text{ na } \frac{2 \times 7}{3 \times 7} = \frac{1}{2}, \text{ a}$$

$$\frac{5}{6} \text{ na } \frac{3 \times 5}{3 \times 7} = \frac{1}{2}.$$

2. W drugim razie mając ułamki $\frac{7}{8}$ i $\frac{5}{6}$, nie zmieniamy wcale ułamka większy mianownik mającego; dzieląc tylko większy mianownik przez mniejszy, szukamy ile razy tamten większy jest jak mianownik mniejszy i mnożymy przez wypadły iloraz licznik i mianownik ułamka mniejszy mianownik mającego (52), ażatém:

$\frac{7}{8}$ zostanie niezmienioném, a że $6:18=3$, $\frac{5}{6}$ zamieni się

$$\text{na } \frac{3 \times 5}{3 \times 6} = \frac{5}{2}.$$

3. W ostatnim razie nakoniec mając ułamki $\frac{5}{8}$ i $\frac{7}{12}$ szukamy wspólnej miary dla obydwóch mianowników, dzielimy przez nią każdy mianownik, a iloczyn z obydwóch ilorazów, i wspólnej miary daje nam mianownik ogólny. Aby zaś i liczniki znaleźć podług (52), dzielimy przez każdy dany mianownik ogólny mianownik i mnożymy przez znalezione ilorazy dany licznik, ażatém:

dla ułamków $\frac{5}{8}$ i $\frac{7}{12}$ mamy 4) $\frac{8, 12}{2, 3}$ a $2 \times 3 \times 4 = 24$, a że

$$8:24=3 \text{ i } 3 \times 5=15$$

$12:24=2 \text{ i } 2 \times 7=14$, otrzymamy więc z $\frac{5}{8}$ i $\frac{7}{12}$ równomianowne ułamki $\frac{15}{24}$ i $\frac{14}{24}$.

We wszystkich trzech razach moglibyśmy byli wprowadzić podług reguły w pierwszym przypadku użytej sobie postać, ułamki jednak nowe byłyby w drugim i trzecim razie niepotrzebnie przez wielkie liczby wyrażone i dopiero przez niższenie tychże ułamków znalazłyby się ułamki z najmniejszym wspólnym mianownikiem, np.

$$\begin{array}{l} \frac{7}{8} \text{ i } \frac{5}{6} \text{ dają } \frac{142}{108} \text{ i } \frac{90}{108}, \text{ ale } \frac{142}{108} \left| \begin{array}{l} 6 \\ 7 \\ 18 \end{array} \right. \\ \phantom{\frac{7}{8} \text{ i } \frac{5}{6} \text{ dają }} \phantom{\frac{142}{108} \text{ i } \frac{90}{108}, \text{ ale }} \phantom{\frac{142}{108}} \left| \begin{array}{l} 6 \\ 15 \\ 18 \end{array} \right. \\ \frac{5}{6} \text{ i } \frac{7}{12} \text{ dają } \frac{60}{96} \text{ i } \frac{56}{96}, \text{ ale } \frac{60}{96} \left| \begin{array}{l} 4 \\ 15 \\ 24 \end{array} \right. \\ \phantom{\frac{5}{6} \text{ i } \frac{7}{12} \text{ dają }} \phantom{\frac{60}{96} \text{ i } \frac{56}{96}, \text{ ale }} \phantom{\frac{60}{96}} \left| \begin{array}{l} 4 \\ 56 \\ 24 \end{array} \right. \end{array}$$

Przykłady. Zamień na równomianowne następujące ułamki:

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{12}, \frac{3}{4}, -\frac{7}{12}, \frac{5}{8}, -\frac{7}{8}, \frac{3}{11}, -\frac{7}{8}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}, \frac{3}{4}, -\frac{9}{10}, \frac{5}{6}, -\frac{11}{12}, \frac{5}{6}, -\frac{7}{15}, \frac{3}{4}, -\frac{17}{10}, \frac{3}{10}, -\frac{3}{11}, \frac{3}{8}, -\frac{1}{4}, \frac{5}{11}.$$

II. Jeżeli więcej jak dwa ułamki mamy, wtedy albo wszystkie mianowniki wspólnej miary nie mają, jak np. w ułamkach $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{5}{11}$; albo jeden z mianowników ma za miary pozostałe mianowniki, jak np. w ułamkach $\frac{3}{8}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{5}{11}$, gdzie 8, 4, 2 miarami są liczby 16; albo dwa lub więcej mianowników mają

za miary pozostałe mianowniki, jak np. w ułamkach $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{11}$, gdzie 4 miarą jest 8, a 3 miarą 9; albo z danych mianowników mają tylko niektóre wspólne miary, jak np. w ułamkach $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{11}$, gdzie 6 i 8 mają za miarę 2, 3 i 15 mają za miarę 3, 5 i 15 mają za miarę 5, 7 zaś i 19 ze żadnym z danych mianowników wspólnej miary nie mają.

1. Mając ułamki $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{5}{11}$ bierzemy iloczyn wszystkich mianowników za ogólny mianownik. Że zaś każdy z danych mianowników przez pozostałe mianowniki mnożyliśmy, musimy też więc, żeby wartość danych ułamków się nie zmieniła, licznik każdego ułamka przez pozostałe mianowniki mnożyć.

$$Z \frac{2}{3} \text{ otrzymamy } \frac{2 \times 5 \times 7 \times 11}{3 \times 5 \times 7 \times 11} = \frac{770}{1155}$$

$$Z \frac{3}{5} \text{ otrzymamy } \frac{4 \times 3 \times 7 \times 11}{5 \times 3 \times 7 \times 11} = \frac{84}{1155}$$

$$Z \frac{4}{7} \text{ otrzymamy } \frac{1 \times 3 \times 5 \times 11}{7 \times 3 \times 5 \times 11} = \frac{165}{1155}$$

$$Z \frac{5}{11} \text{ otrzymamy } \frac{4 \times 3 \times 5 \times 7}{11 \times 3 \times 5 \times 7} = \frac{420}{1155}$$

2. Mając ułamki $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$ bierzemy największy mianownik jako mianownik ogólny, dzielimy go przez każdy z danych mianowników, przez co znajdziemy liczbę, przez którą każdy z mianowników mnożyć trzeba, ażeby mianownikowi ogólnemu stał się równym; pomnożywszy potem przez otrzymane iloraz każdy z przynależnych liczników, otrzymamy ułamki, które danym są równe (52).

$\frac{1}{6}$ nie zmieniamy wcale,

$$z \frac{1}{2} \text{ będzie } \frac{3}{6}, \text{ gdyż } 2 : 6 = 3 \text{ a } 8 \times 1 = 8$$

$$z \frac{2}{3} \text{ będzie } \frac{4}{6}, \text{ gdyż } 3 : 6 = 2 \text{ a } 4 \times 3 = 12$$

$$z \frac{1}{8} \text{ będzie } \frac{1}{6}, \text{ gdyż } 8 : 6 = \frac{4}{3} \text{ a } 2 \times 7 = 14$$

3. Mając ułamki $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ dostaniemy mianownik ogólny biorąc iloczyn z największych mianowników, które za miary pozostałe mianowniki mają, tu więc $8 \times 9 = 72$. Nowe liczniki znajdziemy podług reguły w (2) danej.

$$\text{Gdy } 9 : 72 = 8 \text{ będzie } \frac{1}{3} = \frac{8}{72}$$

$$\text{gdy } 3 : 72 = 24 \text{ będzie } \frac{1}{5} = \frac{3}{72}$$

$$\text{gdy } 8 : 72 = 9 \text{ będzie } \frac{2}{3} = \frac{16}{72}$$

$$\text{gdy } 4 : 72 = 18 \text{ będzie } \frac{3}{8} = \frac{27}{72}$$

4. Mając ułamki $\frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{3}{15}, \frac{1}{7}, \frac{2}{8}, \frac{1}{9}$ sprowadzić do jednego mianownika, na wszystkie wyżej dane reguły zwać musimy. Mianowniki takie, które miarami są innych mianowników opuszczamy, np. 4 dla 8, 3 dla 9, 5 dla 15; pozostają więc jeszcze:

$$6, 15, 7, 8, 9.$$

Liczby 6, 9 i 15 mają za wspólną miarę 3, przez 3 dzielić więc dane liczby nie zmieniając wcale innych mianowników; jest więc:

$$\frac{6, 15, 7, 8, 9}{3) 2, 5, 7, 8, 3.}$$

Tutaj mają 2 i 8 za miarę 2, otrzymamy zatem:

$$\begin{array}{r} 6, 15, 7, 8, 9 \\ 3) 2, 5, 7, 8, 3 \\ 2) 1, 5, 7, 4, 3 \end{array} \quad \text{albo też tak:} \quad \begin{array}{r} 6 \quad \overset{3}{\overline{2}} \quad \overset{2}{\overline{1}} \\ 15 \quad \overline{5} \quad \overline{5} \\ 7 \quad \overline{7} \quad \overline{7} \\ 8 \quad \overline{8} \quad \overline{4} \\ 9 \quad \overline{3} \quad \overline{3} \end{array}$$

albo wypisując wszystkie mianowniki:

$$\begin{array}{r} 4, 6, 3, 5, 15, 7, 8, 9 \\ 4) 1, 6, 3, 5, 15, 7, 2, 9 \\ 3) 1, 2, 1, 5, 5, 7, 2, 3 \\ 5) 1, 2, 1, 1, 1, 7, 2, 3 \\ 2) 1, 1, 1, 1, 1, 7, 1, 3 \end{array} \quad \text{albo} \quad \begin{array}{r} 4 \quad \overset{4}{\overline{4}} \quad \overset{3}{\overline{3}} \quad \overset{5}{\overline{5}} \quad \overset{2}{\overline{2}} \\ 6 \quad \overline{6} \quad \overline{2} \quad \overline{2} \\ 3 \quad \overline{3} \quad \overline{---} \quad \overline{---} \\ 5 \quad \overline{5} \quad \overline{5} \quad \overline{---} \\ 15 \quad \overline{15} \quad \overline{5} \quad \overline{---} \\ 7 \quad \overline{7} \quad \overline{7} \quad \overline{7} \\ 8 \quad \overline{2} \quad \overline{2} \quad \overline{2} \\ 9 \quad \overline{9} \quad \overline{3} \quad \overline{3} \end{array}$$

Poczyn z ostatnich ilorazów i miar bierzemy za ogólny mianownik. Wypadek jeden i ten sam otrzymamy, czy na pierwszy krótszy lub też drugi dłuższy sposób rachujemy, gdyż

$$5 \times 7 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2 = 2520 \text{ tak jak}$$

$$7 \times 3 \times 4 \times 3 \times 5 \times 2 = 2520.$$

Liczniki nowe znajdziemy podług reguły w (52) danej, a zatem:

$$4 : 2520 = 630 \text{ zamienia } \frac{3}{4} \text{ na ułamek } \frac{3 \times 630}{4 \times 630} = \frac{1890}{2520}$$

$$6 : 2520 = 420 \text{ zamienia } \frac{5}{6} \text{ na ułamek } \frac{5 \times 420}{4 \times 420} = \frac{2100}{2520}$$

$$3 : 2520 = 840 \text{ zamienia } \frac{2}{3} \text{ na ułamek } \frac{2 \times 840}{3 \times 840} = \frac{1680}{2520}$$

$$5 : 2520 = 504 \text{ zamienia } \frac{1}{5} \text{ na ułamek } \frac{4 \times 504}{5 \times 504} = \frac{2016}{2520}$$

$$15 : 2520 = 168 \text{ zamienia } \frac{1}{15} \text{ na ułamek } \frac{3 \times 168}{15 \times 168} = \frac{504}{2520}$$

$$7 : 2520 = 360 \text{ zamienia } \frac{1}{7} \text{ na ułamek } \frac{1 \times 360}{7 \times 360} = \frac{360}{2520}$$

$$8 : 2520 = 315 \text{ zamienia } \frac{1}{8} \text{ na ułamek } \frac{3 \times 315}{8 \times 315} = \frac{945}{2520}$$

$$9 : 2520 = 280 \text{ zamienia } \frac{1}{9} \text{ na ułamek } \frac{7 \times 280}{9 \times 280} = \frac{1960}{2520}$$

Wszystkie te reguły, za pomocą których dwa lub więcej ułamków do jednego sprowadzamy mianownika, dadzą się pod dwie główne reguły podciągnąć: albo mianowniki nie mają wspólnej miary, albo też mają takową, w którym ostatnim razie wszystko jedno jest, czy tylko niektóre lub też wszystkie wspólną miarę mają. W pierwszym razie bierzemy iloczyn ze wszystkich mianowników za mianownik ogólny; w drugim zaś szukamy wspólnych miar, dzielimy przez takowe po kolei wszystkie mianowniki tak długo, aż między ilorazami żadne liczby wspólne miary mające się nie znajdują a iloczyn z ostatnich ilorazów i miar bierzemy za mianownik ogólny. Liczniki przynależne znajdziemy dzieląc najpierw każdym danym mianownikiem w znaleziony ogólny mianownik i otrzymanym ilorazem mnożąc przynależny dany licznik.

Przykłady. Zamień na równomianowne następujące ułamki: $\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{7}, \frac{4}{14}, \frac{5}{10}, \frac{6}{15}, \frac{7}{21}, \frac{8}{28}, \frac{9}{36}, \frac{10}{45}, \frac{11}{55}, \frac{12}{66}, \frac{13}{78}, \frac{14}{91}, \frac{15}{105}, \frac{16}{120}, \frac{17}{136}, \frac{18}{153}, \frac{19}{190}, \frac{20}{225}, \frac{21}{252}, \frac{22}{286}, \frac{23}{322}, \frac{24}{396}, \frac{25}{475}, \frac{26}{546}, \frac{27}{639}, \frac{28}{728}, \frac{29}{871}, \frac{30}{1020}, \frac{31}{1161}, \frac{32}{1344}, \frac{33}{1584}, \frac{34}{1870}, \frac{35}{2163}, \frac{36}{2520}, \frac{37}{2916}, \frac{38}{3438}, \frac{39}{4030}, \frac{40}{4752}, \frac{41}{5580}, \frac{42}{6510}, \frac{43}{7644}, \frac{44}{8988}, \frac{45}{10650}, \frac{46}{12564}, \frac{47}{14751}, \frac{48}{17240}, \frac{49}{20052}, \frac{50}{23180}, \frac{51}{27636}, \frac{52}{32520}, \frac{53}{38864}, \frac{54}{45696}, \frac{55}{53550}, \frac{56}{62520}, \frac{57}{73710}, \frac{58}{87240}, \frac{59}{103860}, \frac{60}{123600}, \frac{61}{146820}, \frac{62}{173640}, \frac{63}{204480}, \frac{64}{239520}, \frac{65}{279000}, \frac{66}{332880}, \frac{67}{392100}, \frac{68}{460440}, \frac{69}{535800}, \frac{70}{627000}, \frac{71}{735840}, \frac{72}{868800}, \frac{73}{1027100}, \frac{74}{1206000}, \frac{75}{1416000}, \frac{76}{1658400}, \frac{77}{1936800}, \frac{78}{2248200}, \frac{79}{2652000}, \frac{80}{3156000}, \frac{81}{3768000}, \frac{82}{4404000}, \frac{83}{5196000}, \frac{84}{6048000}, \frac{85}{7000000}, \frac{86}{8072000}, \frac{87}{9270000}, \frac{88}{10656000}, \frac{89}{12288000}, \frac{90}{14160000}, \frac{91}{16356000}, \frac{92}{18768000}, \frac{93}{21444000}, \frac{94}{24408000}, \frac{95}{27636000}, \frac{96}{31104000}, \frac{97}{34848000}, \frac{98}{38892000}, \frac{99}{43272000}, \frac{100}{47520000}$

Dodawanie.

55. I. Tak jak tylko równoimienne jedności liczb bezwzględnych całkowitych i jak tylko równoimienne gatunki liczb imiennych do siebie dodawać możemy, tak też podobnie tylko równoimienne ułamki do siebie dodawać, t. j. równe tylko części w jedną sumę ściągnąć można. Jasném jest, że $\frac{3}{7}$ i $\frac{2}{7}$ razem $\frac{5}{7}$ dają, jako też że $\frac{3}{8}$ i $\frac{2}{8}$ razem $\frac{5}{8}$ wynoszą, ale równie też jasném jest, że $\frac{3}{7}$ i $\frac{2}{8}$ ani $\frac{3}{8}$ ani $\frac{2}{7}$ dać nie mogą. Dodając równoimienne czyli równomianowne ułamki do siebie szukamy summy równych części, dodajemy więc

tylko liczniki, a pod summą podpisujemy wspólny mianownik: jest więc:

$$\frac{9}{17} + \frac{2}{17} + \frac{3}{17} + \frac{11}{17} = \frac{9+2+3+11}{17} = \frac{25}{17} = 1\frac{8}{17}.$$

II. Ponieważ różnomianowne ułamki na równomianowne zamienić możemy, łatwo więc jest różnomianowne ułamki do siebie dodać, skoro je tylko podług reguł w §. 54. wyłożonych do jednego sprowadzimy mianownika. Otrzymamy zatem:

$$1) \frac{5}{18} + \frac{2}{3} = \frac{5}{18} + \frac{12}{18} = \frac{17}{18} = \frac{1}{1} + \frac{1}{18}$$

$$\text{albo też } \frac{5}{18} + \frac{2}{3} = \frac{5+9}{18} = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$$

$$2) \frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{5}{7} = \frac{3 \times 21 + 2 \times 35 + 5 \times 15}{5 \times 3 \times 7} = \frac{63 + 70 + 75}{105}$$

$$= \frac{208}{105} = 1\frac{103}{105}$$

$$3) \frac{5}{9} + \frac{1}{6} + \frac{7}{8} + \frac{2}{3} = \frac{5 \times 8 + 1 \times 12 + 7 \times 9 + 2 \times 24}{72}$$

$$\frac{9, 6, 8}{3, 2, 8} = \frac{40 + 12 + 63 + 48}{72}$$

$$2) \frac{3, 1, 4}{3, 1, 4}$$

$$= \frac{163}{72} = 2\frac{19}{72}.$$

Przykłady poprzednie wygodniej tak obrachować możemy.

Dla ułamków $\frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{5}{7}$ mamy $5 \times 3 \times 7 = 105$,

$$\begin{array}{l|l} \frac{3}{5} & 5 : 105 = 21 \text{ a } 21 \times 3 = 63 \\ \frac{2}{3} & 3 : 105 = 35 \text{ a } 35 \times 2 = 70 \\ \frac{5}{7} & 7 : 105 = 15 \text{ a } 15 \times 5 = 75 \end{array}$$

albo też jeszcze krócej: $\frac{208}{105} = 1\frac{103}{105}$

$$\begin{array}{l|l} \frac{3}{5} & 21 \times 3 = 63 \\ \frac{2}{3} & 35 \times 2 = 70 \\ \frac{5}{7} & 15 \times 5 = 75 \end{array}$$

a zatem jest $\frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{5}{7} = 1\frac{103}{105}$.

Dla ułamków $\frac{5}{9} + \frac{1}{6} + \frac{7}{8} + \frac{2}{3}$ mamy:

$$\begin{array}{l|l|l} 9 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & - \\ 8 & 8 & 4 \\ 3 & - & - \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Jest zaś} \\ 3 \times 2 \times 3 \times 4 = 72 \\ \text{mamy więc} \end{array} \quad \begin{array}{l|l} \frac{5}{9} & 8 \times 5 = 40 \\ \frac{1}{6} & 12 \times 1 = 12 \\ \frac{7}{8} & 9 \times 7 = 63 \\ \frac{2}{3} & 24 \times 2 = 48 \end{array}$$

a zatem $\frac{5}{9} + \frac{1}{6} + \frac{7}{8} + \frac{2}{3} = 2\frac{19}{72} = 2\frac{19}{72}$

III. Mając mieszane liczby albo mieszane liczby i ułamki do dodawania, wtedy zamieniamy wszystkie ułamki na równomianowne, dodajemy je do siebie i całości z nich wypadłe dodajemy na koniec do danych całości.

Mając $8\frac{2}{3} + 4\frac{5}{6} + 5\frac{5}{6} + 2\frac{1}{4}$ piszemy:

$$\begin{array}{r}
 3 \overline{) 8} \quad 2 \overline{) 5} \\
 6 \quad 2 \quad \overline{) 4} \\
 9 \quad 3 \quad 3 \\
 4 \quad 4 \quad 2
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \text{jest zaś} \\
 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 36 \\
 \text{azatem}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 8\frac{2}{3} \overline{) 12} \times 2 = 24 \\
 4\frac{5}{6} \overline{) 6} \times 5 = 30 \\
 5\frac{5}{6} \overline{) 4} \times 5 = 20 \\
 2\frac{1}{4} \overline{) 9} \times 3 = 27 \\
 \hline
 2 \\
 \hline
 21\frac{2}{3}
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 101 \\
 \hline
 36 = 2\frac{29}{36}
 \end{array}$$

56. Trudnym wcale nie jest zastosowanie powyższych reguł dodawania przy rachowaniu liczbami wiązanymi ułamkowymi, jeżeli liczby ułamkowe tylko w najniższych gatunkach zachodzą. I tak jest:

$$\begin{array}{r}
 14 \text{ tal. } 18 \text{ śr. } 6\frac{2}{3} \text{ fen.} \\
 100 \cdot 20 \cdot 4\frac{3}{4} \cdot \\
 94 \cdot 16 \cdot 8\frac{7}{8} \cdot \\
 44 \cdot \text{---} \cdot 1\frac{3}{4} \cdot \\
 \text{---} \cdot 29 \cdot 7\frac{1}{2} \cdot \\
 \hline
 2 \quad 2 \quad 3
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \overline{) 24} \\
 8 \times 2 = 16 \quad 2) 6, 8 \\
 4 \times 5 = 20 \quad 3, 4, \text{ a } 2 \times 3 \times 4 = 24 \\
 3 \times 7 = 21 \\
 6 \times 3 = 18 \\
 12 \times 1 = 12 \\
 \hline
 57 = 31\frac{5}{4} = 3\frac{5}{8}
 \end{array}$$

Przykłady. Jaka summa wypadnie z obrachowania następujących przykładów? — $\frac{5}{7} + \frac{3}{3} + \frac{4}{9} + \frac{1}{12}$ fen., — $\frac{1}{13} + \frac{2}{8} + \frac{4}{7} + \frac{1}{12}$ funt., — $7\frac{1}{4} + 9\frac{5}{8} + 6\frac{2}{10} + 3\frac{1}{2}$ tal., — $66\frac{2}{3} + 18\frac{5}{6} + 11\frac{1}{2} + 8\frac{3}{8} + 1\frac{3}{4}$ Kop., — $9\frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{7}{5} + 8\frac{5}{8} + \frac{2}{3}$ łótów, — $11\frac{1}{6} + 8 + \frac{1}{12} + 6\frac{2}{3} + 4\frac{5}{8}$ śreb., — 16 tal. 5 śr. $4\frac{3}{8}$ fen. + 8 tal. 29 śr. $5\frac{1}{4}$ fen., + 26 śr. $4\frac{5}{8}$ fen. + 33 tal. 8 śr. $9\frac{7}{12}$ fen., — 10 cent. 7 funt. $8\frac{1}{2}$ łóta + 111 cent. 88 funt. $4\frac{5}{8}$ łóta + 13 cent. 79 funt. + $3\frac{1}{4}$ łóta, — 15 małderzy 10 szefli $10\frac{5}{8}$ macki + 112 małderzy 8 szefli $15\frac{1}{4}$ macki + 9 małderzy 11 szefli $7\frac{7}{8}$ macki + 42 małderze 7 szefli $4\frac{1}{2}$ macki.

Odciąganie.

57. I. Tak jak przy dodawaniu, tak też i przy odciąganiu ułamki równomianowne być muszą, bo oczywiście różne tylko części od siebie odciągać możemy. Odciąga się zaś licznik odjemnej od licznika ujemnej i pod resztą podpisuje się wspólny mianownik; jest więc:

$$\frac{1}{3} - \frac{7}{5} = \frac{12 - 7}{25} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}.$$

II. Jeżeli ujemna i odjemna różnomianownymi ułamkami

są, zamieniamy wtedy takowe na ułamki równomianowne i odciągamy podług przepisu w (I.) danego; mamy zatem:

$$1) \frac{5}{9} - \frac{4}{11} = \frac{5 \times 11}{9 \times 11} - \frac{4 \times 9}{11 \times 9} = \frac{5 \cdot 11 - 4 \cdot 9}{11 \cdot 9} = \frac{55 - 36}{99} = \frac{19}{99}$$

krócej:

$$\frac{5}{9} - \frac{4}{11} = \frac{55 - 36}{99} = \frac{19}{99} \text{ albo } \frac{19}{99} \left| \begin{array}{l} 99 \\ \frac{11}{12} \end{array} \right. \begin{array}{l} 11 \times 5 = 55 \\ 9 \times 4 = 36 \\ \hline 19 \end{array}$$

$$2) \frac{11}{12} - \frac{3}{4} = \frac{11 - 9}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \text{ albo } \frac{1}{6} \left| \begin{array}{l} 1 \times 11 = 11 \\ 3 \times 3 = 9 \\ \hline 2 \end{array} \right. \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Wypada ztąd zarazem, jak się wartość dwóch ułamków, co się tyczy ich wielkości, oznacza. Dane ułamki sprowadzają się do jednego mianownika, a ułamek z większym licznikiem jest większy; o ile zaś jest większym, dowiemy się przez odciąganie. I tak mamy zamiast $\frac{5}{9}$ i $\frac{3}{4}$:

$$\frac{6 \times 25}{7 \times 25} \text{ i } \frac{22 \times 7}{25 \times 7}$$

$$\text{t. j. } \frac{150}{175} \text{ i } \frac{154}{175}$$

jest więc $\frac{154}{175} > \frac{150}{175}$.

III. Rachując liczbami mieszanymi, sprowadzamy najpierw, nie zważając na całości, dane ułamki do jednego mianownika. Jeżeli zaś przypadkiem licznik ujemnej większym jest jak licznik ujemnej, wtedy pożyczamy sobie od całości ujemnej jedną jednostkę, a zamieniwszy ją na ułamek z mianownikiem ogólnym i dodawszy do licznika ujemnej, rachujemy podług reguł znanych.

$$1) 8\frac{4}{5} - 4\frac{1}{5} = 8\frac{4}{5} - 4\frac{1}{5} = 4\frac{3}{5} \text{ albo } 8\frac{4}{5} \left| \begin{array}{l} 15 \\ 3 \times 4 = 12 \\ 4\frac{1}{5} \end{array} \right. \begin{array}{l} 1 \times 11 = 11 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$2) 7\frac{3}{8} - 5\frac{1}{8} = 7\frac{30}{80} - 5\frac{10}{80} = 1\frac{20}{80} \text{ albo } 7\frac{3}{8} \left| \begin{array}{l} 104 \\ 13 \times 3 = 39 \\ 5\frac{1}{8} \end{array} \right. \begin{array}{l} 8 \times 12 = 96 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$3) 16 - 5\frac{4}{8} = 15\frac{8}{8} - 5\frac{4}{8} = 10\frac{4}{8}$$

58. Łatwem też jest odciąganie liczb wiązanych ułamkowych, jeżeli tylko najniższe gatunki w ułamkach są dane, jak następujący przykład okaże. Mamy od 456 cent. 81 funt.

24 $\frac{3}{4}$ łótów odciągnąć 55 cent. 92 funt. 20 $\frac{1}{2}$ łótów, piszemy więc:

$$\begin{array}{r|l} 456 \text{ cent. } 81 \text{ funt. } 24\frac{3}{4} \text{ łótów} & 12 \\ 55 \cdot 92 \cdot 20\frac{1}{2} & 17 \\ \hline 400 \text{ cent. } 89 \text{ funt. } 3\frac{1}{4} & \frac{15}{5} = 3. \end{array}$$

Przykłady. Jaka różnica wypadnie w następujących przykładach?

2 $\frac{5}{8}$ — 1 $\frac{1}{8}$; — 1 $\frac{1}{2}$ — $\frac{1}{4}$; — $\frac{5}{100}$ — $\frac{1}{10}$; — 88 $\frac{1}{2}$ — 40 $\frac{1}{4}$; — 44 $\frac{1}{2}$ — 35 $\frac{1}{4}$; — 16 $\frac{3}{4}$ — 2 $\frac{3}{4}$; — 4 $\frac{1}{5}$ — 3 $\frac{9}{10}$; — 32 tal. 18' śr. 4 $\frac{1}{2}$ fen.; — 16 tal. 28 śr. 9 $\frac{3}{4}$ fen.; — 8 cent. 7 funt. 16 $\frac{1}{2}$ łóta — 7 cent. 7 funt. 7 $\frac{1}{2}$ łóta; — 420 szefli 8 $\frac{1}{4}$ macki — 399 szefli 9 $\frac{1}{4}$ macki.

Mnożenie i dzielenie.

59. I. 1. Już z (52) wiemy, że każdy ułamek przez liczbę całkowitą na dwójaki sposób mnożonym i dzielonym być może. Ułamek się mnoży, mnożąc jego licznik a niezmieniając mianownika, lub też dzieląc jego mianownik a niezmieniając licznika; mamy bowiem:

$$8 \times \frac{7}{16} = \frac{56}{16} \text{ albo } 8 \times \frac{7}{16} = \frac{7}{2}.$$

Otrzymamy też z $\frac{7}{16}$ przez zniżenie $\frac{7}{2}$.

Na pierwszy sposób, t. j. mnożąc licznik, każdy ułamek mnożyć się da, drugiego zaś sposobu nie zawsze dla niepodzielności mianownika użyć można; jeżeli jednak obydwóch sposobów użyć możemy, drugi jest lepszym, gdyż ułamek przez mniejsze liczby się wyrazi: i tak jest:

$$3 \times \frac{1}{11} \text{ tylko} = \frac{3}{11} = 1\frac{2}{11}$$

$$\text{ale } 3 \times \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = 1\frac{1}{4}$$

$$\text{i też } = \frac{3}{4} = 1\frac{3}{4}.$$

Gdy więc $5 \times \frac{4}{5} = \frac{4 \times 5}{5} = \frac{20}{5} = 4$ i też $3 \times \frac{2}{3} = 2$, 7

$\times \frac{5}{7} = 5$ i t. d. wypada ztąd, że mnożąc ułamek przez mianownik otrzymamy licznik, czyli, że licznik ułamka tyle razy jest większym jak ułamek sam, ile jednostki mianownik w sobie zawiera.

2) Ułamek się dzieli przez liczbę całkowitą, jeżeli, nie zmieniając mianownika, licznik przez tę liczbę dzielimy, albo jeżeli, nie zmieniając licznika, mianownik przez tę liczbę mnożymy; zatém:

$$2 : \frac{8}{3} = \frac{3}{4}$$

albo $2 : \frac{8}{3} = \frac{3}{4}$, co zniżone też $\frac{3}{4}$ daje.

Na drugi sposób, t. j. mnożąc mianownik, zawsze dzielić możemy; pierwszego zaś, gdzie licznik dzielić wypada, nie

zawsze użyć można; — dadzą się obadwa użyć, wtedy pierwszy jest wygodniejszym, gdyż otrzymujemy ułamek w mniejszych liczbach wyrażony.

$$4 : \frac{2}{3} \text{ tylko} = \frac{6}{1}$$

$$\text{ale } 4 : 1\frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$$

$$\text{i téż} = 1\frac{2}{3} \text{ co także} = 1\frac{2}{3}$$

II. 1. Mnożyć przez ułamek, t. j. ułamek wziąć za mnożnik znaczy: mnożną, jakąkolwiek ona jest liczbą, przez licznik ułamka mnożyć, a iloczyn otrzymany przez mianownik dzielić.

Że reguła ta jest prawdziwą, wypada z tego co następuje. Jeżelibyśmy mnożną tylko przez licznik mnożnika mnożyli, mnożylibyśmy przez liczbę całkowitą a nie przez ułamek, — mnożylibyśmy więc przez liczbę za wielką i iloczyn byłby oczywiście za wielki; ale ile razy za wielki? tyle razy ile razy mnożnik był za wielki. Że zaś licznik ułamka tyle razy większym jest od niego, ile mianownik ma w sobie jedności, wzięlibyśmy, mnożąc tylko licznikiem, tyle razy większy mnożnik ile mianownik ma w sobie jedności, przez co téż i iloczyn tyle razy byłby większym; — musimy więc, aby prawdziwy iloczyn otrzymać, iloczyn z mnożnej i z licznika mnożnika jeszcze przez mianownik mnożnika podzielić.

Dwa przypadki tu jednak rozróżnić musimy; mnożna bowiem może być albo liczbą całkowitą, albo ułamkiem. W pierwszym razie mamy np.:

$$\frac{4}{5} \times 8 = \frac{4 \times 8}{5} = \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}$$

W drugim zaś mając np. $\frac{4}{5} \times 1\frac{5}{8}$, tak rachujemy:

$$\frac{4}{5} \times 1\frac{5}{8} = 5 : (4 \times 1\frac{5}{8}) = 5 : \frac{4 \times 15}{8} = \frac{4 \times 15}{5 \times 8} = \frac{60}{40} = \frac{3}{2}$$

t. j. mnożymy $1\frac{5}{8}$ przez licznik 4, mnożąc w ułamku $1\frac{5}{8}$ licznik a nie zmieniając mianownika, przez co $\frac{4 \times 15}{8}$ otrzymujemy, i dzielimy iloczyn ten $\frac{4 \times 15}{8}$ przez mianownik 5, mnożąc mianownik a nie zmieniając licznika, co $\frac{4 \times 15}{5 \times 8}$ daje.

Tak téż możnaby rachować:

$$\frac{4}{5} \times 1\frac{5}{8} = 5 : (4 \times 1\frac{5}{8}) = 5 : \frac{15}{4 : 8} = \frac{5 : 15}{4 : 8} = \frac{3}{2}$$

t. j. mnożymy $1\frac{5}{8}$ przez licznik 4, dzieląc w ułamku $1\frac{5}{8}$ mianownik przez 4 a nie zmieniając licznika, przez co $\frac{15}{4 : 8}$

otrzymujemy i dzielimy potem $\frac{15}{4:8}$ przez mianownik, dzieląc licznik a nie zmieniając mianownika, co $\frac{5:15}{4:8} = \frac{3}{2}$ daje.

Jest więc:

$$\frac{3}{2} \times \frac{15}{8} = \frac{4 \times 15}{5 \times 8}, \text{ ale téż } = \frac{5:15}{4:8} \text{ co zawsze } = \frac{3}{2},$$

t. j. z ogólnej reguły, że mając mnożyć przez ułamek, mnoży się przez licznik jego, a dzieli przez mianownik, wypada w razie, że obydwa czynniki ułamekami są, ta szczegółowa reguła:

Dwa ułamki mnożą się przez siebie, mnożąc liczniki przez liczniki, mianowniki przez mianowniki i biorąc iloczyn z liczników za licznik, a iloczyn z mianowników za mianownik;

albo:

dwa ułamki mnożą się przez siebie dzieląc je na krzyż przez siebie, t. j. dzieląc przez mianownik mnożnika licznik mnożnej i iloraz ten biorąc za licznik, iloraz zaś z mianownika mnożnej przez licznik mnożnika biorąc za mianownik.

Gdy jednak wyrazy danych ułamków nie zawsze bez reszty przez siebie podzielić się dadzą, zwykle więc podług pierwszej postępuje się reguły, według której liczniki przez siebie i mianowniki przez siebie się mnożą.

2. Dzielić przez ułamek t. j. ułamek wziąć za dzielnik, znaczny: dzielna, jakkolwiek ona jest liczbą, przez licznik dzielnika dzielić, a otrzymany iloraz przez mianownika dzielnika mnożyć.

Reguła ta wypada z następujących przyczyn. Gdy licznik ułamka tyle razy jest większym jak ułamek sam, ile mianownik ma w sobie jedności, dzieląc więc tylko przez licznik dzielnika, mielibyśmy tyle razy większy dzielnik, azatém tyle razy mniejszy iloraz, ile jedności mianownik w sobie zawiera: aby więc prawdziwy iloraz otrzymać, musimy jeszcze przez mianownik dzielnika go pomnożyć.

Dwa przypadki i tutaj rozróżnić musimy: dzielna bowiem może być albo całą liczbą albo ułamkiem. W pierwszym razie mamy:

$$\frac{2}{3} : 6 = \frac{6 \times 3}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

W drugim zaś:

$$\frac{2}{3} : \frac{6}{18} = 3 \times (2 : \frac{6}{18}) = 3 \times \frac{2:6}{18} = \frac{2:6}{3:18} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

albo téz:

$$\frac{2}{3} : \frac{6}{18} = 3 \times (2 : \frac{6}{18}) = 3 \times \frac{6}{2 \times 18} = \frac{3 \times 6}{2 \times 18} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

t. j. dzielimy $\frac{6}{18}$ przez licznik 2, dzieląc licznik ułamka $\frac{6}{18}$ przez 2, a nie zmieniając mianownika, przez co $\frac{2 \cdot 6}{18}$ otrzymujemy i mnożymy potem iloraz $\frac{2 \cdot 6}{18}$ przez mianownik 3, dzieląc przez niego mianownik 18, a nie zmieniając licznika, co $\frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 18}$ daje; — albo téz, dzielimy $\frac{6}{18}$ przez licznik 2, mnożąc mianownik ułamka $\frac{6}{18}$ a nie zmieniając licznika, przez co $\frac{6}{2 \times 18}$ otrzymujemy, i mnożymy potem iloraz $\frac{6}{2 \times 18}$ przez mianownik 3, mnożąc licznik a nie zmieniając mianownika, co $\frac{3 \times 6}{2 \times 18}$ daje.

Jest więc

$$\frac{2}{3} : \frac{6}{18} = \frac{2 \cdot 6}{3 \cdot 18} \text{ i téz } = \frac{3 \times 6}{2 \times 18} \text{ w obydwóch razach } \frac{2}{3} : \frac{6}{18} = \frac{1}{2}$$

t. j. z téj ogólnej reguły, że przez ułamek się dzieli dzieląc przez jego licznik a mnożąc przez jego mianownik, wypada, w razie że i dzielna jest ułamek czyli kiedy dzielnik i dzielna są ułamkami, ta szczegółowa reguła:

Dwa ułamki dzielą się przez siebie, dzieląc licznik dzielnej przez licznik dzielnika i biorąc wypadły iloraz za nowy licznik, za mianownik zaś nowego ułamka biorąc iloraz z mianownika dzielnej przez mianownik dzielnika;

albo téz:

dwa ułamki dzielą się przez siebie, mnożąc je na krzyż przez siebie, t. j. mnożąc licznik dzielnej przez mianownik dzielnika i iloczyn wypadły biorąc za licznik, za mianownik zaś biorąc iloczyn z mianownika dzielnej przez licznik dzielnika.

Gdy jednak wyrazy danych ułamków nie nie zawsze bez reszty podzielić się dają, zwykle więc podług drugiej reguły się dzieli, t. j. mnożąc wyrazy danych ułamków na krzyż.

60. Dla prędszego i łatwiejszego mnożenia i dzielenia ułamków na następujące szczególnie uważamy reguły, które z poprzednich przepisów wypadają:

1. Każdy przykład dzielenia da się zamienić na przy-

kład mnożenia przez odwrócenie wyrazów dzielnika, i tak zamieniamy np. $\frac{3}{4}$ na $\frac{4}{3}$, $3 = \frac{3}{1}$ na $\frac{1}{3}$.

Jest więc $\frac{3}{4} : \frac{5}{3} = \frac{21}{20}$, ale też $\frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{21}{20}$

$\frac{3}{4} : 7 = \frac{3}{28}$, ale też $\frac{3}{4} \times \frac{1}{7} = \frac{3}{28}$

$2 : 8 = \frac{1}{4}$, ale też $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

2. Każdy przykład mnożenia da się zamienić na przykład dzielenia, odwracając wyrazy mnożnika.

I tak jest $\frac{3}{4} \times \frac{5}{3} = 1\frac{1}{4}$, ale też $\frac{3}{4} : \frac{3}{5} = 1\frac{1}{4}$

$\frac{3}{4} \times 7 = 5\frac{3}{4}$, ale też $\frac{3}{4} : \frac{1}{7} = 5\frac{3}{4}$

$2 \times 8 = 16$, ale też $\frac{1}{2} : \frac{1}{8} = 16$

W rachunkach praktycznych zwykle tylko reguła (1) się zachowuje, aby dzielenie ułamków przez łatwiejsze mnożenie odbyć; i tak piszemy np.:

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{4}$$

3) Gdy każdą całą liczbę na ułamek niewłaściwy z jakimkolwiek mianownikiem zamienić możemy (51, 2), a najłatwiej biorąc 1 za mianownik, np. pisząc $\frac{3}{4}$ zamiast 3, $\frac{4}{4}$ zamiast 4, wszystkie więc przykłady mnożenia z ułamkami dadzą się rachować podług reguł dla mnożenia samych ułamków danych, wszystkie zaś przykłady dzielenia z ułamkami podług przepisów dla dzielenia samych ułamków wyłożonych, — i gdy dalej dzielenie dwóch ułamków przez mnożenie tychże odbyć możemy, wypada dla szybkiego rachowania ta ważna reguła, że wszystkie przykłady mnożenia i dzielenia, które zwykle za trudne uważają, podług przepisów dla mnożenia ułamków danych się rachują. I tak jest:

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{5}{4}; \text{ zatem } \frac{3}{4} \times 5 = \frac{3}{4} \times \frac{5}{1} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

$$5 \times \frac{3}{4} = \frac{5}{1} \times \frac{3}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{3} = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{20}; \text{ azatem } \frac{3}{4} : 3 = \frac{3}{4} : \frac{3}{1} = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$2 : \frac{5}{3} = \frac{2}{1} : \frac{5}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

Że zaś $\frac{3}{4} : \frac{5}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{20}$ jest, możemy pisać

$$\frac{3}{4} : 3 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$2 : \frac{5}{3} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

4) Gdy podług reguł zniżania ułamków równe czynniki w liczniku i mianowniku znieść się dają, bo wtedy ułamek przez jedną i tę samą liczbę pomnożonym i podzielonym został, możemy więc często przed wykonaniem mnożenia równe czynniki znieść, przez co rachunek się ułatwia. Przy mnożeniu znosi się licznik jednego ułamka z mianownikiem

drugiego, przy dzieleniu zaś mianownik z mianownikiem a licznik z licznikiem, np.:

$$\text{zamiast } \frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{2 \times 6}{3 \times 5} = 1\frac{2}{5} = \frac{7}{5}$$

$$\text{piszemy } \frac{2}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{2 \times 62}{3 \times 5} = \frac{2}{3} \times \frac{62}{5} = \frac{2}{3}$$

$$\text{zamiast } \frac{2}{6} : \frac{6}{21} = \frac{6 \times 6}{2 \times 21} = \frac{36}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\text{piszemy } \frac{2}{6} : \frac{6}{21} = \frac{\overset{3}{6} \times \overset{2}{6}}{\underset{7}{2} \times \underset{3}{21}} = \frac{6}{7} \text{ albo } \frac{2}{62} : \frac{63}{217} = \frac{6}{7}$$

Azatem też np.:

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{6}{3} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4} \text{ i t. d.}$$

61. Mieszane liczby zamieniają się przy mnożeniu i dzieleniu na ułamki i potem rachujemy podług reguł w (60) wyłożonych, np.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\frac{3}{4} \times 1\frac{2}{3} = \frac{11}{4} \times \frac{5}{3} = \frac{55}{12} = 4\frac{7}{12} \\ 2\frac{3}{4} \times 3 = \frac{11}{4} \times \frac{3}{1} = \frac{33}{4} = 8\frac{1}{4} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 3\frac{1}{3} : 1\frac{2}{7} = \frac{10}{3} : \frac{9}{7} = \frac{70}{9} \\ 3\frac{1}{3} : 2 = \frac{10}{3} : \frac{2}{1} = \frac{5}{3} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 : 3\frac{1}{3} = \frac{2}{1} : \frac{10}{3} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} = 1\frac{2}{3} \end{array} \right.$$

Każdy inny sposób rachowania jest daleko dłuższym, np.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\frac{3}{4} \cdot 1\frac{2}{3} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \text{ i t. d.} \\ 2\frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{11}{4} \cdot 1 + \frac{11}{4} \cdot \frac{2}{3} \text{ i t. d.} \\ 2\frac{3}{4} \cdot 3 = 2 \cdot 3 + \frac{3}{4} \cdot 3 \text{ i t. d.} \\ 3\frac{1}{3} : 1\frac{2}{7} = \frac{10}{3} : 1 + \frac{10}{3} : \frac{2}{7} \text{ i t. d.} \\ 2 : 3\frac{1}{3} = 2 : 3 + 2 : \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = \frac{1}{3} = 1\frac{2}{3} \end{array} \right.$$

62. W razie, że dzielnik i dzielna są ułamkami lub mieszanymi liczbami, albo w razie że dzielnik lub dzielna tylko jest ułamkiem lub liczbą mieszaną i jeżeli wtedy dzielenie za pomocą ułamków odbywamy, np.:

$$\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{5}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$\text{albo } 8 : 8\frac{5}{6} = \frac{8}{8\frac{5}{6}} = \frac{8}{\frac{53}{6}} = \frac{48}{53}$$

dostajemy ułamki, których oba wyrazy lub też jeden tylko jest znów ułamkiem. Ułamki takie zowią się *ułamki nieczyste*. Zamieniają się zaś na zwyczajne podług ogólnego prawa ułamków, według którego każdy ułamek na przykład dzielenia zamienić się da, biorąc licznik za dzielną a mianownik za dzielnik. I tak jest:

$$\frac{\frac{4}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{\frac{3}{4}}{7} = 7 : \frac{3}{4} = \frac{28}{3}$$

$$\frac{8\frac{2}{3}}{2} = 2 : 8\frac{2}{3} = 2 : \frac{26}{3} = \frac{26}{26} = \frac{13}{13} = 4\frac{1}{3}$$

$$\frac{\frac{2}{3}}{1\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} : \frac{4}{3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Z $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3} : \frac{4}{3} = \frac{5 \times 2}{4 \times 3} = \frac{10}{12}$ wypada, że ułamek nieczy-

sty, którego oba wyrazy znów ułamkami są, równa się ułamkowi prostemu, którego licznik równym jest iloczynowi liczb skrajnych (5×2) a mianownik iloczynowi liczb średnich (4×3) ze czterech pod sobą stojących liczb ułamka nieczystego. Jest więc też:

$$\frac{\frac{3}{4}}{7} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{7}{1}} = \frac{1 \times 3}{7 \times 4} = \frac{3}{28}$$

Gdy zaś $\frac{\frac{2}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{5}{6} : \frac{2}{6} = \frac{6 \times 2}{6 \times 5} = \frac{2}{5}$ t. j. $\frac{\frac{2}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{2}{5}$, jest więc ułamek nieczysty, którego licznik ($\frac{2}{6}$) i mianownik ($\frac{5}{6}$) równomianownymi ułamkami są, zawsze równy ułamkowi zwyczajnemu, którego licznik jest licznikiem licznika ułamka nieczystego a mianownik licznikiem mianownika tegoż ułamka nieczystego.

63. Chcąc reguły powyższe do liczb wiązanych zastosować, na dwa główne zadania zważać musimy, a te są:

- I. zamienianie liczb wiązanych na liczby najwyższych lub średnich gatunków, i *
- II. mnożenie lub dzielenie liczb wiązanych całkowitych przez ułamek, albo mnożenie lub dzielenie liczb wiązanych, których najniższy gatunek przez ułamek lub liczbę mieszaną jest wyrażony, przez liczbę całkowitą, ułamek lub liczbę mieszaną.

Przykłady następujące okazują wyraźnie, jak w takim razie rachować musimy.

I. 3 tal. 8 sr. 6 fen. daja 1) ile sr. i 2) ile tal.?

1) $12 : 6 = \frac{16}{2} = \frac{1}{2}$ sr.

$3 \times 30 = 90$ sr., azatem

3 tal. 8 sr. 6 fen. = $90 + 8 + \frac{1}{2}$ sr. = $98\frac{1}{2}$ sr.

2) 6 fen. = $\frac{1}{2}$ sr.; $8\frac{1}{2}$ sr. = $\frac{17}{2}$ sr.

$$\frac{17}{2} \text{ sr.} = \frac{17}{2 \times 30} = \frac{17}{60} \text{ tal.} \text{, azatem}$$

$$3 \text{ tal. } 8 \text{ sr. } 6 \text{ fen.} = 3\frac{17}{60} \text{ tal.}$$

I. 1) $\frac{12}{5} \text{ kop } \frac{3}{4} \text{ mendele } \frac{12}{12} \text{ sztuk} \times \frac{6}{12} = 4$

$$\frac{77 \text{ kop } 2 \text{ mendele } 12 \text{ sztuk}}{6}$$

7) 11 kop — mendele 6 sztuk

2) dzielac $\frac{12}{6} \text{ kop } \frac{3}{5} \text{ mendele } \frac{12}{5} \text{ sztuk}$ przez $\frac{6}{5}$ mamy:

$$\frac{90 \text{ kop } 2 \text{ mendele } 9 \text{ sztuk}}{5} \quad (7 \text{ } 15 : 84 = 5)$$

6) $\frac{15 \text{ kop} - \text{ mendele } 6 \text{ sztuk}}{5} = \frac{75}{5}$

3) 12 tal. 8 sr. $2\frac{1}{2}$ fen. $7 \times 2\frac{1}{2} = \frac{7}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{2} = 19\frac{1}{2}$

$$\frac{85 \text{ tal. } 27 \text{ sr. } 7\frac{1}{2} \text{ fen.}}{7} = \frac{12 : 19\frac{1}{2}}{7\frac{1}{2}} = 1$$

4) $4 : \frac{13}{1} \text{ tal. } 19 \text{ sr. } 3\frac{1}{2} \text{ fen.} = 3 \text{ tal. } 12 \text{ sr. } 3\frac{1}{2} \text{ fen.}$

$$\frac{1}{30}$$

$$4 : \frac{49}{1}$$

$$\frac{1}{12}$$

4 : $15\frac{1}{3} = 4 : \frac{49}{3} = \frac{4 \times 3}{49} = 3\frac{1}{3}$

5) Majac 7 cent. 84 funt. $4\frac{2}{3}$ lota przez $\frac{3}{5}$ pomnozyc, mno-

zymy dana liczbe przez 3 a dzielimy przez 5; jest wiecej:

7 cent. 84 funt. $4\frac{2}{3}$ lot. $3 \cdot 4\frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{14}{3} = 14$

$$\frac{23 \text{ cent. } 52 \text{ funt. } 14 \text{ lot.}}{2} \quad (3 \text{ } 100 : 252 = 2)$$

5) $\frac{4 \text{ cent. } 70 \text{ funt. } 14\frac{2}{3} \text{ lot.}}{3} = \frac{52}{2} = 26$

$5 : \frac{352}{2} = 70$

$5 : 74 = 14$

$\frac{24}{4}$

$\frac{6}{4}$

6) Majac zas 7 cent. 84 funt. $4\frac{2}{3}$ lota przez $\frac{3}{5}$ podzie-

lic, musimy liczbe dana przez 5 pomnozyc a przez 3 po-

dzielic; jest wiecej:

6. Mając zaś 7 cent. 84 funt. $4\frac{2}{3}$ łóta przez $\frac{2}{3}$ podzielić, musimy liczbę daną przez 5 pomnożyć a przez 3 podzielić; jest więc:

$$\frac{7 \text{ cent. } 84 \text{ funt. } 4\frac{2}{3} \text{ łóta}}{4} \quad 5 \cdot 4\frac{2}{3} = \bar{5} \cdot 1\frac{1}{3}$$

$$\frac{39 \text{ cent. } 20 \text{ funt. } 23\frac{1}{3} \text{ łóta}}{2} \quad 5) \quad = \bar{5} = 23\frac{1}{3}$$

$$3) 13 \text{ cent. } 6 \text{ funt. } 27\frac{1}{3} \text{ łóta. } 100 : 420 = 4$$

$$20$$

$$3 : 83\frac{1}{3} = \bar{3} : 2\frac{5}{3}^0$$

$$= 2\frac{5}{3}^0 = 27\frac{1}{3}$$

7. Jeżeli na koniec mnożnik i dzielnik są liczbami mieszanymi, zamieniamy je na ułamki i rachujemy podług reguł dawniej wyłożonych.

Przykłady. Cóż wypadnie z obrachowania następujących przykładów?

$\frac{3}{8} \times \frac{5}{6}$ i $\frac{3}{8} : \frac{5}{6}$ i $\frac{5}{6} : \frac{3}{8}$, — $11 \times \frac{1}{2}$ i $11 : \frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2} : 11$, — $\frac{2}{3} \times \frac{6}{11} \times \frac{3}{2}$
 $\times \frac{1}{3}$, — $4\frac{2}{3} \times 6\frac{1}{2}$ i $4\frac{2}{3} : 6\frac{1}{2}$ i $6\frac{1}{2} : 4\frac{2}{3}$, — $7 \times 11\frac{1}{2}$ i $7 : 11\frac{1}{2}$ i $11\frac{1}{2} : 7$,
 — $1\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2} \times 1\frac{3}{4} \times 3\frac{1}{4}$, — $\frac{2}{3} \times 4$ tal. 8 śr. $6\frac{1}{2}$ fen. i $\frac{2}{3} : 4$ tal.
 8 śr. $6\frac{1}{2}$ fen., — $2\frac{1}{2} \times 3$ cent. 6 funt. $8\frac{1}{2}$ łóta i $2\frac{1}{2} : 3$ cent. 6 funt.
 $8\frac{1}{2}$ łóta, — wyrazić $3\frac{1}{4}$ tal. w tal., śr. i fen., — wyrazić 4837 $\frac{1}{4}$ śr. w tal.
 śr. i fen., — wyrazić 22 tal. 8 śr. 6 fen. w samych tal., — wyrazić
 6 śr. $8\frac{3}{4}$ fen. w samych tal., — wyrazić 6 cent. 64 funt. $22\frac{1}{2}$ łóta
 w samych cent. a potem w samych funtach.

II. O ułamkach dziesiętnych.

64. *Ułamkiem dziesiętnym* nazywamy każdy ułamek, którego mianownikiem jest jedność wyższego rzędu, t. j. 1 mające z prawej strony jedno lub więcej zer, jak 10, 100, 1000 i t. d.

2. Ułamki dziesiętne nie oznaczają się tak jak zwyyczajne przez dwie liczby, lecz tylko przez jedną; pisze się tylko licznik, lecz tak, że i mianownik rozeznać można. Oprócz tej wygody, że ułamki dziesiętne jak liczby całkowite oznaczamy, mamy jeszcze tę korzyść, że ułamkami dziesiętnymi jak liczbami całkowitemi rachujemy. Rzecz zaś tak się ma:

Tak jak np. sta 10 razy są mniejsze jak tysiące, dziesiątki 10 razy mniejsze jak sta, jedności 10 razy mniejsze jak dziesiątki, tak też i dziesiąte części są 10 razy mniejsze jak jedności, setne części 10 razy mniejsze jak dziesiąte części, tysięczne części 10 razy mniejsze jak setne i t. d., albo

$$10 = 10 \times \frac{1}{10}$$

$$100 = 10 \times \frac{1}{100}$$

$$1000 = 10 \times \frac{1}{1000}$$

Odcinając więc na liczniku kreską od prawej do lewej tyle cyfer ile zer ma mianownik i oznaczając pierwsze miejsce jako części dziesiąte, drugie jako części setne i t. d. licznik tylko napisać nam trzeba, mianownik zaś z odciętej liczby cyfer łatwo jest poznać. I tak jeżeli w liczniku jedna cyfra jest odcięta t. j. stoi z prawej strony kreski jedna tylko cyfra, mamy wtedy części dziesiąte; są dwie cyfry odcięte, mamy części setne i t. d. Jeżeli zaś w liczniku mniej jest cyfer jak zer w mianowniku, dopisuje się z lewej strony licznika tyle zer, ile potrzeba, aby przed kreską jeszcze jedno zero stało. I tak jest

$$\begin{array}{rcl} 3,5 & = & 3\frac{5}{10}; \\ 4,125 & = & 4\frac{125}{1000}; \\ 0,003005 & = & \frac{3005}{1000000}; \end{array} \quad \begin{array}{rcl} 0,05 & = & \frac{5}{100} \\ 4,0012 & = & 4\frac{12}{10000} \\ 3,045 & = & 3\frac{45}{1000} \end{array}$$

Mianownik więc jest zawsze jednością tyle zer z prawej strony mającą, ile licznik ma odciętych cyfer.

Mając przeciwnie ułamek dziesiąty napisać, piszemy najpierw licznik jego jak liczbę całkowitą i odcinamy na nim od prawej ku lewej kreską tyle cyfer ile mianownik ma zer. Jeżeli w liczniku tyle jest cyfer ile zer w mianowniku, piszemy przed odciętemi cyframi licznika jeszcze jedno zero, jeżeli zaś w liczniku mniej jest cyfer jak zer w mianowniku wtedy, jakśmy już powiedzieli, dopisujemy tyle zer aby i przed kreską jedno zero stało. I tak mając napisać „Trzysta dwadzieścia pięć tysięcznych“ widzimy, że licznikiem jest 325, a że części tysięczne na trzecim miejscu stoją, musimy trzy liczby odciąć i nie potrzebujemy oprócz zera przed kreską nic dopisywać, jest więc:

$$\frac{325}{1000} = 0,325$$

Mając napisać „czteryście osmdziesiąt ośm milionowych“ widzimy, że licznikiem jest 488, a że milionowe części na 6tm miejscu stoją, musimy jeszcze oprócz zera przed kreską trzy zera z prawej strony licznika napisać, jest więc:

$$\frac{488}{1000000} = 0,000488$$

3. Ułamek 0,379 jest ułamkiem dziesiątnym właściwym, zaś 4,379 jest ułamkiem dziesiątnym niewłaściwym czyli raczej liczbą mieszaną. Oba można jako ułamki zwyczajne napisać i tak jest

$$\begin{array}{rcl} 0,379 & = & \frac{379}{1000} \\ 4,379 & = & 4\frac{379}{1000} \end{array}$$

W ostatnim razie trzeba więc tylko kreskę wypuścić i pod liczbę

z prawej strony kreski stojącą mianownik ułamka dziesiętnego; gdyż

$$4,379 = 4\frac{379}{1000} = \frac{4 \times 1000 + 379}{1000} = \frac{4379}{1000}$$

4. Z prawej strony ułamka dziesiętnego możemy tyle zer dopisać, ile nam się podoba i przeciwnie jeżeli w ułamku dziesiętnym na końcu zera stoją, możemy jedno, kilka lub wszystkie wypuścić bez zepsucia wartości ułamka. Wypada to z praw w (52) wyłożonych; uważamy tu jednak, że liczby, któremi licznik i mianownik mnożymy lub dzielimy, są tylko 10, 100, 1000 i t. d. Dopisując w ułamku dziesiętnym jedno zero zwiększamy licznik 10 razy i mamy zatem 10 razy więcej części; gdy jednak mianownik, którego wartość od liczby odciętych cyfer licznika zależy, przez to 10 razy większym robimy, części więc pojedyncze 10 razy mniejsze się stają i wartość ułamka się nie zmienia. Dopisując dwa zera otrzymujemy 100 razy więcej części, każda jednak z tych 100 razy jest mniejsza jak część ułamka danego i t. d. Mażąc jedno zero dostaniemy wprawdzie 10 razy mniej części, ale każda z nich jest 10 razy większa i t. d. Jest więc:

$$0,35 = 0,350 = 0,3500 = 0,35000 \text{ i t. d.}$$

$$\text{albo } \frac{35}{100} = \frac{350}{1000} = \frac{3500}{10000} = \frac{35000}{100000} \text{ i t. d.}$$

Przeciwnie zaś:

$$0,8000 = 0,800 = 0,80 = 0,8$$

$$\text{albo } \frac{8000}{10000} = \frac{800}{1000} = \frac{80}{100} = \frac{8}{10}$$

Z tego cośmy powiedzieli wypada, że łatwem jest różnomanowne ułamki dziesiętne do jednego sprowadzić mianownika t. j. ułamki dziesiętne, w których nie równa liczba cyfer przez kreskę jest odcięta, zamienić na ułamki z równą liczbą miejsc dziesiętnych; np.:

$$0,45 \qquad 0,4500$$

$$0,135 \quad \text{dają} \quad 0,1350$$

$$0,0428 \qquad 0,0428$$

65, a. Każdy ułamek prosty właściwy da się zamienić na ułamek dziesiętny. Aby to wykonać zamieniamy ułamek dany na przykład dzielenia, przypisujemy do dzielnej zera, przez co ją wyrażamy w dziesiątych, setnych i t. d. częściach, dzielimy jak zwyczajnie biorąc tylko za pierwszą liczbę w ilorazie zero; np.:

$$\frac{3}{5} = 5 : 3 = 0,6$$

$$\frac{1}{250} = 250 : 7 = 0,028$$

$$\begin{array}{r} 70 \\ 700 \\ 500 \\ \hline 2000 \end{array}$$

Tu jest w istocie $0,6 = \frac{3}{5}$, i $0,028 = \frac{1}{250}$; trafia się jednak często, że ułamek dziesiętny ułomkowi prostemu, z którego powstał, nie zupełnie jest równy, np.:

$$\frac{1}{7} = 7 : 5,0 = 0,714285714285\dots$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ \hline 30 \\ \hline 20 \\ \hline 60 \\ \hline 40 \\ \hline 50 \end{array}$$

$$\frac{1}{11} = 11 : 9,0 = 0,818181\dots$$

Taki ułamek dziesiętny, który w liczbie cyfer jest nieograniczonym i w którym te same cyfry w tym samym porządku wracają, nazywa się *peryodycznym*, a cyfry się wracające zowią się *zwrotką* albo *peryodem*.

Nie każdy peryodyczny ułamek zaczyna się zaraz od peryodu, np.:

$$\frac{1}{6} = 6 : 50 = 0,833\dots$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \hline 18 \\ \hline 20 \end{array}$$

65. b. Każdy ułamek dziesiętny można na ułamek zwyyczajny zamienić. Jeżeli w ułamku dziesiętnym nie ma żadnego peryodu, wypisujemy licznik i mianownik i zniżamy ten zwyczajny ułamek tak długo, jak długo tylko można, np.:

$$0,6 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}, \text{ albo } 0,35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20},$$

$$0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$$

Jeżeli zaraz na początku ułamka peryodycznego peryod się

znajduje, bierzemy peryod za licznik a za mianownik liczbę tyłu 9^{ami} pisaną ile peryod ma cyfer, zniżając potem ułamek, jeżeli takowy zniżyć się da, np.:

$$\begin{aligned} 0,1111\dots &= \frac{1}{9}, \\ 0,8181\dots &= \frac{81}{99} \\ 0,945945 &= \frac{945}{999} = \frac{105}{111} = \frac{35}{37} \end{aligned}$$

Jeżeli zaś ułamek nie zaraz od peryodu się zaczyna, wtedy, stosując się do poprzednich reguł, tak postępujemy:

$$\begin{aligned} 0,833\dots &= \frac{83}{100} = \frac{166}{200} = \frac{83}{100} \\ 0,0355\dots &= \frac{35}{1000} = \frac{7}{200} = \frac{7}{200} \end{aligned}$$

Przykłady. Zamień na ułamki dziesiętne: $\frac{7}{9}, \frac{6}{19}, \frac{11}{12}, \frac{31}{35}, \frac{3346}{1000}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \frac{1}{35}, \frac{1}{1000}$.

Dodawanie.

66. Liczniki ułamków dziesiętnych podpisują się tak pod sobą, aby równorzędne liczby pod sobą stały, t. j. części dziesiętne pod dziesiętnymi, setne pod setnymi i t. d., dodają się potem jak całości a na summie odcina się kreską największy mianownik. Że między liczbami danymi do dodawania téż całości znajdować się mogą, rozumie się samo przez się. Mając dodać: $0,345 + 9,04285 + 0,777 + 10,00008$

| | | |
|----------|----------|-----------------|
| piszemy: | 0,345 | 0,34500 |
| | 9,04285 | zamiast 9,04285 |
| | 0,777 | 0,77700 |
| | 10,00008 | 10,00008 |
| | 20,16493 | 20,16492 |

Odciąganie.

67. Ułamki dziesiętne odciągają się podług reguł dla odciągania liczb całkowitych wyłożonych, na reszcie tylko odcina się tyle cyfer, ile ich było odciętych w największym mianowniku, np.:

1. $0,87468 - 0,35876$ daje:

$$\begin{array}{r} 0,87468 \\ - 0,35876 \\ \hline 0,51592 \end{array}$$

2. $0,654 - 0,28734$ daje:

| | | | |
|--|-----------|---------|-------------|
| | 0,6.5.4 | zamiast | 0,6.5.4.0.0 |
| | 0,2 8 734 | | 0,2 8 7 3 4 |
| | 0,3 6 666 | | 0,3 6 6 6 6 |

$$\begin{array}{r}
 3. 142,38469 \text{ — } 88,77 \text{ daje:} \\
 142,38469 \\
 \underline{88,77} \\
 53,61469
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 142,38469 \\
 \underline{88,77000} \\
 53,61469
 \end{array}$$

Mnożenie.

68. Czynniki dane do mnożenia, czy one są tylko ułami-
kami dziesiętnymi lub czy też całości w sobie zawierają,
mnożą się przez siebie jak liczby całkowite, na iloczynie
tylko odcina się kreską od prawej do lewej tyle cyfer, ile
ich było odciętych w obydwóch czynnikach lub też tyle, ile
ich jeden z czynników miał odciętych, w razie że drugi był
liczbą całkowitą. Jeżeli przypadkiem iloczyn mniej ma cyfer
jak ich odciąć musimy, dopisuje się wtedy tyle zer ile po-
trzeba, tak aby przed kreską jeszcze jedno zero stało. Ma-
jąc mnożyć 091 . 2,413 i 0,352 . 0,125 otrzymamy:

$$\begin{array}{r}
 2,413 \\
 \underline{0,91} \\
 2413 \\
 21717 \\
 \hline
 2,19583
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 0,352 \\
 \underline{0,125} \\
 352 \\
 704 \\
 \hline
 0,044000 \\
 \underline{0,0007} \\
 0,003 \\
 \hline
 0,0000021
 \end{array}$$

Aby postępowanie poprzednie uzasadnić następujące ro-
bimy uwagi: posuwając w liczniku ułamka dziesiętnego kre-
ską o jedno miejsce ku prawej stronie, każda liczba o jedno
miejsce wyżej się posuwa, z części dziesiętnych stają się
jedności, ze setnych części dziesiętne i t. d. każda cyfra 10
razy więcej znaczy a zatem też cała liczba 10 razy większą
ma wartość. Podobnym sposobem mnoży się ułamek dzie-
siętny przez 100, posuwając kreskę o dwa miejsca ku pra-
wej, przez 1000 posuwając kreskę o trzy miejsca i t. d.
Gdy więc przez posuwanie kreski ku prawej ręce ułamek
dziesiętny się mnoży, łatwo się przekonamy, że posuwając
kreskę ku lewej ułamek dziesiętny się dzieli.

Jeżeli więc mnożąc dwa czynniki przez siebie, z któ-
rych w pierwszym dwie, w drugim zaś trzy liczby np. są
odcięte, na kreskę wcale nie zważamy, bierzemy dane czyn-
niki jako całości czyli myślimy sobie, że kreska stoi na

końcu — czynniki takim sposobem zrobiliśmy za wielkie; pierwszy, w którym dwie liczby są odcięte, 100 razy, drugi w którym trzy liczby są odcięte, 1000 razy. A że pierwszy czynnik 100 razy za wielki, jest więc i iloczyn 100 razy za wielki, a że i drugi czynnik 1000 razy za wielki jest więc jeszcze iloczyn 1000 razy za wielki, czyli 100×1000 t. j. 100000 razy za wielki, aby więc prawdziwy iloczyn otrzymać, musimy przez 100000 dzielić, co robimy posuwając kreskę o pięć miejsc ku lewej, t. j. odcinając od iloczynu pięć cyfer.

Dzielenie.

69. 1. Jeżeli z dzielenia dwóch liczb całkowitych przez siebie reszta pozostaje, możemy takową do ilorazu jako ułamek prosty lub dziesiętny przyłączyć, np.:

$$5 : 688 = 137\frac{3}{688}, \text{ ale } \frac{3}{688} = 0,6$$

jest więc:

$$5 : 688 = 137,6$$

Ułamek ten dziesiętny daleko łatwiej otrzymamy, jeżeli zaraz w danym przykładzie dzielenia, resztę 3 przez przypisanie do niej zera na ułamek dziesiętny zamienimy i tenże przez dany dzielnik dzielimy, napisawszy pierwój w ilorazie kreskę dziesiętną. Ile razy reszta jaka pozostaje przypisujemy do niej zero, a zamieniając ją takim sposobem na coraz niższe ułamki dziesiętne dzielimy jak zwyczajnie.

Wtedy także kiedy dzielnik większy jak dzielna iloraz w ułamku dziesiętnym wyrazić można np.:

$$389 : 7 = 0,018\dots$$

70

700

389

3110

2. Każde dzielenie z ułamekami dziesiętnymi, już to czy obie liczby są ułamekami lub tylko jedna, wykonywa się podobnie jak dzielenie liczb całkowitych.

a) Jeżeli dzielnik i dzielna równą liczbę odciętych cyfer mają jak np.: $2,4 : 9,6$, dzielimy wtedy jak gdybyśmy całości mieli, nie zważając wcale na kreskę, a zatem:

$$2,4 : 9,6 = 24 : 96 = 4$$

$$3,28 : 39,36 = 328 : 3936 = 12.$$

Wypada zaś to ztąd, że uważając dzielną i dzielnik za liczby

całkowite, kreskę w obydwóch o równą liczbę miejsc ku prawej posunęliśmy, a zatem każdą z liczb danych równo zwiększyliśmy, przez co przykład dzielenia się nie zmienił, tak jak wartość ułamka się nie zmienia, jeżeli licznik i mianownik jego przez jedną i tę samą liczbę mnożymy, — tu zaś mnożymy przez 10 albo 100 albo 1000 i t. d. dla czego téż położyć możemy:

$$2,4 : 9,6 = \frac{9,6}{2,4} = \frac{96}{24} = : 96 = 4.$$

b) Dzielnik i dzielna mają nie równą liczbę odciętych cyfer. Do téj z liczb, która ma mniej miejsc odciętych dopisujemy tyle zer, aby obie liczby równą liczbę odciętych cyfer miały i postępujemy potem podług reguły w (a) danej np.:

$$2,4 : 7,68 = 2,40 : 7,68 = 240 : 768 = 3,2$$

$$2,42 : 12,1 = 2,42 : 12,10 = 242 : 1210 = 5$$

$$0,006 : 0,00000312 = 0\ 00600000 : 0,00000312 \\ = 600000 : 312 = 0,00052$$

c) Jeżeli tylko w dzielniku cyfry odcięte się znajdują lub téż tylko w dzielnej, jeżeli więc w pierwszym razie dzielna, w drugim zaś dzielnik są całościami, dzielenie wtedy także podług reguły w (a) danej wykonywamy, np.:

$$6,25 : 25 = 6,25 : 25,00 = 625 : 2500 = 4$$

$$12 : 79,44 = 12,00 : 79,44 = 1200 : 7944 = 6,62$$

W ostatnim razie możemy tak jak przy dzieleniu całości postąpić, kładąc w ilorazie kreskę dziesiętną, skoro w dzielnej do niej dojdziemy, skoro więc części dziesiętne spuścimy, np.:

$$8 : 913,44 = 114,18$$

11

33

14

64

Na taki sam sposób można z przykładów w (b) położonych te obrachować, w których dzielnik mniej odciętych cyfer ma niż dzielna, np.:

$$2,4 = 7,68 = 24 : 76,8 = 3,2$$

$$6,006 : 0,00000312 = 6 : 0,00312 = 0,00052.$$

Jeżeli po spuszczeniu ostatniej liczby dzielnej dzielenie nie schodzi, możemy podług powyższych praw jeszcze da-

lój dzielić aż takowe albo nie znajdzie, albo jeżeli to nie jest podobnym, tak długo jak chcemy.

$$2.4 : 9.9 = 4.125$$

$$\begin{array}{r} 96 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 120 \\ \hline \end{array}$$

$$2,42 : 12,2 = 2,42 : 12,20 = 5,0413...$$

$$\begin{array}{r} 1000 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 968 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3.2.0 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 242 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 780 \\ \hline \end{array}$$

ROZDZIAŁ IV.

0 stosunkach i proporcjach geometrycznych i o rachunkach na nich opartych.

I. Stosunki i proporcye.

70. 1. Każde dwie liczby na dwojaki sposób ze sobą porównać możemy; albo odciągamy jedną od drugiej albo też dzielimy jedną przez drugą; w pierwszym razie dowiadujemy się z różnicy o ile jedna liczba większa jak druga, w drugim zaś z ilorazu ile razy jedna większa jak druga. Takie porównanie dwóch liczb ze sobą zowie się *stosunkiem* (Verhältniß); a ten zowie się *arytmetycznym*, jeżeli porównujemy liczby przez odciąganie, *geometrycznym* zaś, jeżeli dane liczby przez dzielenie porównujemy. My tylko stosunkami geometrycznymi trudnić się będziemy.

2. Liczby ze sobą porównane zowią się *wyrazami stosunku* (Verhältnißglieder); piszą się przy sobie rozdzielone znakiem dzielenia tak, aby wyraz przez który dzielimy stał po lewej stronie znaku dzielenia, wyraz zaś który dzielimy po prawej. Pierwszy z wyrazów zowie się *poprzednik* (Vorderglied), drugi *następnik* (Hinterglied) a liczba jako iloraz z dzielenia następnika przez poprzednik wypadła nazywa się

wykładnikiem stosunku (Exponent des Verhältnisses): Jest więc w stosunku

$$2 : 6 = 3$$

2 poprzednikiem, 6 następnikiem a 3 wykładnikiem.

3. Poprzednik jest więc dzielnikiem, następnik dzielną, a wykładnik ilorazem — dla tego też jest wykładnik równy następnikowi podzielonemu przez poprzednik, tak jak iloraz równy jest dzielnej podzielonej przez dzielnik; — poprzednik jest równy następnikowi podzielonemu przez wykładnik, tak jak dzielnik równy jest dzielnej podzielonej przez iloraz; — i nakoniec jest następnik równy iloczynowi z poprzednika przez wykładnik, tak jak dzielna równa jest iloczynowi z dzielnika przez iloraz.

Tak jak dzielenie ułamkowo wykonać możemy, tak też i wykładnik przez ułamek wyrazić się da; i tak jest:

$$2 : 10 = 5 \text{ ale też } 2 : 10 = \frac{1}{5}$$

i oprócz tego:

$$10 = 5 \cdot 2 \text{ i } 2 = 5 : 10$$

Tak jak każdy geometryczny stosunek przez ułamek wyrazić się da, tak też i przeciwnie każdy ułamek na stosunek geometryczny zamienić możemy, np.:

$$\frac{1}{3} = 9 : 7$$

71. Różne nazwy stosunków zależą już to od porównania wielkości wyrazów jednego i tego samego stosunku z sobą, już to z porównania samych stosunków.

1. Stosunek z równymi wyrazami zowie się *stosunkiem równości*, z nierównymi zaś *stosunkiem nierówności*, który znów *rosnącym* się zowie, skoro następnik większy od poprzednika, a *spadającym*, gdy następnik mniejszym jest niż poprzednik. Jest więc stosunkiem równości, np.: 8 : 8, stosunki zaś nierówności $\left\{ \begin{array}{l} 2 : 9, \text{ — stosunek rosnący,} \\ 9 : 2, \text{ — stosunek spadający.} \end{array} \right.$

Stosunek geometryczny równości ma za wykładnik jedno, np.: 6 : 6 = 1.

Stosunek rosnący ma za wykładnik całość większą niż jedno lub ułamek niewłaściwy, np.:

$$3 : 12 = 4$$

$$3 : 11 = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3}$$

Stosunek spadający zaś ma za wykładnik zawsze ułamek właściwy, np.: 7 : 4 = $\frac{1}{4}$.

2. Dwa lub więcej stosunków nazywają się *ciągłe*, jeżeli następnik pierwszego równa się poprzednikowi drugiego, następnik drugiego równym jest poprzednikowi trzeciego itd., np.

$$2 : 4$$

$$4 : 3$$

$$3 : 6$$

$$6 : 8$$

Różnią się od nich stosunki tej własności nie posiadające a które stosunkami *nieciągłymi* nazwać możemy, np.:

$$2 : 7$$

$$3 : 8$$

$$9 : 1$$

3. Gdy dwa albo więcej stosunków równe mają wykładniki, nazywają się *równe*, w innym zaś *nierówne*, np.:

$$\left. \begin{array}{l} 2 : 6 = 3 \\ 5 : 15 = 3 \\ 1 : 3 = 3 \\ 100 : 300 = 3 \end{array} \right\} \text{są równe} \quad \left. \begin{array}{l} 2 : 8 = 4 \\ 3 : 6 = 2 \\ 5 : 15 = 3 \\ 100 : 500 = 5 \end{array} \right\} \text{są nierówne} \\ \text{stosunki} \quad \text{stosunki.}$$

Stosunek rosnący więc może być tylko równym rosnącemu, tak jak spadający tylko spadającemu a stosunek równości tylko ze stosunkiem równości równać się może.

$$\begin{array}{l} 2 : 8 = 4 \quad | \quad 6 : 4 = \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \quad | \quad 5 : 5 = 1 \\ 3 : 12 = 4 \quad | \quad 3 : 2 = \frac{3}{2} \quad | \quad 3 : 3 = 1 \end{array}$$

72. *Proporcya* nazywamy połączenie dwóch równych stosunków przez znak równości. Kładąc więc między temi dwoma równymi stosunkami 2 : 8 i 3 : 12 znak równości, mamy 2 : 8 = 3 : 12 i cztery te liczby tak połączone dają proporcya.

Liczymy wyrazy proporeyi od lewej ku prawej ręce i tak jest 2 pierwszym a 12 czwartym wyrazem. Pierwszy i czwarty wyraz zowią się *skrajne*, drugi i trzeci *średnie* (äußere und innere Glieder); pierwszy i trzeci wyraz są pierwszą, drugi i czwarty drugą parą odpowiednich wyrazów. Są bowiem pierwszy i trzeci wyraz poprzednikami danych stosunków, drugi zaś i czwarty następnikami.

Ponieważ stosunki proporeyi równymi być muszą, wypada, że proporcya tylko z dwóch równych rosnących albo z dwóch równych spadających albo wreszcie z dwóch sto-

sunków równości składać się może. W pierwszym razie nazywamy proporcją *rosnącą*, w drugim zaś spadającą; np.:

$$\left. \begin{array}{l} 2 : 6 = 3 : 9 \\ 2 : 4 = 4 : 8 \end{array} \right\} \text{proporcje rosnące}$$

a

$$\left. \begin{array}{l} 8 : 4 = 6 : 3 \\ 16 : 8 = 8 : 4 \end{array} \right\} \text{proporcje spadające.}$$

Każda rosnąca tak jak każda spadająca proporcja zowie się *ciągłą* lub *nieciągłą*, podług tego czy w niej ciągłe lub nieciągłe stosunki zachodzą — czy więc wyrazy średnie proporcji sobie są równe lub nie; jest więc:

$$\left. \begin{array}{l} 2 : 6 = 3 : 9 \text{ proporcją nieciągłą rosnącą,} \\ 2 : 4 = 4 : 8 \quad \quad \quad \text{ciągłą} \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} 8 : 4 = 6 : 3 \text{ proporcją nieciągłą spadającą,} \\ 16 : 8 = 8 : 4 \quad \quad \quad \text{ciągłą} \end{array} \right\}$$

Wyraz dwa razy w proporcji ciągłej geometrycznej zachodzący (tu 4 i 8) zowie się *średniówką geometryczną* (daß geometrische Mittel) albo liczbą *średnio-proporcjonalną* (mittlere geometrische proportionirte Zahl).

73. I. Główną prawdą o stosunku geometrycznym jest następująca: Stosunek geometryczny się nie zmienia, jeżeli obydwaj wyrazy przez jedną i tę samą liczbę mnożymy lub dzielimy.

Wartością stosunku jest zawsze wykładnik, który, jak wiemy, przez ułamek wyrazić się da tak, a ułamek się nie zmienia przez pomnożenie lub podzielenie licznika i mianownika przez jedną i tę samą liczbę. Zamieniając więc ułamek tak odmieniony na stosunek, przekonamy się, że twierdzenie nasze jest udowodnione; i tak jest

$$2 : 8 = \frac{2}{8} = \text{np.} \frac{8 \cdot 3}{2 \cdot 3} = 2 \cdot 3 : 8 \times 3 = 6 : 24$$

$$2 : 8 = \frac{2}{8} = \text{np.} \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{2}{3} : \frac{8}{3}$$

Przez mnożenie lub dzielenie zmienia się wprawdzie wielkość wyrazów, ale nie ich stosunek do siebie t. j. ile razy jeden wyraz przed odmienieniem go był większy lub mniejszy jak drugi, tyle razy też po odmienieniu jest większym lub mniejszym jak drugi, i tak jest:

$$2 : 8 = 4 \text{ i też } 6 : 24 = 4$$

$$2 : 8 = 4 \text{ i też } 1 : 4 = 4$$

II. Z prawdy poprzedniej, o stosunkach geometrycznych wyłożonej wynikają następujące wnioski:

1. Równomianowe ułamki mają się do siebie jak ich liczniki, czyli zamiast stosunku równomianownych ułamków można wziąć stosunek ich liczników. Jeżeli więc równomianowe ułamki stosunek tworzą, możemy wypuścić mianowniki nie zmieniając stosunku, np.:

$$\frac{3}{4} : \frac{6}{8} = 3 : 6$$

Gdy bowiem licznik ułamka danego tyle razy jest większym jak ułamek sam, ile mianownik ma w sobie jedności, widzimy, że w danym stosunku oba wyrazy przez jedną i tę samą liczbę, t. j. przez wspólny mianownik pomnożyliśmy.

2. Ułamki z równymi licznikami mają się do siebie odwrotnie, jak ich mianowniki, — czyli zamiast stosunku ułamków równe liczniki mających, możemy wziąć odwrotny stosunek ich mianowników, np.:

$$\frac{4}{9} : \frac{4}{3} = 9 : 7.$$

Przekonamy się o prawdzie tej łatwo, jeżeli ułamki dane na równomianowe zamienimy, potem regułę (1) zastosujemy i obydwa wyrazy nakoniec przez wspólny czynnik podzielimy, i tak jest:

$$\frac{4}{9} : \frac{4}{3} = \frac{4 \cdot 9}{7 \cdot 9} : \frac{4 \cdot 7}{9 \cdot 7} = 4 \cdot 9 : 4 \cdot 7 = \frac{4 \cdot 9}{4} : \frac{4 \cdot 7}{4} = 9 : 7$$

3. Stosunek ułamków nierówne liczniki i nierówne mianowniki mających da się także wyrazić przez stosunek liczb całkowitych. Ma się wtedy pierwszy ułamek do drugiego, jak iloczyn z licznika pierwszego przez mianownik drugiego do iloczynu z licznika drugiego przez mianownik pierwszego,

$$\text{a zatem: } \frac{2}{3} : \frac{5}{7} = 2 \cdot 7 : 5 \cdot 3 = 14 : 15$$

Przekonamy się o tém zamieniając ułamki na równomianowe i zważając na regułę w (1) wyłożoną, gdyż:

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 7} : \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 3} = 2 \cdot 7 : 5 \cdot 3 = 14 : 15.$$

Moglibyśmy też napisać:

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{7} : \frac{5}{3}$$

myszając sobie, że między liczbami nad sobą stojącymi znak mnożenia stoi, a zatem:



$$\left. \begin{array}{l} 2 \\ 3 \end{array} : \begin{array}{l} 5 \\ 7 \end{array} \right\} = 14 : 15$$

4. Stosunek także liczby całkowitej i ułamka da się wyrazić przez stosunek liczb całkowitych, jeżeli oba wyrazy przez mianownik danego ułamka mnożymy t. j. jeżeli w ułamku mianownik opuścimy a drugi wyraz przez mianownik ten mnożymy, i tak:

$$\begin{array}{l} \frac{2}{3} : 5 = 2 : 15 \\ \frac{2}{7} : \frac{4}{3} = 28 : 2 \end{array}$$

5. Każdy stosunek nareszcie da się tak bez zmienienia jego wartości odmienić, że jeden z jego wyrazów będzie jednością. Dzieląc bowiem oba wyrazy danego stosunku przez poprzednik lub następnik zamieni się poprzednik lub następnik na jedność.

$$\begin{array}{l} 2 : 8 = 1 : 4 \text{ albo } \frac{2}{8} : 1 = \frac{1}{4} : 1 \\ 2 : 3 = 1 : \frac{3}{2} \text{ albo } \frac{2}{3} : 1 \end{array}$$

Przykłady. Wyraż następujące stosunki przez liczby całkowite: $\frac{2}{3} : \frac{5}{7}$, $\frac{3}{4} : \frac{2}{5}$, $\frac{7}{8} : \frac{1}{2}$, $0,25 : 0,375$, $7 : \frac{2}{3}$, $10 : \frac{4}{5}$, $3,1 : 4,284$, $\frac{1}{3} : \frac{1}{4}$, $2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{4}$, $0,33 : 1,2846$, $\frac{1}{10} : \frac{1}{12}$, $26 : 170$, $2\frac{1}{2} : 6$, $2\frac{2}{3} : 4,25$, $20 : 3\frac{1}{2}$.

74. I. Jedną z najważniejszych prawd o proporcji geometrycznej jest następująca: w każdej proporcji geometrycznej jest iloczyn wyrazów skrajnych równy iloczynowi wyrazów średnich.

Prawda ta wypada z następujących przyczyn; ponieważ w stosunku geometrycznym następnik jest iloczynem z poprzednika i wykładnika, jest więc w proporcji geometrycznej drugi wyraz iloczynem z pierwszego wyrazu i wspólnego wykładnika obydwóch stosunków, czwarty wyraz zaś jest iloczynem z trzeciego wyrazu i tego samego wykładnika, — ztąd wynika, że zamiast iloczynu z pierwszego i czwartego wyrazu położyć możemy iloczyn z pierwszego i trzeciego wyrazu i wykładnika, a zamiast iloczynu z drugiego i trzeciego wyrazu położyć możemy iloczyn z pierwszego wyrazu, wykładnika i trzeciego wyrazu, — gdy więc takim sposobem tak iloczyn wyrazów średnich jak iloczyn wyrazów skrajnych wyrazić możemy przez iloczyn tych samych trzech czynników, t. j. przez iloczyn 1 i 3 wyrazu i wykładnika, wypada ztąd że iloczyny powyższe sobie równe być muszą.

$$3 : 6 = 5 : 10$$

$$3 \times 10 = 6 \cdot 5$$

$$30 = 30$$

II. 1. Tak jak z proporcji geometrycznej dwa równe iloczyny powstają, tak też i na odwrót mając dwa iloczyny równe, z których każdy z dwóch czynników się składa, można utworzyć proporcją geometryczną, biorąc czynniki jednego iloczynu za skrajne, drugiego za średnie.

I tak mając $5 \cdot 8 = 4 \cdot 10$ otrzymamy:

$$5 : 4 = 10 : 8$$

$$\text{albo } 8 : 10 = 4 : 5$$

$$\text{albo } 4 : 5 = 8 : 10$$

$$\text{albo } 10 : 8 = 5 : 4$$

2. Z każdej proporcji można dwa równe ułamki utworzyć, które będą wykładnikami obydwóch równych stosunków danej proporcji. Z proporcji

$$2 : 4 = 3 : 6 \text{ otrzymamy } \frac{2}{4} = \frac{3}{6}.$$

Na odwrót także można z dwóch równych ułamków dwa równe stosunki albo proporcją utworzyć. I tak mając

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \text{ otrzymamy } 2 : 4 = 3 : 6$$

$$\frac{3}{6} = \frac{2}{4} \text{ otrzymamy } 2 : 6 = 3 : 9$$

III. W każdej proporcji można wszystkie wyrazy przedstawić lub odmienić, byleby tylko iloczyn wyrazów skrajnych równym został iloczynowi wyrazów średnich.

Wyrazy danej proporcji, bez odmiany wielkości iloczynów, na następujące sposoby przedstawić możemy:

a) przestawiając tylko wyrazy średnie, np. z $3 : 6 = 4 : 8$ powstaje $3 : 4 = 6 : 8$.

b) przestawiając tylko wyrazy skrajne, np. z $3 : 6 = 4 : 8$ powstaje $8 : 6 = 4 : 3$.

c) przestawiając i skrajne i średnie wyrazy np. z $3 : 6 = 4 : 8$ powstaje $8 : 4 = 6 : 3$.

d) przestawiając wyrazy każdego stosunku np. z $3 : 6 = 4 : 8$ powstaje $6 : 3 = 8 : 4$.

Wyrazy danej proporcji dadzą się także odmienić bez zepsucia teje na kilka sposobów, przez co wielkość iloczynów się wprawdzie zmienia ale nie ich równość. Odmieniamy zaś proporcją:

a) mnożąc albo dzieląc wszystkie wyrazy przez jedną i tę samą liczbę, np.:

$$z \ 3 : 6 = 4 : 8 \text{ powstaje } 6 : 12 = 8 : 16 \text{ i}$$

$$z \ 4 : 12 = 16 : 48 \text{ powstaje } 1 : 3 = 4 : 12$$

Podług 73, 1. stosunki się przez to nie zmieniają, a zatem i proporcya.

b) dzieląc albo mnożąc dwa wyrazy, z których jeden jednak skrajnym, drugi zaś średnim być musi.

Że 1 i 2, lub 3 i 4 wyraz bez odmiany proporcji mnożyć lub dzielić możemy, wypada z 73, 1.; i tak

$$z 3 : 6 = 4 : 8 \text{ mamy } 6 : 12 = 4 : 8$$

$$i 3 : 6 = 8 : 16$$

równie z 4 : 8 = 16 : 32 powstaje 2 : 4 = 16 : 32

$$i 4 : 8 = 8 : 16$$

Że zaś 1 i 3 lub 2 i 4 wyraz odmienić możemy wynika z następującej przyczyny: mnożąc lub dzieląc średni i skrajny wyraz przez jedną i tę samą liczbę, mnożymy lub dzielimy właściwie równe iloczyny przez równe liczby, a zatem równe liczby znów otrzymać musimy.

W każdej proporcji można więc łatwo znieść ułameki i średnie wyrazy ze skrajnemi t. j. 1 i 4 z 2 i 3, a 2 i 3 z 1 i 4, i tak np. z

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{6} = 8 : 10 \text{ powstaje } 2 \cdot 6 : 5 \cdot 3 = 8 : 10$$

$$\text{albo } \frac{2}{3} : \frac{5}{6} = 8 : 10$$

$$z 8 : 12 = 10 : x \text{ powstaje } 8 : 12 = 10 : x$$

Mając dalej proporcją z liczbami mieszanymi możemy ją zamienić na proporcją w liczbach całkowitych, np.:

$$2\frac{1}{2} : 3\frac{2}{3} = 4\frac{1}{5} : 6\frac{4}{5}$$

$$\frac{5}{2} : \frac{11}{3} = \frac{21}{5} : \frac{154}{5}$$

$$5 \cdot 3 : 11 \cdot 2 = 21 \cdot 25 : 154 \cdot 5$$

$$5 \cdot 3 : 11 \cdot 2 = 21 \cdot 5 : 154 \cdot 1$$

$$1 \cdot 3 : 11 \cdot 1 = 21 \cdot 1 : 77 \cdot 1$$

$$3 : 11 = 21 : 77$$

$$1 : 11 = 7 : 77$$

$$1 : 11 = 1 : 11$$

to zwykle tak piszemy:

$$\frac{1}{2} : 3\frac{2}{3} = 4\frac{1}{5} : 6\frac{4}{5}$$

$$\frac{5}{2} : \frac{11}{3} = \frac{21}{5} : \frac{154}{5}$$

$$\frac{5}{2} : \frac{11}{3} = \frac{21}{5} : \frac{154}{5}$$

$$3 : 2 = 25 : 5$$

Chociaż każdy ze czterech wyrazów proporcji nieznanym być może, wszystkie przypadki jednak na jeden jedyny sprowadzić się dają, gdzie 4ego wyrazu braknie, za pomocą 74, II., podług czego wyrazy danj proporcji przedstawić można.

$$2 : 4 = x : 6 \text{ zamieniamy na } 4 : 2 = 6 : x$$

$$2 : x = 3 : 6 \text{ zamieniamy na } 2 : 3 = x : 6 \text{ a to}$$

$$\text{na } 3 : 2 = 6 : x$$

$$x : 4 = 3 : 6 \text{ zamieniamy na } 6 : 4 = 3 : x.$$

76, 1. Mając kilka geometrycznych stosunków i biorąc iloczyn wszystkich poprzedników za poprzednik, iloczyn zaś wszystkich następników za następnik nowego stosunku, otrzymamy nowy stosunek, *złożonym* nazwany w przeciwstawieniu do stosunków danych, które się stosunkami *pojedynczemi* nazywają. Aby oznaczyć na jaki sposób nowy stosunek jest złożonym, piszemy pojedyncze stosunki albo pod sobą albo koło siebie i zamykamy je w ostatnim razie w nawiasy, pisząc między nimi krzyżyk, nie jako znak dodawania lecz jako znak ich złożenia; i tak:

$$2 : 4 \quad \text{albo } (2 : 4) \times (3 : 9) \times (4 : 16) =$$

$$3 : 9 \quad 2 \cdot 3 \cdot 4 : 4 \cdot 9 \cdot 16 = 24 : 576$$

$$4 : 16$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 : 4 \cdot 9 \cdot 16$$

Z tego wypada, że i wykładnik stosunku złożonego równy jest iloczynowi z wykładników stosunków pojedynczych.

A zatem

$$2 : 4 = 2 \left. \begin{array}{l} 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \\ 2 \\ 3 \cdot 4 \end{array} \right\}$$

$$3 : 9 = 3$$

$$4 : 16 = 4 \left. \begin{array}{l} 3 \cdot 4 \\ 2 \cdot 3 \cdot 4 \end{array} \right\}$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 : 4 \cdot 9 \cdot 16 = \frac{4 \cdot 9 \cdot 16}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 24$$

Jeżeli stosunki, które złączyć mamy są stosunkami ciągłemi, t. j. jeżeli następnik każdego pierwszego jest równy poprzednikowi każdego następującego, stosunek złożony bardzo łatwo znajdziemy, biorąc tylko za poprzednik nowego stosunku poprzednik pierwszego stosunku a za następnik nowego stosunku następnik ostatniego stosunku, — i tak jest

$$2 : 4$$

$$4 : 3$$

$$3 : 9$$

$$9 : 6$$

$$\frac{2 : 4}{2 : 6}$$

stosunek złożony jest właściwie taki:

$$2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 9 : 4 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 6$$

zamienia się jednak, podług 73, I, dzieląc obydwaj wyrazy przez $4 \cdot 3 \cdot 9$ na $2 : 6$.

2. Każdy stosunek można także uważać za stosunek złożony i na stosunki pojedyncze rozłożyć, rozkładając wyrazy stosunku danego na równą liczbę dowolnych czynników i biorąc odpowiednie czynniki pierwszego iloczynu z odpowiednimi czynnikami drugiego iloczynu za nowe stosunki,

$$\text{np. } 6 : 24 = 3 \cdot 2 : 4 \cdot 6 = (3 : 4) + (2 : 6)$$

$$\text{albo } 6 : 24 = 1 \cdot 2 \cdot 3 : 2 \cdot 3 \cdot 4 = (1 : 2) + (2 : 3) + (3 : 4)$$

77. Mamy także złożone proporcje. Tworzymy takowe, biorąc iloczyn ze wszystkich pierwszych wyrazów danych proporcji za pierwszy wyraz nowej proporcji, iloczyn z drugich wyrazów za drugi wyraz i t. d. Że cztery nowe iloczyny, które takim sposobem otrzymujemy, w istocie proporcją dają, przekonamy się w każdym pojedynczym razie o tém, gdy zawsze iloczyn z 1 i 4 wyrazu równym jest iloczynowi z 2 i 3, i iloraz z dwóch pierwszych wyrazów równym jest ilorazowi z dwóch ostatnich wyrazów, jeżeli tylko w odpowiednim porządku dzielimy.

$$2 : 4 = 3 : 6$$

$$5 : 15 = 4 : 12$$

$$2 : 6 = 3 : 9$$

$$2 \cdot 5 \cdot 2 : 4 \cdot 15 \cdot 6 = 3 \cdot 4 \cdot 3 : 6 \cdot 12 \cdot 9$$

$$\text{albo } 20 : 360 = 36 : 648$$

$$\text{a tu jest } 20 : 360 = 18 \text{ i } 36 : 648 = 18$$

$$\text{i } 20 \cdot 648 = 360 \cdot 36 = 12960$$

Jeżeli stosunki pod sobą stojące w danych proporcjach są stosunkami ciągłymi, możemy użyć skrótów w (76) wyłożonych, np.

$$2 : 4 = 3 : 6$$

$$2 : 4 = 3 : 6$$

$$4 : 8 = 6 : 12$$

$$3 : 9 = 6 : 18$$

$$8 : 6 = 12 : 9$$

$$4 : 8 = 18 : 36$$

$$2 : 6 = 3 : 9$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 : 4 \cdot 9 \cdot 8 = 3 : 36$$

$$24 : 288 = 3 : 36$$

Teoria geometrycznych stosunków i proporcji dla tego tak jest ważną, że na niej się opierają najważniejsze praktyczne rachunki, jak reguła trzech, reguły wszelkie złożone a przez to wszystkie rachunki od tychże zawisłe.

II. O regule trzech.

(Regula de tri).

78. Reguła trzech uczy nas jak do trzech znanych wyrazów proporcji w liczbach imiennych danej, czwarty nieznanomy wyraz wynaleść.

Do trzech znanych wyrazów proporcji w liczbach bezwzględnych danej znajdujemy czwarty wyraz podług reguły w (75) wyłożonych; każda proporcya téż da się tak odmienić, że wyraz nieznanomy na czwartym miejscu stoi a więc się znajduje, jeżeli iloczyn z pierwszego i trzeciego wyrazu przez pierwszy dzielimy: pytanie jest, jak reguła ta do proporcji w liczbach imiennych danej zastosować się da?

Najpierw samo przez się wypada, że tylko równoimienne rzeczy w stosunku do siebie stać mogą; i tak możemy się pytać: ile razy są 8 tal. większe jak 2 tal.? równie jak: ile razy 8 większe jak 2; ale nie możemy się pytać ile razy 8 tal. są większe jak 2 funty? Jest więc stosunek liczb imiennych zawsze równy stosunkowi liczb bezimiennych,

$$\text{np. } 2 \text{ tal.} : 8 \text{ tal.} = 2 : 8$$

$$2 \text{ tal.} : 2 \text{ tal. } 15 \text{ śr.} = 2 \text{ tal.} : 2\frac{1}{2} \text{ tal.} = 2 \text{ tal.} : \frac{5}{2} \text{ tal.}$$

$$= 2 : \frac{5}{2} = 4 : 5$$

$$8 \text{ cent.} : 2 \text{ cent. } 10 \text{ funt.} = 8 \text{ cent.} : 2\frac{1}{10} \text{ cent.} = 8 \text{ cent.} : \frac{21}{10}$$

$$\text{cent.} = 8 : \frac{21}{10} = 80 : 21$$

Gdy więc i stosunki liczb imiennych między sobą równymi być mogą, jeżeli wszystkie następni tyle razy są większe lub mniejsze jak odpowiedni poprzedni, wypada ztąd, że i proporcje w liczbach imiennych mieć możemy. W takich proporcjach są albo wszystkie wyrazy tego samego gatunku albo przynajmniej dwa, t. j. oba wyrazy tego samego stosunku są równo-gatunkowe, np.

$$2 \text{ tal.} : 8 \text{ tal.} = 10 \text{ tal.} : 40 \text{ tal.}$$

$$\text{albo } 2 \text{ tal.} : 8 \text{ tal.} = 12 \text{ cent.} : 48 \text{ cent.}$$

Gdy jednak wszystkie takie proporcje z równoimiennymi wyrazami w rachunku jako proporcje w liczbach bezwzględnych tylko dane się uważają, jak np.

$$2 : 8 = 10 : 40$$

$$\text{albo } 2 : 8 = 12 : 48$$

wypada ztąd, że i w nich iloczyn wyrazów skrajnych równy iloczynowi wyrazów średnich i że czwarty nieznanomy

wyraz znajdziemy mnożąc drugi wyraz przez trzeci i wypadły iloraz dzieląc przez pierwszy, np.

$$2 : 10 = 8 : x \text{ i } 2 \text{ tal.} : 10 \text{ tal.} = 8 \text{ cent.} : x \text{ cent.}$$

$$x = \frac{8 \cdot 10}{2} \qquad x = \frac{8 \cdot 10}{2}$$

$$= \frac{80}{2} = 40 \text{ cent.}$$

79. Chcąc przykład jaki reguły trzech dokładnie obrachować, na cztery punkta zważać musimy:

1. przekonać się, czy zadanie przez regułę trzech obrachowanem być może, t. j. czy w przykładzie danym znamiona reguły trzech się znajdują;
2. rozróżnić warunek i pytanie w zadaniu;
3. utworzyć proporcją z warunku i pytania;
4. znaleźć nieznaną wyraz w proporcji, — a oprócz tego
5. zrobić próbę.

Niech np. następujące przykłady obrachować mamy: 4 cent. 50 funt. kosztują 10 tal. 25 śr.; ile kosztuje 8 cent. 40 funt.?

Jeżeli we fortecy pewnej 8400 ludzi z żywności tamże się znajdującą przez 6 miesięcy 5 dni wyżywić się mogą; na długo starczyć będzie ta sama żywność dla 11200 ludzi?

Że zadanie jakie, w którym jednej nieznaną szukamy, przez regułę trzech rozwiązać możemy, poznajemy po tém:

- a) jeżeli zadanie dwie różnogatunkowe rzeczy w sobie zawiera;
 - b) jeżeli te różnogatunkowe rzeczy od siebie zależą;
 - c) każda z tych rzeczy dwa razy przychodzić musi, rachując już w to i nieznaną wyraz.
- a) Różnogatunkowe rzeczy poznajemy po tém, że różnie się nazywają i nigdy równem nazwiskiem oznaczone być nie mogą, tak jak np. w naszych przykładach pieniądze i towary, ilość ludzi i czas.
- b) Dwie różnogatunkowe rzeczy zależą od siebie, jeżeli żadna sama tylko zmieniać się nie może, lecz zmieniając się zmianę drugiej zaraz za sobą pociąga. Pod zmianą rozumiemy tu powiększenie lub pomniejszenie mnogości. Gdy jednak przez zwiększenie jednej rzeczy druga się zwiększać lub zmniejszać może i przeciwnie pierwsza zmniejszona lub zmniejszenie lub zwiększenie drugiej rzeczy za sobą pociąga,

gdy więc dwie rzeczy równocześnie na równy albo na przeciwny sposób odmieniać się mogą, rozróżniamy zatem te dwa przypadki, czy dwie rzeczy *wprost* lub *odwrotnie* na siebie działają. Dwie różnogatunkowe rzeczy działają na siebie wprost, jeżeli obie równocześnie się zwiększają lub zmniejszają; działają zaś odwrotnie na siebie, jeżeli równocześnie jedna się zwiększa a druga zmniejsza. W naszych przykładach zależy mnogość pieniędzy wprost od towarów, gdyż za więcej pieniędzy dostaniemy więcej towarów, — ale liczba ludzi i czas stoja do siebie w stosunku odwrotnym, gdyż przy więcej ludziach żywność ta sama na krótszy czas wystarczy.

Podług tego czy w przykładach danych rzeczy różnogatunkowe w prostym lub w odwrotnym stosunku do siebie stoja, nazywamy *regulę trzech prostą* lub *odwrotną*.

e) Każda z różnogatunkowych rzeczy musi dwa razy zachodzić, gdyż dla utworzenia stosunku dwa wyrazy są potrzebne. W naszych przykładach mamy:

2 razy towary: 4 cent. 50 funt. i 8 cent. 40 funt.;

2 razy pieniądze: 10 tal. 25 śr. i pieniądze nieznanne;

i

2 razy liczbę ludzi: 8400 ludzi i 11200 ludzi;

2 razy czas: 6 miesięcy 5 dni i czas szukany.

80. W każdym przykładzie reguły trzech są dwa różne warunki wyrażone, z których w każdym obie różnogatunkowe rzeczy różną wielkość mające zachodzą, i tak np. w pierwszym z naszych przykładów jest jednym warunkiem ten, że za 4 cent. 50 funt. zapłacić musimy 10 tal. 25 śr., drugim zaś że 8 cent. 4 funt. dostaniemy i pytamy się ile za to zapłacić musimy. Od tego samego warunku zależące rzeczy nazywamy odpowiednie a warunek pierwszy i pytanie ustawić znaczy: rzeczy odpowiednie w jeden rząd ustawić. Uważać tu musimy jeszcze, że część przykładu, w której wszystkie wyrazy są znane, właściwie tylko *warunkiem* nazywamy, — druga zaś stanowi *pytanie*.

Podług tego czy przykład dany od warunku, (jak w pierwszym przykładzie,) lub od pytania, (jak w drugim przykładzie,) się zaczyna, piszemy warunek lub pytanie u góry, — zawsze jednak muszą ich równoimienne wyrazy stać pod sobą, i tak:

W. 4 cent. 50 funt. kosztuje 10 tal. 25 śr.

P. 8 . . . 40 . . .

W. x miesięcy 11200 ludzi
 P. 6 5 dni 8400

81. Reguła podług której z warunku i pytania proporcya się tworzy, musi nam tylko okazać, jak ze czterech wyrazów warunku i pytania cztery wyrazy proporcji powstają t. j. który wyraz warunku lub pytania przyjdzie w proporcji na pierwsze miejsce, który na drugie i t. d. Reguła okazująca nam jak mamy zapełnić najpierw czwarte miejsce, potem trzecie, potem pierwsze a nakoniec drugie miejsce proporcji jest następująca:

• Piszemy najpierw znaki proporcji, a zatem

: = :

kładziemy na czwarte miejsce wyraz nieznanomy pytania, który przez x oznaczamy, na trzecie zaś równoimienny wyraz warunku — aby zaś znaleźć co na pierwsze i drugie miejsce w proporcji położyć, musimy się dowiedzieć jak różnogatunkowe rzeczy w przykładzie od siebie zależą; stoją one do siebie w stosunku prostym, piszemy wtedy pozostały wyraz warunku na pierwszym, a pozostały wyraz pytania na drugim miejscu; jeżeli zaś różnogatunkowe rzeczy w odwrotnym stosunku do siebie stoją, kładziemy wtedy pozostały wyraz na pierwszym, pozostały zaś wyraz warunku na drugim miejscu. W naszych przykładach będzie więc:

cent. funt. cent. funt. tal. śr. tal.

4 - 50 : 8 - 40 = 10 - 25 : x

l. l. m. d. m.

i 11200 : 8400 = 6 - 5 : x

82. Aby nieznanome wyrazy z proporcji tych w liczbach imiennych danych znaleźć, musimy najpierw podług (78) znajome wyrazy na niewiązane równoimienne liczby zamienić a potem zastosować reguły skrócenia w (74) wyłożone. *Użykawszy* tak wyrazy znajdujemy x podług (75). Postępujemy przytém podług następnych reguł w porządku niżej podanym; jeżeli zaś niektóre z reguł zastosować nie mamy sposobności, do następnej zaraz idziemy.

1. Liczby wiązane zamieniamy na niewiązane a wyrazy tego samego stosunku wyrażamy w jednym gatunku; musimy więc pierwszy i drugi a potem trzeci i czwarty wyraz na równoimienne zamienić, tu więc:

cent. cent. tal. tal. l. l. m. m.

$4\frac{1}{2} : 8\frac{2}{3} = 10\frac{5}{6} : x$ | $11200 : 8400 = 6\frac{1}{6} : x$

2. Liczby mieszane, które albo zaraz nam dane były, albo przez zamianę liczb wiązanych na najwyższe gatunki powstały, zamieniamy na ułamki, i tak:

$$\frac{2}{5} : \frac{4}{5} = \frac{65}{6} : x \quad | \quad 11200 : 8400 = \frac{37}{6} : x$$

3. Znosimy nłamki, podpisując mianownik skrajnego wyrazu jako czynnik pod wyraz średni, a mianownik średniego wyrazu jako czynnik pod wyraz skrajny, — podpisujemy więc tutaj, gdzie czwartego wyrazu braknie, mianownik pierwszego wyrazu pod drugi lub trzeci wyraz, a mianownik drugiego i trzeciego wyrazu pod pierwszy wyraz; a zatem

$$\begin{array}{r|l} \frac{9}{2} : \frac{42}{5} = \frac{65}{6} : x & 11200 : 8400 = \frac{37}{6} : x \\ 5 & 2 \\ 6 & \end{array}$$

4. Znosimy wyrazy skrajne ze średniami, tu więc, ponieważ czwartego wyrazu braknie, pierwszy wyraz z drugim i trzecim, co dokładniej tak wyrazić możemy: znosimy czynniki pierwszego wyrazu z czynnikami drugiego i trzeciego wyrazu; a tak

$$\begin{array}{r|l} 9 : 42 = \frac{65}{6} : x & 11200 : 4800 = 37 : x \\ \frac{3}{6} & \frac{2}{7} & 13 \\ & \frac{6}{8} & 14 \\ & & 1 \end{array}$$

5. Mnożymy drugi wyraz przez trzeci, lub mnożymy czynniki drugiego wyrazu przez czynniki trzeciego wyrazu i dzielimy iloczyn wypadły przez pierwszy wyraz, lub przez czynniki pierwszego wyrazu, a zatem

$$\begin{array}{l} x = \frac{2 \times 7 \times 13}{9} = \frac{14 \times 13}{9} \quad | \quad x = \frac{1 \times 37}{8} = 4\frac{5}{8} \text{ m.} \\ = 1\frac{8}{9}^2 \text{ tal.} \\ = 20 \text{ tal. } 6 \text{ } \acute{\text{s}}\text{r. } 8 \text{ fen.} \end{array}$$

gdyż właściwie ostatnie proporcye są te:

$$9 : 2 \times 7 = 13 : x \quad \text{i} \quad 8 : 1 = 37 : x$$

Obrachowanie zatem całego pierwszego przykładu wygląda tak:

$$\begin{array}{r} \text{cent. funt.} \quad \text{cent. funt.} \quad \text{tal. } \acute{\text{s}}\text{r.} \quad \text{tal.} \\ 4 - 30 : - 40 = 10 \text{ } 23 : x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 4\frac{2}{5} \quad 8\frac{2}{5} \quad 10\frac{3}{6} \\ 9 \quad 42 \quad 63 \\ \frac{2}{5} \quad \frac{3}{5} \quad \frac{6}{6} \\ 3 \quad 2 \quad 13 \\ 6 \quad 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9 : 14 = 13 : x \\ x = \frac{14 \times 13}{9} = 1\frac{8}{9}^2 = 20\frac{4}{9} \text{ tal.} \end{array}$$

83. Próba reguły trzech da się na trojaki sposób zrobić:

1. Położywszy wartość za x w proporcji i biorąc wszystkie wyrazy proporcji jako liczby niewiązane i bezwzględne, szukamy, czy wykładniki obydwóch stosunków, jak to proporcya wymaga, sobie są równe. W pierwszym przykładzie mamy:

$$4\frac{1}{2} \text{ cent.} : 8\frac{2}{3} \text{ cent.} = 10\frac{5}{8} \text{ tal.} : 20\frac{2}{3} \text{ tal.}$$

zład

$$\frac{9}{2} : \frac{4}{3} = \frac{6^5}{5} : 18^2$$

ale

$$\frac{9}{2} : \frac{4}{3} = \frac{81}{4} = 1\frac{3}{4}$$

$$\text{i } \frac{6^5}{5} : 18^2 = \frac{18^2 \cdot 6}{5 \cdot 8} = \frac{108^2}{40} = \frac{36^2}{10} = 1\frac{1}{10}$$

2. Próbę téż zrobić możemy patrząc, czy w uformowanej podług (1) proporcji, iloczyn wyrazów średnich równy iloczynowi wyrazów skrajnych. W pierwszym przykładzie mamy:

$$4\frac{1}{2} : 8\frac{2}{3} = 10\frac{5}{8} : 20\frac{2}{3}$$

$$\text{Jest zaś } 4\frac{1}{2} \times 20\frac{2}{3} = \frac{9}{2} \times 18^2 = 18^2 = 91$$

$$\text{i } 8\frac{2}{3} \times 10\frac{5}{8} = \frac{4}{3} \times \frac{6^5}{5} = 7 \times 1^3 = 91.$$

3. Nakoniec można także próbę reguły trzech przez regułę trzech robić, kładąc za x znaną wartość i biorąc jeden z wyrazów znanych za nieznaną. Szukamy wtedy czy wyraz za nieznaną wzięty nam wyjdzie. Dla pierwszego przykładu

$$\text{W. } 4\frac{1}{2} \text{ cent. kosztuje } 10\frac{5}{8} \text{ tal.}$$

$$\text{P. } 8\frac{2}{3} \text{ } x \text{ .}$$

tworzymy sobie warunek i pytanie następujące:

$$\text{W. } 4\frac{1}{2} \text{ cent. kosztuje } 10\frac{5}{8} \text{ tal.}$$

$$\text{P. } x \text{ } 20\frac{2}{3} \text{ .}$$

a z tego tę proporcją:

$$10\frac{5}{8} : 20\frac{2}{3} = 4\frac{1}{2} : x$$

co daje

$$x = 8\frac{2}{3} \text{ cent.}$$

Jeżeli nie chcemy x koniecznie na czwartym miejscu postawić, możemy zaraz w pierwotnej proporcji zamiast x wartość znaną położyć i jakikolwiek inny wyraz opuścić czyli za nowe x wziąć: np.:

$$4\frac{1}{2} \text{ cent.} : 8\frac{2}{3} \text{ cent.} = 10\frac{5}{8} \text{ tal.} : x \text{ tal.}$$

daje $x = 20\frac{2}{3}$ tal.

Cheąc robić próbę możemy napisać:

$$4\frac{1}{2} \text{ cent.} : 8\frac{2}{3} \text{ cent.} = x \text{ tal.} : 20\frac{2}{3} \text{ tal.}$$

$$\text{albo } 4\frac{1}{2} \text{ cent.} : x \text{ cent.} = 10\frac{5}{6} \text{ tal.} : 20\frac{2}{3} \text{ tal.}$$

$$\text{albo } x \text{ cent.} : 8\frac{2}{3} \text{ cent.} = 10\frac{5}{6} \text{ tal.} : 20\frac{2}{3} \text{ tal.}$$

Z ostatniej proporcji znajdziemy:

$$x : \frac{42}{3} = \frac{63}{6} : \frac{182}{9}$$

$$\frac{42}{3} = 14 \quad \frac{63}{6} = 10\frac{1}{2} \quad \frac{182}{9} = 20\frac{2}{3}$$

$$x : 14 = 10\frac{1}{2} : 20\frac{2}{3}$$

$$x : 1 = 9 : 2$$

$$x = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2} \text{ cent.}$$

84. Proporcya da się także, nie zważając bliżej na warunek i pytanie, bezpośrednio ze zadania ułożyć. Następne reguły mogą nam być do tego pomocne.

1. Piszemy wyraz nieznamy na czwartym miejscu proporcji a wyraz z tym równościenny na trzecim, — potem zastanowiwszy się nad warunkami zadania przekonać się musimy, czy czwarty wyraz większym lub mniejszym będzie jak trzeci; jeżeli czwarty wyraz większym będzie jak trzeci, piszemy z pozostałych dwóch wyrazów większy na drugim, mniejszy zaś na pierwszym miejscu; jeżeli zaś przeciwnie czwarty wyraz mniejszym będzie jak trzeci, kładziemy z dwóch pozostałych wyrazów mniejszy na drugim, większy zaś na pierwszym miejscu proporcji. Reguła ta wynika, jak łatwo się przekonać można, z tego, że tylko rosnące albo spadające stosunki proporcją dać mogą.

2. Z trzech danych wyrazów dwa są zawsze równogatkowe, trzeci zaś nie; trzeci ten wyraz należy do jednego z danych równogatkowych wyrazów, do drugiego zaś z równogatkowych wyrazów, który właśnie pytanie stanowi, należy wyraz równogatkowy z trzecim, który jako nieznamy przez x oznaczamy. Oba dane równogatkowe wyrazy stoją zawsze na pierwszych dwóch miejscach w proporcji, tak że wyraz stanowiący pytanie na drugie lub pierwsze miejsce przyjdzie, podług tego, czy prostą lub odwrotną regułą trzech mamy; na trzecim miejscu stoi zawsze wyraz trzeci a na czwartym x . Tak jak dawniej tak

i tutaj znajdujemy x , mnożąc drugi wyraz przez trzeci i dzieląc wypadły iloczyn przez pierwszy.

Że znaki proporcji i x opuścić możemy, jeżeli tylko trzy dane wyrazy w dobrym porządku napiszemy, rozumie się samo przez się. Mając następujący przykład:

6 funt. kosztuje 4 tal. 20 śr., ile kosztuje 11 funt.?
piszemy:

$$6 \text{ funt.} \quad 11 \text{ funt.} \quad 4 \text{ tal. 20 śr.}$$

$$51 \text{ tal. 10 śr.} \quad (11)$$

$$6) \quad 8 \text{ tal. 16 śr. 8 fen.}$$

Mając przykład:

4 cent. 40 funt. kosztują 5 tal. 6 sgr. 7 fen; ile kosztuje
6 cent. 25 funt.?

piszemy:

4 cent. 50 funt. — 6 cent. 25 funt. — 5 tal. 6 śr. 8 fen.

albo $4\frac{2}{3}$ — $6\frac{1}{4}$ — 5 tal. 6 śr. 8 fen.

albo $\frac{3^2}{4}$ — $\frac{2^2}{5}$ — 5 tal. 6 śr. 8 fen.

ale mnożyć przez $\frac{2^2}{5}$ znaczy przez 25 mnożyć a przez 4 dzielić,

dzielić $\frac{3^2}{4}$. 5 . 22

a zatem:

$$\begin{array}{r} 5 \quad 6 \quad 8 \\ \hline 5 \quad 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 130 \quad 16 \quad 8 \quad (25) \\ \hline 2 \quad 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 652 \quad 23 \quad 4 \quad (5) \\ \hline 4) 163 \quad 5 \quad 10 \end{array}$$

$$22) \quad 7 \text{ tal } 12 \text{ śr. } 6\frac{1}{4} \text{ fen.}$$

85. Wszystkie przykłady reguły trzech, w których między danymi wyrazami jedność zachodzi, t. j. w których jedność albo jest dana albo jest szukana, np.:

1 funt kosztuje 8 śr. 6 fen., ile kosztują 3 cent. 36 funt.?

albo

ile kosztuje 1 funt., jeżeli 8 funt. 16 łótów. 3 tal. 10 śr. kosztuje?

rozwiązują się łatwo bez proporcji. I tak możemy pierwszy przykład rozwiązać przez samo mnożenie, drugi przez samo dzielenie. Zamiast np. napisać:

albo

4 cent. 50 funt. — 10 tal. 25 śr. — 8 cent. 40 funt.

$$\frac{4\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{10\frac{5}{6}}{\frac{6}{6}}$$

$$\frac{8\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}$$

1 cent. kosztuje więc $\frac{1}{2} : \frac{6}{6} = \frac{65 \times 2}{6 \times 9} = \frac{65}{3 \cdot 9}$ tal.
$$\frac{4}{3} \text{ cent. kosztują zatem } \frac{42}{5} \times \frac{65}{3 \cdot 9} = \frac{42 \times 65}{5 \times 3 \times 9} = \frac{14 \cdot 13}{9}$$

$$1\frac{8}{9} = 20\frac{2}{3} \text{ tal.}$$

86. W końcu wyłożymy jeszcze niektóre skrócenia, których przy zadaniach reguły trzech użyć możemy, a za pomocą których mnożenie i dzielenie wielkimi liczbami zamienić możemy na mnożenie i dzielenie z małymi liczbami. Mnożymy i dzielimy bowiem chętniej z małymi liczbami więcej razy, jak wielkimi mniej razy; rachunek jest łatwiejszym i łatwiej błędów ustrzedz się można. W tym celu rozkładamy liczby na czynniki i liczby dodajne, np.:

$$24 = 8 \times 3 = 2 \times 4 \times 3$$

$$14 = 8 + 4 + 2,$$

przy czém, rozkładając liczbę jako sumę, na to uważać należy, aby każda następna liczba w poprzedniej bez reszty się mieściła, i tak jest np.:

$$14 = 8 + 4 + 2$$

$$1\frac{5}{6} = \frac{16 + 8 + 1}{16} = 1\frac{6}{16} + \frac{8}{16} + \frac{1}{16}$$

$$3\frac{3}{2} = \frac{16 + 4 + 2 + 1}{32} = 1\frac{6}{32} + \frac{4}{32} + \frac{2}{32} + \frac{1}{32}$$

I. Takie skrócone mnożenia mieliśmy już w (46 i 47); następujące więc tylko przykłady dajemy.

$$1) \quad \frac{24 \times 3 \text{ tal. } 4 \text{ śr. } 3 \text{ fen.}}{2 \times 3 \times 4} = \frac{6 \text{ tal. } 8 \text{ śr. } 6 \text{ fen. (2)}}{18 \text{ tal. } 25 \text{ śr. } 6 \text{ fen. (3)}} = \frac{75 \text{ tal. } 12 \text{ śr. } \cdot \text{ fen. (4)}}{1}$$

$$2) \quad \frac{24}{2 \times 3 \times 4} : \frac{75 \text{ tal. } 12 \text{ śr.}}{4) 18 \text{ tal. } 25 \text{ śr. } 6 \text{ fen.}} = \frac{6 \text{ tal. } 8 \text{ śr. } 6 \text{ fen.}}{2) 3 \text{ tal. } 4 \text{ śr. } 3 \text{ fen.}}$$

3) $1\frac{3}{2} \times 8$ tal. 5 śr. 8 fen.

Piszemy $1\frac{3}{2} = \frac{3}{2} = \frac{32 + 16 + 4 + 2 + 1}{32}$

Że zaś $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ od 1, $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ od $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{8} = \frac{1}{8}$ od $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16} = \frac{1}{16}$ od $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{32} = \frac{1}{32}$ od $\frac{1}{16}$ jest, piszemy:

8 tal. 5 śr. 8 fen.

1) 8 tal. 5 śr. 8 fen.

2) 4 tal. 2 śr. 10 fen.

4) 1 tal. — śr. 8½ fen.

2) — tal. 15 śr. 4¼ fen.

2) — tal. 7 śr. 8½ fen.

$\frac{1}{1}$ $\frac{3}{3}$
14 tal. 2 śr. 2½ fen.

4) $1\frac{3}{8} : 40$ tal. 20 śr. 10 fen.

Gdy przez $1\frac{3}{8}$ dzielić, to samo znaczy co przez $1\frac{3}{8}$ mnożyć, piszemy:

$1\frac{3}{8} \times 40$ tal. 20 śr. 10 fen.

$\frac{9 + 3 + 1}{18}$ 2) 20 tal. 10 śr. 5 fen.

3) 6 tal. 23 śr. 5¾ fen.

3) 2 tal. 7 śr. 9¾ fen.

$\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{1}$
29 tal. 11 śr. 8¾ fen.

II. I liczby imienne jako summy uważać i rozłożyć możemy, np.:

1) 10 tal. 25 śr. 3 fen. \times 222

| | | | | |
|-------|---|-------------------|-----|-----------|
| 15 | } | \times 222 daje | 111 | 2200 tal. |
| 5 | | | 37 | |
| 3 | | | 22 | 6 śr. |
| 1 — 6 | | | 11 | 3 |
| 9 | | | 5 | 16 |

25 — 3 2406 tal. 25 śr. 6 fen.

30 funt. 21 łót. 5 kwint. \times 52

15 30

5 1560

1 26

½ 3) 8 — 20

5) 1 — 22

2) — 26

1597 funt 8 łót.

III. Za pomocą tych reguł dadzą się często ale nie zawsze zadania reguły trzech skrócić, osobiłwie zaś te, które podług (84) przez same mnożenie lub dzielenie rozwiązać można. Np. 1 szefel kosztuje

$$\frac{12 \text{ tal.}}{10 + 2} \quad \frac{18 \text{ śr. 9 fen.}}{15} \quad ; \text{ ile kosztuje 864 szefli?}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ - 3 \\ \hline \end{array}$$

a zatem:

| | | |
|--------------------------|--------------|-------------------|
| 10×864 | | 8640 tal. |
| 2×864 | | 1728 . |
| $\frac{1}{2} \times 864$ | | 432 . |
| $\frac{1}{3} \times 432$ | | 86 . 12 śr. |
| $\frac{1}{6} \times 86$ | — 12 | 14 . 12 . |
| $\frac{1}{2} \times 14$ | — 12 | 7 . 6 . |
| | | 1 |
| | | <u>10908 tal.</u> |

Zadania na regułę trzech.

1. Za $8\frac{3}{4}$ śr. dostaniemy 11 funt 20 łót. jakiego towaru; ile kosztować będą 2 cent. 88 funt 16 łót. z tego samego towaru?
2. Garnizon z 840 ludzi się składający ma żywności na 6 miesięcy; jak długo ta żywność starczyć będzie, jeżeli garnizon ten o 250 ludzi się zwiększy?
3. Posłaniec pewien idąc codziennie $7\frac{3}{4}$ mili przychodzi w $11\frac{1}{2}$ dnia na koniec przedsięwziętej drogi; długoby on iść musiał, idąc codziennie $8\frac{1}{2}$ mili?
4. 13 robotników potrzebuje $2\frac{1}{2}$ dnia, aby ładunek zboża z okrętu na ląd znieść; ile czasu potrzebowałoby do tego 17 robotników?
5. Ile kosztują 4 cent. 84 funt. cukru, jeżeli za 5 funt 16 łót. zapłacić musimy 1 tal. 5 śr. 9 fen.?
6. Ze sukna $\frac{1}{2}$ szerokiego potrzebujemy na płaszcz $8\frac{1}{2}$ łokcia, ile potrzeba będzie sukna tylko $\frac{3}{4}$ łokcia szerokiego?
7. Jeżeli chleb 26 łótów waży, w czasie gdy ćwiartka zboża 13 śr. 6 fen. kosztuje, ile on ważyć może, gdy za szefel zboża 2 tal. 2 śr. 6 fen. zapłacić musimy?
8. Piekarz pewien zapłacił za 12 wenspli $11\frac{1}{2}$ szefla 260 tal. 18 śr. 9 fen.; ile zapłacić musiał za miech $6\frac{1}{2}$ szefla w sobie mieszczący?
9. Do obicia ściany potrzebujemy 140 łokci $\frac{3}{4}$ szerokich tapet, ile potrzeba tychże jeżeli $\frac{5}{8}$ są szerokie?
10. Jeżeli wydając miesięcznie 60 tal. 20 śr. gospodarstwo przez $1\frac{3}{4}$

roku utrzymać możemy; ile miesięcznie wydać możemy by gospodarstwo przez $2\frac{1}{2}$ roku utrzymać?

11. $2\frac{3}{4}$ cent. kosztuje 25 tal. 20 śr. 9 fen.; ile kosztuje 66 funt 22 łoty?

12. Aby drogę drzewami wysadzić potrzebujemy 2850 drzew, sadząc każde w oddaleniu $6\frac{1}{2}$ stopy; ile drzew potrzebować będziemy, sadząc każde drzewo o $1\frac{1}{4}$ stopy bliżej?

13. Ilu robotników za 222 tal. 6 śr. zatrudnić możemy, jeżeli 9 robotnikom 19 tal. 24 śr. zapłacić musimy?

14. Ktoś musi, by w 10 dniach 12 godzinach na miejsce przeznaczenia przybyć $14\frac{1}{2}$ mil codzień ujechać; ile mil musiałby on codzień jechać, chcąc drogę swą w 9 dniach 6 godzinach odprawić?

15. $20\frac{3}{4}$ łokcia kosztuje 82 tal. 20 śr.; ile zapłacić musimy za $11\frac{1}{2}$ łokcia?

16. Jeżeli 150 pszczoł jeden 16t wazy, ile wazy ul, w którym 18000 pszczoł się znajduje?

17. Człowiek dorosły, robiąc kroki $2\frac{1}{4}$ stopy długie, musi 24444 kroków zrobić, by drogę pewną przejść; ile kroków zrobi dziecko, którego kroki $1\frac{3}{8}$ stopy są długie?

18. Aby zmierzyć powierzchnią 82 stop kwadratowych wynoszącą potrzebujemy $9\frac{1}{4}$ stopy sześcienną gipsu; ile potrzeba gipsu na powierzchnią 12 przętów kwadrat. i 60 stóp kwadrat. wynoszącą?

19. Ile berlińskich funt. wazy stopa sześcienna wody, jeżeli takowa 70 paryskich funt. wazy a 9750 funt. paryskich są równe 10188 berlińskim?

20. Ile trzeba za 18 funt. $16\frac{3}{8}$ 16ta zapłacić, jeżeli 1 cent. 55. funt., 50 tal. 20 śr. kosztują?

21. Jeżeli furman za przewiezienie 1 centnarą ma do żądania 1 tal. 8 śr. 6 fen.; ile trzeba mu zapłacić za przewiezienie 8 cent. 88 funt.?

22. Jeżeli 3 pompy w 8 minutach 40 sekundach tyle wody dadzą, że takowa studnią pewną napelni; jak długo musielibyśmy 7 równodziałającymi pompami pompować?

23. 7 kamieni 19 funtów dają 1 cent 73 funt.; ile centnarów i funtów daje 112 kamieni 21 funtów?

24. Kupiec pewien kupił 6 cent. 80 funt. pewnego towaru płacąc funt po 16 śr. i wydał jeszcze przytém 14 tal. 15 śr.; po ile musi funt. przedawać, jeżeli na sprzedaży całego towaru 50 tal. zarobić ma?

III. Reguły złożone.

87. W regule trzech zachodzą zawsze tylko dwie różnogatunkowe rzeczy, przy regułach złożonych zaś więcej jak dwie; ponieważ każda z różnogatunkowych rzeczy dwa razy zachodzi, szukamy więc w regule trzech do trzech wyrazów, czwartego, przy regułach złożonych zaś do pięciu wyrazów szóstego, jeżeli trzy różnogatunkowe rzeczy zachodzą, do siedmiu wyrazów osmego, jeżeli cztery różnogatunkowe rzeczy zachodzą i t. d. Reguły złożone nazy-

wają się szczegółowo regułą pięciu, siedmiu, dziewięciu i t. d. jeżeli pięć, siedem, dziewięć etc. wyrazów jest znanych a szóstego, ósmego, dziewiątego i t. d. szukamy. Oznaki bliższe reguł złożonych są te same co reguły trzech, wyjawszy to, że więcej jak dwie różnogatunkowe rzeczy zachodzą. I tu odróżniamy warunek od pytania.

88. Każdy przykład reguł złożonych da się na tyle przykładów reguły trzech sprowadzić, ile wynosi o jedno zmniejszona w nim podana liczba różnogatunkowych rzeczy, i tak możemy sprowadzić regułę pięciu na dwie, regułę siedmiu na trzy i t. d. reguły trzech.

15 rębaczy urąbało przez 5 tygodni, pracując w tygodniu 4 dni po 8 godzin, 200 sążni drzewa; ile godzin musi codziennie 32 rębaczy pracować, aby pracując przez 6 dni w tygodniu w przeciągu 7 tygodni 1120 sążni urąbać mogli?

W. 15 rob. - 5 tyg. - 4 dni - 8 godz. - 200 sążni
P. 32 . . - 7 . . - 6 . . - x . . - 1120 . .

Przykład ten przez cztery następujące reguły trzech obrachować możemy:

1. 15 rębaczy musi, aby pewną ilość drzewa zrąbać, codziennie 8 godzin pracować, ile godzin do tej samej pracy 32 rębaczy codzien potrzebować będzie:

$$32 : 15 = 8 : x$$

$$x = 3\frac{3}{4} \text{ godzin.}$$

2. Pracując $3\frac{3}{4}$ godziny codziennie robotę pewną ukończymy w 5ciu tygodniach; ile godzin codziennie pracować trzeba, aby tę samą robotę w 7 tygodniach ukończyć?

$$7 : 5 = 3\frac{3}{4} : x$$

$$x = 2\frac{1}{8} \text{ godzin.}$$

3. Pracując na dzień przez $2\frac{1}{8}$ godziny musimy, chcąc robotę pewną ukończyć, przez 4 dni w tygodniu pracować; jak długo tylko codziennie pracować musielibyśmy, pracując przez wszystkie 6 dni w tygodniu?

$$6 : 4 = 2\frac{1}{8} : x$$

$$x = 1\frac{1}{4} \text{ godzin.}$$

4. Pracując codziennie przez $1\frac{1}{4}$ godziny urąbamy 200 sążni; jak długo codziennie pracować musimy, aby 1120 sążni urąbać?

$$200 : 1120 = 1\frac{1}{4} : x$$

$$x = 10 \text{ godzin.}$$

i to jest liczbą szukaną. Łatwo tu przekonać się możemy, że pierwszy przykład podaje nam liczbę codziennych godzin zależną tylko od liczby robotników; drugi podaje nam liczbę codziennych godzin zależną od liczby robotników i od całego czasu do pracy przeznaczonego; trzeci podaje nam liczbę codziennych godzin zależną od liczby robotników, od czasu do pracy przeznaczonego i od liczby dni w tygodniu do pracy użytych; a czwarty dopiero podaje nam liczbę szukaną godzin zależną od liczby robotników, od długości czasu do pracy przeznaczonego, od liczby dni w tygodniu do pracy użytych i od ilości zrabac się mających sążni.

89. Podpisując te cztery proporcey, któreśmy w (88) otrzymali pod sobą i kładąc w trzy pierwsze z nich wartości dla nieznanomych wyrazów otrzymane, możemy z nich podług znomych reguł złożoną proporeyą utworzyć i otrzymamy takim sposobem:

$$\begin{array}{rcl} 32 : 15 = 8 & : & 3\frac{3}{4} \\ 7 : 5 = 3\frac{3}{4} & : & 2\frac{1}{2} \\ 6 : 4 = 2\frac{1}{2} & : & 1\frac{1}{4} \\ 200 : 1120 = 1\frac{1}{4} & : & x \end{array}$$

$$32 \times 7 \times 6 \times 200 : 15 \times 5 \times 4 \times 1120 = 8 : x.$$

Rozkładając stosunek złożony na stosunki pojedyncze, otrzymamy z poprzedniej formy następującą:

$$\left. \begin{array}{l} 32 : 15 \\ 7 : 5 \\ 6 : 4 \\ 200 : 1120 \end{array} \right\} = 8 : x.$$

Znosząc wyrazy zewnętrzne 32, 7, 6, 200 z wyrazami wewnętrznymi 15, 5, 4, 1120 i 8, otrzymamy także $1 : 5 = 2 : x$, a zatem $x = 10$ jak w (88). Z tego wynika reguła następująca, podług której najłatwiej wszelkie przykłady reguł złożonych rozwiązać możemy:

Piszemy warunek i pytanie, kładziemy nieznanomy wyraz na czwarte miejsce proporcey a równoimienny z nim wyraz na trzecie, — z lewej strony znaku równości robimy nawias i piszemy w nim tyle stosunków pod sobą, ile jeszcze różnogatunkowych rzeczy w zadaniu mamy, porównywając każdą z tych różnogatunkowych rzeczy z tą, do której wyrazu braknie i tworząc podług reguł przy regule trzech wyłożonych stosunek, t. j. podług tej reguły że, jeżeli różnogatunkowe rzeczy wprost na siebie działają, wy-

raz warunku na pierwsze, wyraz zaś pytania na drugie miejsce przyjść musi, a jeżeli zaś te różnogatunkowe rzeczy odwrotnie na siebie działają, wyraz pytania na pierwszym, wyraz zaś warunku na drugim miejscu w proporcji stać będzie.

Dalszy rachunek jest taki sam jak przy regule trzech. Próbę reguł złożonych robimy znów przez przykład reguł złożonych.

Zadania.

1. Forteca pewna mająca 4500 żołnierzy załogi jest na 8 miesięcy w żywność opatrzoną, jeżeli każdy żołnierz codziennie $2\frac{1}{2}$ funt. chleba dostanie; jeżeli jeszcze 600 żołnierzy przybędzie i jeżeli załoga przez 10 miesięcy trzymać się ma; ile funtów tylko codziennie każdy żołnierz dostać będzie mógł?

2. 18 koni potrzebuje na tydzień $15\frac{1}{2}$ szefla owsa; ile szefli owsa potrzeba dla 98 koni na 12 tygodni?

3. Pewna liczba robotników wymuruje w 25 dniach mur 32 stóp długi, 8 stóp wysoki i $3\frac{1}{2}$ stopy szeroki; ile czasu potrzebować będą ci sami robotnicy, aby wymurować mur 40 stóp długi, 12 stóp wysoki i 2 stopy szeroki?

4. Ile łokci $\frac{3}{4}$ szerokiego płótna można z 88 funtów przędzy zrobić, jeżeli z 9 funtów przędzy 40 łokci $\frac{3}{4}$ szerokiego płótna zrobić możemy?

5. 25 ludzi usypało wał pewien pracując codziennie po 12 godzin przez 28 dni; ile czasu potrzebować będzie 30 ludzi aby, pracując codziennie po 15 godzin, taki sam wał usypać?

6. 16 robotników wybuduje w 8 miesiącach dom 44 stóp długi, 37 stóp wysoki i 28 stóp szeroki; ile czasu potrzebować będzie 20 robotników do wybudowania domu 42 stóp długiego, 32 stóp wysokiego i 30 stóp szerokiego?

7. Właściciel pewnej fabryki daje każdemu ze swych 18 robotników 4 funty chleba codziennie, w czasie kiedy szefel zboża 2 tal. 5 śr. kosztuje; ile funtów będzie on mógł dać codziennie, jeżeli jeszcze 4 robotników przyjmie i szefel zboża tylko 1 tal. 20 śr. kosztuje?

8. W jakim czasie może 18 robotników ulicę 24 stóp szeroką wybrukować, jeżeli 16 robotników równie długą ale $14\frac{1}{2}$ stopy szeroką ulicę w 12 dniach wybrukowało?

9. Ciesla pewien płaci 40 robotnikom na tydzień, w którym przez 6 dni po 10 godzin pracowali, 132 tal. 20 śr.; ile zapłacić będzie musiał 46 robotnikom za 6 tygodni, jeżeli ci tygodniowo przez 5 dni po 12 godzin pracowali?

10. Za 3 sztaby żelaza 18 stóp długie, $\frac{1}{2}$ stopy szerokie i $\frac{1}{2}$ stopy grube zapłaciliśmy 15 tal. 20 śr.; ile zapłacimy za 12 sztab żelaza 22 stóp długich $\frac{1}{2}$ stopy szerokich i $\frac{1}{2}$ stopy grubych?

11. 14 osób płaci na pocztę za 97 mil 448 tal.; jak daleko zajędzie 9 osób za 300 tal.?

12. 16 robotników wykopie rów 720 stóp długi w 4 tygodniach; ilu robotników potrzeba do wykopania w dwóch tygodniach rowu również szerokiego i głębokiego, ale 225 stóp długiego?

ROZDZIAŁ V.

0 regułach procentu, czasu i zamiany.

Rachunki te są rachunkami proporcji, osobliwie zaś reguły trzech i tylko dla szczegółowych własności osobne mają nazwiska.

I. Reguła procentu.

A. Reguła procentu pojedynczego.

90. We wszystkich przykładach reguły procentu cztery tylko różnogatunkowe rzeczy zachodzić mogą: *kapitał, prowizya, procent i czas*. Z tych mogą być równocześnie tylko dwie, albo trzy albo nareszcie wszystkie cztery rzeczy dane, tak iż przykład reguły procentu niezem innym nie będzie, jak tylko regułą trzech albo jaką z reguł złożonych, jak w ostatnim razie regułą pięciu lub siedmiu.

Kapitałem nazywamy każdą summę pieniędzy, którą jedna osoba drugiej pożyczca; *wierzycielem* nazywa się ta osoba, która pieniądze daje, *dłużnikiem* zaś ta, która odbiera. *Prowizyą* stanowią pieniądze, które dłużnik wierzycielowi od pożyczonego kapitału płaci, przyczem zaraz się ułoży ile tal., zł. i t. d. za 100 tal., zł. i t. d. *na rok* płacić się ma. Prowizyą od kapitału 100 za jeden rok nazywamy *procentem*. Jeżeli więc taki przykład mamy: Paweł pożyczca Janowi 2000 tal. po 4 od sta ($\frac{4}{100}$) i pytamy się ile Jan prowizyi po 6 latach otrzyma, wtedy jest: Paweł wierzycielem, Jan dłużnikiem, 2000 kapitałem, 4 procentem, 6 lat czasem, a x prowizyą.

Jeżeli od kapitału pewnego corocznie lub po kilku latach regularnie bez wszelkiej podwyższki prowizyą odbieramy, mamy wtedy *prowizyą czyli przychód pojedynczy*; jeżeli zaś prowizyą corocznie do kapitału dokładamy i jeżeli ta prowizya znów procenta nowe przynosi, prowizyą tak rosnącą nazywamy *przychodem albo prowizyą złożoną*. Chcąc pierwszą lub drugą obrachować trudnimy się regułami procentu pojedynczego lub złożonego.

91. Uważając ze czterech różnogatunkowych rzeczy, — kapitału, prowizyi, procentu i czasu, — we warunkuach i pytaniu dwie, jedną albo żadną jako równe, otrzymamy regułę trzech, pięciu albo siedmiu. Rachujemy tu także podług reguł, dla reguły trzech i dla reguł złożonych, wyżej podanych; na to tylko dokładnie zważać musimy, jak podane różnogatunkowe rzeczy na siebie działają.

Kapitał i prowizya stoją do siebie w *prostym stosunku*, gdyż większy kapitał przynosi większą prowizyą i odwrotnie. — *Kapitał i procenta* stoją do siebie w *odwrotnym stosunku*, gdyż im większy kapitał za tém mniejsze procenta wypożyczonym być może, aby w tym samym czasie pewną prowizyą przyniósł. — *Kapitał i czas* stoją także do siebie w *stosunku odwrotnym*, gdyż większy kapitał na krótszy czas wypożyczonym być potrzebuje, aby pewną przynieść prowizyą. — *Prowizya i procenta* stoją do siebie w *stosunku prostym*, gdyż im więcej prowizyi od kapitału pewnego mieć chcemy, tém większe procenta brać musimy. — *Prowizya i czas* stoją do siebie w *stosunku prostym*, gdyż im dłużej kapitał jaki jest wypożyczonym, tém większą prowizyą przynosi. — *Procenta i czas* nakoniec stoją do siebie w *stosunku odwrotnym*, gdyż im niższe są procenta, tém dłużej kapitał wypożyczonym być musi, aby pewną przyniósł prowizyą.

92. 1. Ile prowizyi przyniesie 4800 tal. przez rok po $5\frac{1}{2}\%$, t. j. ile prowizyi przyniesie 4800 tal., jeżeli od 100 tal. $5\frac{1}{2}\%$ tal. dostaniemy? mamy tutaj:

$$100 : 4800 = 5\frac{1}{2} : x$$

$$x = \frac{5\frac{1}{2} \times 4800}{100} \text{ i t. d.}$$

z czego zaraz wynika, że prowizyą jednoroczą od kapitału danego bez ustawienia proporcji znajdziemy, mnożąc tylko ten kapitał przez procenta a iloczyn wypadły dzieląc przez 100.

2. Ile prowizyi przyniesie 4800 tal. po 5% w 3 latach 6 miesiącach, t. j. ile prowizyi przyniesie 4800 tal. w 3 latach 6 miesiącach, jeżeli 100 tal. w jednym roku 5 tal. prowizyi przyniesie. W przykładach tego rodzaju stawiamy jakby samo tylko pytanie, dorozumiewając się niewyraźnie podanego warunku, i tak mamy:

W. x tal. P. - 4800 tal. K. - 3 lata 6 mies.

P. 5 100 1

z tego otrzymamy:

$$\left. \begin{array}{l} \text{tal. K. } 100 : 4800 \\ \text{lata } 1 : 3\frac{1}{2} \end{array} \right\} = 5 : x$$

$$\text{a więc } x = \frac{3\frac{1}{2} \times 5 \times 4800}{100} \text{ i t. d.}$$

z czego zaraz wynika, że chcąc kilkoletnią prowizją obrachować, reguł złożonych łatwo uniknąć możemy; gdyż w wyrażeniu dla x znalezionym podaje nam ułamek $\frac{5 \times 4800}{100}$

już prowizją jednoroczną od kapitału 4800 po 5 $\%$, aby więc kilkoletnią prowizją znaleźć potrzeba tylko podług reguł w (1) wyłożonych prowizją jednoroczną obrachować i liczbę wypadłą przez liczbę lat pomnożyć. — 4000 tal. wypożyczone po 6 $\%$ przynosi:

$$\begin{array}{r} \text{w 1 roku prowizyi } \frac{6 \times 4000}{100} = 240 \text{ tal.} \\ \text{. 2 . . . } \frac{2 \times 6 \times 4000}{100} = 480 \text{ tal.} \\ \text{. 3 . . . } \frac{3 \times 6 \times 4000}{100} \text{ i t. d.} \\ \text{. 10 . . . } \frac{10 \times 6 \times 4000}{100} \text{ i t. d.} \end{array}$$

3. Nakoniec mogą także w przykładach reguły procentu wszystkie cztery różnogatunkowe rzeczy po dwa razy zachodzić, co zawsze ma miejsce jeżeli w zadaniu nie kapitał 100 i jako czas nie jeden rok zachodzi: Ile prowizyi przynosi 5000 tal. wypożyczonych na 6 lat po 5 $\%$, jeżeli 1000 tal. wypożyczonych na 8 lat po 4 $\%$ 320 tal. prowizyi przynosi. Podług przepisów, dla reguł złożonych danych, piszemy:

$$\begin{array}{l} \text{P. } x \text{ prowizyi} - 5000 \text{ tal. kap.} - 5 \text{ } \% - 6 \text{ lat.} \\ \text{W. } 320 \text{ . . . } - 1000 \text{ . . . } - 4 \text{ } \% - 8 \text{ .} \end{array}$$

i tak będzie:

$$\left. \begin{array}{l} 1000 : 5000 \\ 4 : 5 \\ 8 : 6 \end{array} \right\} = 320 : x$$

z czego wypada:

$$x = \frac{3000 \times 5 \times 6 \times 320}{1000 \times 4 \times 8} = 1500 \text{ tal.}$$

Przekonać się tu łatwo możemy, że x także dobrze obrachowaniem być może, chociaż druga część zadania t.j. warunek nie jest danym, gdyż wtedy mamy przykład pod numerem (2) obracho-

Zadania.

1. Ile prowizji przynosi 4444 tal. 20 śr., jeżeli 3250 tal., 1400 tal. 15 śr. prowizji przyniosło?
2. Ile przynosi roczna prowizya od 8440 tal. 25 śr. rachując po $4\frac{1}{2}\%$ od sta?
3. Jak wielka jest prowizya od 80000 tal. po $5\frac{1}{4}\%$ w 25 latach?
4. Po ile od sta musimy brać, wypożyczywszy 4000 tal. 15 śr. na $4\frac{1}{2}$ lat, aby prowizya z tego wypadła równą była prowizji od 5000 tal. po $3\frac{1}{2}\%$ w 6 latach wypadłej?
5. Po ile były wypożyczone 5000 tal., jeżeli takowe w $7\frac{1}{2}$ lat 1500 tal. prowizji przyniosły?
6. Jak długo musi być 3560 tal. po $4\frac{3}{4}\%$ wypożyczonych, aby 2080 tal. 20 śr. prowizji przyniosły?
- * 7. Jaki kapitał po $5\frac{1}{2}\%$ wypożyczony przyniesie w 10 latach i 8 miesiącach 4444 tal. prowizji?
8. Jak wielkim jest ten kapitał, który w 5 miesiącach taką samą prowizyą przyniesie, jak 1800 tal. w 1 roku i 6 miesiącach?
9. 400 tal. przynoszą w 8 latach 160 tal. prowizji, po ile od sta brałiśmy na rok?
10. Jak długo muszą 4000 tal. po $4\frac{1}{2}\%$ być wypożyczone, aby 3200 prowizji przyniosły?
11. Po ile bierzemy od sta na rok, jeżeli 20000 tal. w 10 latach 10000 tal. prowizji przyniesie?
12. Jak wielki jest kapitał, który po $4\frac{3}{4}\%$ wypożyczony w $8\frac{1}{2}$ lat 462 $\frac{1}{2}$ tal. prowizji przyniesie?

93. Często mamy zawikłańsze zadania do rozwiązywania, jeżeli kilka kapitałów za różne lub równe procenta, na nierówny lub równy czas wypożyczamy i prowizyą ogólną obrachować mamy. Często także musimy procenta w przecięciu t. j. średnią stopę procentową obrachować. Z reguł wyżej wyłożonych dadzą się przy rozwiązaniu tych zadań łatwiejsze reguły wyprowadzić, jak to, co następuje, bliżej okaże:

1) Różne kapitały są za różne procenta na różny czas wypożyczone, mamy ogólną prowizyą na sposób najkrótszy obrachować, — np. 800 tal. są na 5 lat po 3% wypożyczone 1200 tal. na 4 lata po 4% i 700 tal. na $4\frac{1}{2}$ lat po 5% , ile wynosi ogólna prowizya?

Jasnym samo przez się jest, że tutaj trzy przykłady reguły procentu mamy; jeżeli więc takowe obrachujemy i wypadki do siebie dodamy, otrzymamy liczbę szukaną; mamy więc podług (92).

$$\begin{array}{r}
 800 \text{ tal. po } 3\% \text{ na } 5 \text{ lat dają } \frac{5 \cdot 3 \cdot 800}{100} \\
 1200 \cdot \cdot \cdot 4 \cdot \cdot \cdot 4 \cdot \cdot \cdot \frac{4 \cdot 4 \cdot 1200}{100} \\
 700 \cdot \cdot \cdot 5 \cdot \cdot \cdot 4\frac{1}{2} \cdot \cdot \cdot \frac{4\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 700}{100} \\
 \text{Ogólna prowizya jest więc } \frac{5 \cdot 3 \cdot 800 + 4 \cdot 4 \cdot 1200 + 4\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 700}{100}
 \end{array}$$

t. j. mnoży się każdy kapitał przez procenta i czas, iloczyny te dodają się do siebie i summa takowych dzieli się przez 100.

Przykład taki zwykle więc tak się rachuje:

$$\begin{array}{r}
 800 \cdot 3 \cdot 5 = 12000 \\
 1200 \cdot 4 \cdot 4 = 19200 \\
 700 \cdot 5 \cdot 4\frac{1}{2} = 15750 \\
 \hline
 46950 = 469 \text{ tal. } 15 \text{ śr.}
 \end{array}$$

Jako postępowanie takie nie jest fałszywém, tak okazać możemy: 800 tal. po 3% wypożyczone dają to samo co 2400 tal. po 1% wypożyczone i 2400 tal. przyniosą w 5 latach tyle prowizyi, ile przyniesie 5 · 2400 = 12000 tal. w 1 roku, a zatem przyniosą 800 tal. po 3% w 5 latach tyle, ile 12000 tal. po 1% w jednym roku. To samo powiedzieć się da o każdym innym kapitale z jego procentami i czasem. Takim sposobem otrzymamy następujący przykład reguły procentu pojedynczego: Ile prowizyi przyniesie 46950 tal. w jednym roku po 1%?

$$\text{oczywiście } \frac{1 \cdot 46950}{100} = 469,5 \text{ tal.}$$

2) Różne kapitały są za równe procenta na różny czas wypożyczone; mamy na drodze najkrótszej ogólną prowizyą obrachować, — np. 800 tal. jest na 3 lata, a 1200 tal. na 4 lata, a 700 tal. na 5 lat po 4% wypożyczonych; ile wynosi ogólna prowizya?

Widoczném jest samo przez się, że tu podług reguły w (1) wyłożonych postąpić możemy; — będzie zatem:

$$\begin{array}{r}
 800 \cdot 3 \cdot 4 = 9600 \\
 1200 \cdot 4 \cdot 4 = 19200 \\
 700 \cdot 5 \cdot 4 = 14000 \\
 \hline
 428,00 = 428 \text{ tal. } 00\frac{1}{2}
 \end{array}$$

Tak też wnosić tu możemy: wszystko jedno jest czy 800 tal. na 3 lata lub też czy 2400 tal. na 1 rok wypożyczymy,

czy 1200 tal. na 4 lata lub téż czy 4800 tal. na 1 rok, zawsze jednak za te same procenta i t. d. ale

$$\begin{array}{l} 2400 \text{ tal. na 1 rok po } 4\% \text{ i} \\ 4800 \cdot \cdot \cdot 1 \cdot \cdot \cdot 4\% \text{ i} \\ 3500 \cdot \cdot \cdot 1 \cdot \cdot \cdot 4\% \text{ jest to samo} \end{array}$$

co 10700 tal. na 1 rok po 4% wypożyczone, — to daje zaś:

$$x = \frac{4 \cdot 10700}{100} = 428 \text{ tal.}$$

Jeżeli więc różne kapitały za równe procenta na różny czas wypożyczamy i ogólną prowizyą obrachować chcemy podług następującej postępujemy reguły: mnożymy kapitał przez czas, iloczyny dodajemy do siebie i do summy wypadłej szukamy rocznej prowizyi sposobem zwyczajnym. Taką więc otrzymamy formę:

$$\begin{array}{r} 800 \cdot 3 = 2400 \\ 1200 \cdot 4 = 4800 \\ 700 \cdot 5 = 3500 \\ \hline 10700 \\ 100 : 10700 = 4 : x \\ x = \frac{4 \cdot 10700}{100} = 4 \cdot 107 = 428 \text{ tal.} \end{array}$$

3) Różne kapitały są na równy czas, ale za nierówne procenta wypożyczone; mamy na drodze najkrótszej ogólną prowizyą obrachować, — np. 400 tal. jest po 4%, 700 tal. po 6%, 900 tal. po 5% na 3 lata wypożyczonych; ile wynosi ogólna prowizya?

Podług reguł w (1) wyłożonych tak rachować możemy:

$$\begin{array}{r} 400 \cdot 4 \cdot 3 = 4800 \\ 700 \cdot 6 \cdot 3 = 12600 \\ 900 \cdot 5 \cdot 3 = 13500 \\ \hline 309,00 = 309 \text{ tal.} \end{array}$$

Ale i tak wnosić możemy: wszystko jedno jest, czy 400 tal. po 4% lub téż czy 1600 tal. po 1% jest wypożyczonych, czy 700 tal. po 6% lub téż czy 4200 po 1% i t. d. naturalnie na jeden i ten sam czas; ale

$$\begin{array}{l} 1600 \text{ tal. po } 1\% \text{ na } 3 \text{ lata i} \\ 4200 \cdot \cdot \cdot 1\% \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \text{ i} \\ 4500 \cdot \cdot \cdot 1\% \cdot 3 \cdot \cdot \cdot \text{ jest to samo co} \end{array}$$

10300 tal. po 1% na 3 lata wypożyczonych, — z tego zaś taki otrzymamy przykład: ile prowizyi przynosi

10300 tal., jeżeli je po 1 ⅔ na 3 lata wypożyczymy; z tego wypada:

P. x tal. Pr. — 10300 tal. K. — 3 lata.
W. 1 . . . — 100 . . . — 1 rok

a z tego:

$$\left. \begin{array}{l} 100 : 10300 \\ 1 : 3 \end{array} \right\} = 1 : x$$

a zatem $x = \frac{3 \times 10300}{100} = 309 \text{ tal.}$

Następującą więc takim sposobem otrzymamy regułę: jeżeli różne kapitały na równy czas za różne procenta wypożyczymy, znajdziemy ogólną prowizyą, gdy każdy kapitał przez przynależne procenta pomnożymy, iloczyny do siebie dodamy, summę wypadłą przez czas pomnożymy i nakoniec przez 100 podzielimy. Jeżeli więc tylko prowizyą roczną znaleźć chcemy, potrzeba tylko summę iloczynów z kapitałów przez procenta przez 100 podzielić. Takim sposobem tę otrzymamy formę:

$$\begin{array}{r} 400 \times 4 = 1600 \\ 700 \times 6 = 4200 \\ 900 \times 5 = 4500 \\ \hline 10300 \end{array}$$

Za jeden rok więc 103 tal.

Za 3 lata $103 \times 3 = 309 \text{ tal. i t. d.}$

4) Kilka kapitałów jest za różne procenta na równy czas wypożyczonych; chcemy procenta w przecięciu obrać, t. j. chcemy się dowiedzieć ile od sta od wszystkich kapitałów brać musielibyśmy, aby kapitały dane w tym samym czasie tę samą prowizyą przyniosły. Np. 3600 tal. jest po 5 ⅔, 1800 tal. po 4 ½ ⅔ i 4400 tal. po 6 ⅔ na równy czas wypożyczonych, — jakie procenta otrzymamy w przecięciu czyli jaka jest średnia stopa procentowa?

Summa kapitałów jest $3600 + 1800 + 4400 = 9800 \text{ tal.}$ a chcemy wiedzieć za jakie procenta moglibyśmy 9800 tal. wypożyczyć, aby te taką samą prowizyą przyniosły, jak pojedyncze kapitały za różne procenta wypożyczone. Otrzymamy to, jeżeli kapitały za różne procenta wypożyczone zamienimy na kapitały równe procenta po jednym od sta przynoszące, te ostatnie kapitały do siebie dodamy i potem następującą regułę trzech ułożymy: jeżeli ta summa po 1 ⅔ wypożyczona pewną prowizyą przynosi, za jakie procenta

możemy summę pierwotnych kapitałów wypożyczyć t. j. 9800 tal., aby taką samą prowizyą otrzymać?

Jest bowiem wszystko jedno czy 3600 tal. po $5\frac{0}{8}\%$ lub czy 18000 tal. po $1\frac{0}{8}\%$ wypożyczymy, czy 1800 tal. po $4\frac{1}{2}\frac{0}{8}\%$ lub czy 8100 tal. po $1\frac{0}{8}\%$, a zatem mamy:

$$\begin{array}{r} 3600 \times 5 = 18000 \\ 1800 \times 4\frac{1}{2} = 8100 \\ 4400 \times 6 = 26400 \\ \hline 9800 \qquad \qquad 52000 \end{array}$$

Za jakie procenta musimy 9800 tal. wypożyczyć, ażeby one taką samą prowizyą dały, jak 52500 tal. po $1\frac{0}{8}\%$ wypożyczonych?

$$9800 : 52500 = 1 : x$$

$$x = \frac{52500}{9800} = \frac{525}{98} = 5\frac{35}{98}\frac{0}{8}\%$$

Chcąc więc procenta w przecięciu czyli średnią stopę procentową obrachować postępujemy tak: mnożymy każdy kapitał przez przynależne procenta, dodajemy wypadłe iloczyny i dzielimy tę summę przez summę danych kapitałów.

Przykłady.

1. 2800 tal. jest na 5, 4000 tal. na 10, 2700 tal. na 7, 3300 tal. na 8 lat po $4\frac{1}{2}\frac{0}{8}\%$ wypożyczonych, jak wielką jest ogólna prowizya?

2. 4800 tal. jest po $4\frac{1}{2}\frac{0}{8}\%$, 8400 tal. po $5\frac{1}{2}\frac{0}{8}\%$ i 4855 tal. po $5\frac{0}{8}\%$ na 10 lat wypożyczonych; jak wielką jest cała prowizya?

3. 8000 tal. jest po $5\frac{0}{8}\%$ na 6 lat, 4925 tal. po $4\frac{0}{8}\%$ na $5\frac{1}{2}$ lat, 4000 tal. po $4\frac{1}{2}\frac{0}{8}\%$ na $7\frac{3}{4}$ lat i 2040 tal. po $6\frac{0}{8}\%$ na 10 lat wypożyczonych; jak wielką jest ogólna prowizya?

4. 4080 tal. jest po $5\frac{0}{8}\%$, 8750 tal. po $4\frac{0}{8}\%$, 4488 tal. po $3\frac{1}{2}\frac{0}{8}\%$ i 7000 tal. po $5\frac{1}{2}\frac{0}{8}\%$ na równy czas wypożyczonych; ile wynoszą procenta w przecięciu czyli jak wielką jest średnia stopa procentowa?

5. Jaką prowizyą przynosi 4900 tal. po $3\frac{3}{4}\frac{0}{8}\%$ na $5\frac{1}{2}$ lat, 870 tal. po $4\frac{1}{2}\frac{0}{8}\%$ na $8\frac{3}{4}$ lat i 6000 tal. po $4\frac{0}{8}\%$ na 12 lat wypożyczonych?

6. Jakie procenta otrzymamy w przecięciu chcąc taką samą dostać prowizyą, jaką dają 28999 tal. po $3\frac{1}{2}\frac{0}{8}\%$ i 48866 tal. po $5\frac{1}{2}\frac{0}{8}\%$ wypożyczonych?

7. Jaka jest prowizya za lat 12 od 4200 tal. po $4\frac{1}{2}\frac{0}{8}\%$, od 48000 tal. po $5\frac{1}{2}\frac{0}{8}\%$, od 1800 tal. po $3\frac{3}{4}\frac{0}{8}\%$ i od 5555 tal. po $5\frac{0}{8}\%$ wypożyczonych?

8. Jaka jest ogólna prowizya od 8000 tal. na lat $7\frac{1}{2}$, od 4333 tal. na lat $3\frac{1}{2}$ i od 84624 tal. na $14\frac{3}{4}$ lat po $3\frac{3}{4}\frac{0}{8}\%$ wypożyczonych?

B. Reguła przychodu złożonego.

94. Gdy przy wypożyczeniu pieniędzy na procenta złożone, w drugim roku kapitał wypożyczony i jego prowizya z pierwszego roku znów się procentuje; w trzecim roku ka-

pital, prowizya z pierwszego roku, kapitału i prowizyi pierwszoroocznej prowizye drugoroczne znów się procentują i t. d. widzimy więc, że reguła procentu złożonego na tyle przykładów reguły procentu pojedynczego lub reguł trzech rozłożyć się da, ile lat w zadaniu jest podanych, gdyż roczne prowizye od coraz większych kapitałów tylko obrachowane i do siebie dodane być muszą. Gdy prowizye złożone przez wiele lat obrachować mamy, przekonamy się, że obrachowanie takie jest bardzo trudnym, i często przez całe życie obrachować się nie dającym, np. jeżeli się pytamy, wypożyczwszy fenyg w roku narodzenia Chrystusa na procenta złożone, ile będziemy dziś mieli pieniędzy, — co nadzwyczajnie wielką summę pieniędzy daje. Łatwem jest jednak obrachowanie procentu złożonego przez logarytmy, których teorya w wyższych klassach szkół wyższych wykładaną bywa. Następujący więc tu tylko dajemy przykład: Ile wynosi przychód złożony od 10000 tal. jeżeli takowe po 5% na 4 lata wypożyczymy?

Za 1 rok;

$$1) 100 : 10000 = 5 : x \quad \text{więc } x = 500$$

Za 2 rok;

$$2) 100 : 10500 = 5 : y \quad \text{więc } y = 525$$

Za 3 rok;

$$3) 100 : 11025 = 5 : z \quad \text{więc } z = 551\frac{1}{4}$$

Za 4 rok:

$$4) 100 : 11576\frac{1}{4} = 5 : w \quad \text{więc } w = 578\frac{1}{8}$$

$$\text{razem więc} = 2155\frac{1}{8} \text{ tal.}$$

Kapitał ten 10000 tal. po 5% na procenta pojedyncze na lat 4 wypożyczony, przyniósłby tylko $4 \times 500 = 2000$ tal., a zatem $155\frac{1}{8}$ tal. mniej. Ponieważ procenta złożone ze szkoda dłużnika bardzo prędko rosną, jest więc wypożyczanie pieniędzy na procenta złożone w ogóle zakazanem.

II. Reguła czasu.

95. Reguła ta stoi w bardzo ścisłym związku z regułą procentu, gdyż w obydwóch rachunkach zachodzą kapitał, prowizya, czas i procenta. Uczy ona nas wyznać czas, w którym różne kapitały za różne lub równe procenta na różny czas wypożyczone bez szkody wierzyciela i dłużnika na raz wypłaconemi być mogą. Czas ten wypłaty nazywa się *terminem*; a reguła czasu uczy nas *termin* znać, w którym równe lub nierówne na różny czas wypożyczone

kapitały, bez szkody wierzyciela i dłużnika na raz wypłaconemi być mogą. Termin ten jest zawsze średnim terminem z terminów dla danych kapitałów, podobnie jak średnia stopa procentowa w regule procentu. I tak widocznem jest, że wypożyczwszy 800 tal. po 4 % na lat 8 i 500 tal. po 6 % na 4 lata, pewien czas między 4 i 8 latami leżący znaleźć musimy, w którym 800 tal. po 4 % i 500 tal. po 6 % tyle prowizyi przyniosą, jak kiedy 800 tal. po 4 % na lat 8 i 500 tal. po 6 % na lat 4 są wypożyczone.

96. 1. Kapitały, procenta i czasy są różne a mamy termin wypłaty oznaczyć. I tak np. są wypożyczone:

| | | | |
|----------|---------------|----------|---|
| 500 tal. | po 6 % | na 5 lat | |
| 800 | · · · 4 · · · | 7 · · · | i |
| 600 | · · · 5 · · · | 4 · · · | |

Tak tutaj jak i dawniej wnosić możemy: 500 tal. po 6 % wypożyczonych daje to samo co $6 \times 500 = 3000$ tal. po 1 % wypożyczonych, a 3000 tal. na 5 lat wypożyczonych jest to samo co 15000 tal. na 1 rok wypożyczonych, i t. d. będzie więc:

$$\begin{array}{r} 500 \times 6 \times 5 = 15000 \\ 800 \times 4 \times 7 = 22400 \\ 600 \times 5 \times 4 = 12000 \\ \hline 49400 \end{array}$$

Te 49400 tal. przynoszą po 1 % w jednym roku tyle prowizyi ile kapitały 3000 tal. w 5, 3200 tal. w 7, 3000 tal. w 4 latach po 1 % wypożyczone i tyle też ile przynoszą za różne procenta na różne czasy wypożyczone dane kapitały; tak więc teraz wnioskować możemy:

Te 49400 tal. przynoszą w jednym roku pewną prowizyą, w jakim czasie przyniesie $3000 + 3200 + 3000 = 9200$ tal. taką samą prowizyą?

$$9200 : 49400 = 1 : x$$

$$x = \frac{49400}{9200} = \frac{494}{92} = \frac{247}{46} = 5\frac{17}{46} \text{ lat.}$$

Całemu rachunkowi więc następującą formę nadać możemy:

| | |
|----------------|------------------|
| 500 · 6 = 3000 | 3000 · 5 = 15000 |
| 800 · 4 = 3200 | 3200 · 7 = 22400 |
| 600 · 5 = 3000 | 3000 · 4 = 12000 |
| 9200 | 49400 |

$$\text{Odpowiedź: } \frac{49400}{9200} = 5\frac{17}{46} \text{ lat.}$$

z czego taka wynika reguła: mnożymy każdy kapitał przez procenta i dodajemy wypadłe iloczyny; potem mnożymy każdy z iloczynów przez przynależny czas i te iloczyny znów dodajemy; nakoniec dzielimy drugą summę przez pierwszą.

2) Kapitały i czasy są różne, ale procenta te same, np. są wypożyczone

$$\left. \begin{array}{l} 300 \text{ tal. na } 6 \text{ lat} \\ 500 \quad \cdot \quad 5 \quad \cdot \\ 400 \quad \cdot \quad 8 \quad \cdot \end{array} \right\} \text{ po } 5 \%$$

pytanie jest, kiedy cała summa wypłaconą być może?

Możemy tu podług reguły w (1) wyłożonej rachować, a zatem tak:

$$\begin{array}{r} 300 \cdot 5 = 1500 \\ 600 \cdot 5 = 3000 \\ 400 \cdot 5 = 2000 \\ \hline 6500 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1500 \cdot 6 = 9000 \\ 3000 \cdot 5 = 15000 \\ 2000 \cdot 8 = 16000 \\ \hline 40000 \end{array}$$

$$\text{Odpowiedź: } \frac{40000}{6500} = \frac{400}{65} = \frac{80}{13} = 6\frac{2}{13} \text{ lat.}$$

Możemy także na równe tu procenta wcale nie zważać i tak wnosić: Wszystko jedno jest czy wypożyczymy:

$$\begin{array}{r} 300 \text{ tal. na } 6 \text{ lat lub też } 1800 \text{ tal. na } 1 \text{ rok} \\ 600 \quad \cdot \quad 5 \quad \cdot \quad \cdot \quad 3000 \quad \cdot \quad 1 \quad \cdot \\ 400 \quad \cdot \quad 8 \quad \cdot \quad \cdot \quad 3200 \quad \cdot \quad 1 \quad \cdot \\ \hline 1300 \qquad \qquad \qquad 8000 \end{array}$$

i teraz możemy się pytać: w jakim czasie przyniesie 1300 tal. tyle prowizyi, ile 8000 tal. w 1 roku? Z tego taka wynika proporcya:

$$\begin{array}{l} 1300 : 8000 = 1 : x \\ x = \frac{8000}{1300} = \frac{80}{13} = 6\frac{2}{13} \end{array}$$

Zwykle następująca forma przy rachowaniu się zachowuje:

$$\begin{array}{r} 300 \cdot 6 = 1800 \\ 600 \cdot 5 = 3000 \\ 400 \cdot 8 = 3200 \\ \hline 1300 \qquad \qquad 8000 \end{array}$$

$$\text{Odpowiedź: } \frac{8000}{1300} = \frac{80}{13} = 6\frac{2}{13} \text{ lat.}$$

z czego w tym razie taka wynika reguła: mnożymy każdy kapitał przez czas, dodajemy iloczyny wypadłe i dzielimy tę summę przez summę kapitałów.

3) Kapitały, procenta i czasy są różne jak w (1), a mamy

nietylko średni termin ale i średnią stopę procentową znaleźć; np. są wypożyczone

| | | | |
|-----------|-----------|----------|--|
| 900 tal. | po 5 % na | 8 lat | |
| 800 . . . | 4 % . . . | 10 . . . | |
| 600 . . . | 6 % . . . | 6 . . . | |

jaka jest średnia stopa procentowa i jaki jest średni termin wypłaty?

Pierwszą część zadania rozwiązujemy podług (93,4) drugą podług (96,2). Mamy więc:

| | |
|----------------------|-------------------------|
| $900 \cdot 5 = 4500$ | $4500 \cdot 8 = 36000$ |
| $800 \cdot 4 = 3200$ | $3200 \cdot 10 = 32000$ |
| $600 \cdot 6 = 3600$ | $3600 \cdot 6 = 21600$ |
| 2300 | 11300 |
| | 11300 |
| | 89600 |

$$\text{Stopa procentowa} = \frac{113000}{23000} = \frac{113}{23} = 4\frac{21}{23} \%.$$

$$\text{Średni termin} = \frac{89600}{113000} = \frac{896}{1130} = 7\frac{103}{113} \text{ lat.}$$

t. j. dodajemy najpierw kapitały, mnożymy każdy kapitał przez procenta przynależne i dodajemy wypadłe iloczyny, potem mnożymy te iloczyny przez przynależne czasy (czyli mnożymy każdy kapitał przez procenta i czas) i dodajemy także te iloczyny; dzieląc wtedy drugą sumę przez pierwszą, otrzymamy podług (93, 4) stopę procentową; dzieląc zaś trzecią sumę przez drugą otrzymamy podług (96, 1) średni termin.

Przykłady.

1. Jaki będzie termin średni wypłaty, jeżeli wypożyczymy 1000 tal. po 3 % na lat 6, 800 tal. po 4 % na lat 8, 500 tal. po 5 % na lat 5 i 400 tal. po 5½ % na lat 4½?

2. Jeżeli za równe procenta wypożyczymy 800 tal. na 8½ lat, 2000 tal. na 2 lata i 4800 tal. na 5¾ lat, kiedy cała summa naraz może być spłaconą?

3. Jaki jest średni termin i średnia stopa procentowa jeżeli 2400 tal. po 4 % na 10 lat, 900 tal. po 5½ % na 7 lat i 4822 tal. po 6 % na 6 lat wypożyczymy?

4. Jaka jest średnia stopa procentowa, jeżeli 800 tal. po 4 % na 10 lat, 800 tal. po 5 % na 8 lat, 800 tal. po 6 % na 6 lat i 800 tal. po 3 % na 4 lata wypożyczymy?

5. Jeżeli 400 tal. po 6 % na 4 lata, 1200 tal. po 4 % na 8 lat i 480 tal. po 5½ % na 12 lat wypożyczymy, jaka jest średnia stopa procentowa i jaki średni termin?

6. Kiedy mogą być 4000 tal. spłacone, jeżeli z tych były wypożyczone 2000 tal. na 8 lat, 1500 tal. na 5 lat i 500 tal. na 15 lat za równe procenta?

7. Ktoś wypożyczył z 9000 tal. za równe procenta, trzecią część na

lat 12, drugą trzecią część na lat 5 a ostatnią trzecią część na lat 14; — kiedy przypadnie średni termin wypłaty?

8. Jaki będzie termin średni wypłaty, jeżeli wypożyczymy 1000 tal. po 3 $\frac{1}{2}$ na 4 lata, 1200 tal. po 4 $\frac{1}{2}$ na 5 lat, 1500 tal. po 5 $\frac{1}{2}$ na 6 lat i 2000 tal. po 6 $\frac{1}{2}$ na 7 lat?

III. Reguła zamiany.

97. Reguła zamiany nie stoi wprawdzie w tak ścisłym połączeniu z regułą czasu, jak ta z regułą przychodu, jest ona jednak jak poprzednie obie reguły więcej niczym, jak tylko regułą trzech.

Zamieniać ma dwojakie znaczenie. Raz znaczy: niższe monety, miary i wagi wyrazić przez wyższe monety, miary i wagi tego samego kraju i przeciwnie wyższe przez niższe, np. wyrazić liczbę pruskich funtów przez liczbę pruskich centnarów i odwrotnie; drugi raz znaczy: monety, miary i wagi jednego kraju zamienić na monety, miary i wagi drugiego kraju np. berlińskie łokcie na wiedeńskie. Zamianę pierwszą uskuteczniamy, jak nam już wiadomo, za pomocą mnożenia lub dzielenia przez liczbę zamiany, możemy jednak i reguły trzech użyć, gdyż pytając się ile śr. daje 20 tal.? mamy taki przykład: ile śr. daje 20 tal., jeżeli 30 śr. 1 tal. daje? z czego wypada:

$$1 : 20 = 30 : x$$

$$x = 30 : 20$$

Druga zaś zamiana jest przedmiotem rachunku regułą zamiany nazwanego; a zatem reguła zamiany uczy nas zamieniać miary, wagi i monety jednego kraju na miary, wagi i monety drugiego.

98. Jak znajdują się liczby stosunkowe a z tych liczby zamiany? Aby takowe znaleźć porównujemy obie wagi z trzecią bardzo małą, obie monety z trzecią bardzo małą i t. d. Liczby, które takim sposobem otrzymamy i które nam okazują, ile razy trzecia mała waga w obydwóch ze sobą porównanych większych wagach się mieści, ile razy trzecia mała moneta w obydwóch ze sobą porównanych większych monetach się mieści i t. d. nazywają się liczbami stosunkowymi porównanych ze sobą wag, monet i t. d.

Ponieważ talar 30 srebrników a gulden 20 srebrników w sobie zawiera, jest więc 30 liczbą zamiany dla talarów

i srebrników, tak jak 20 liczbą zamiany jest dla guldenów i srebrników. Mamy więc:

$$\begin{aligned} 35 \text{ tal.} &= 35 \cdot 30 \text{ śr.} ; 150 \text{ śr.} = \frac{150}{30} \text{ tal.} \\ 26 \text{ guld.} &= 26 \cdot 20 \text{ śr.} ; 120 \text{ śr.} = \frac{120}{20} \text{ guld.} \end{aligned}$$

i dalej

$$1 \text{ tal.} : 1 \text{ guld.} = 30 : 20, (20 \cdot 30 = 30 \cdot 20)$$

a zatem

$$20 \text{ tal.} = 30 \text{ guld.}$$

$$2 \cdot = 3 \cdot$$

$$1 \cdot = \frac{3}{2} \cdot$$

$$\frac{2}{3} \cdot = 1 \cdot$$

30 i 20 są liczbami stosunkowemi dla talarów i guldenów, których przy zamianie tych obu monet na siebie stosownie użyć musimy.

Ponieważ 1 tal. : 1 guld. = 30 : 20, jest więc też oczywiście

$$10 \cdot : 10 \cdot = 30 : 20$$

$$800 \cdot : 800 \cdot = 30 : 20 \text{ i t. d.}$$

Jeżeli zaś pewną ilość talarów w liczbie guldenów wyrazić lub też odwrotne zadanie rozwiązać mamy, wtedy daną nam jest reguła trzech, której warunek tak brzmi: jeżeli 20 tal. — 30 guldenów daje; jest więc

$$800 \text{ tal.} : x \text{ guld.} = 20 : 30 \text{ a nie } 30 : 20$$

$$x = 1200$$

$$1200 \text{ guld.} : x \text{ tal.} = 30 : 20 \text{ a nie } 20 : 30$$

$$x = 800.$$

Z tego wypada, że, przy zamianie różnych gatunków na siebie, te do siebie *odwrotnie* się mają jak liczby stosunkowe.

Łokcie i stopy mierzono za pomocą linii paryskiej, która w paryskiej stopie 144 razy się mieści. Takich paryskich linii ma np.

| | | | |
|------------------|--------|--------------------|--------|
| berliński łokieć | 295,65 | monachijski łokieć | 369,27 |
| hamburski | 254 | warszawski | 259,16 |
| lipski | 250,6 | wiedeński | 345,4 |

Wagi porównywano z bardzo małą holenderską wagą „as“ zwaną. Takich wag ma np.

| | | | |
|----------------------|---------|------------------|---------|
| funt stary berliński | 9732,44 | funt monachijski | 11679,6 |
| hamburski | 10080 | warszawski | 8551 |
| lipski | 9728,95 | wiedeński | 11655,8 |

Miary suchych i płynnych rzeczy porównywano z całem

sześciennym paryskim, który w stopie sześciennój paryskiej 1728 razy się mieści. Takich cali paryskich ma np.

| | | | |
|------------------------|--------------------|--------------------|------|
| szeffel pruski | 2770 $\frac{3}{4}$ | wiedeńska maca dla | |
| wór hamburski 2 szeffe | | suchych rzeczy | 3100 |
| zawierający | 10624 | wiedeńskie wiadro | |
| szeffel lipski | 5338 | do płynów | 2853 |
| wiadro lipskie do wina | 3824 | | |

Przy monetach patrzano, ile tychże na jedną grzywnę kolońską, 16 starych łótów albo $\frac{1}{2}$ pruskiego starego funta ważącą, idzie. I tak np. ma

| | |
|--------------------------|----------|
| grzywna pruskich talarów | 14 sztuk |
| angielskich koron | 8,509 |
| francuzkich 5 franków | 10,387 |
| rzymskich skudów | 9,523 |
| rossijskich rubli | 13 |
| hiszpańskich piastrow | 9,29 |
| tureckich piastrow | 38,4 |

Liczbę zamiany dwóch ze sobą porównanych wag, miar i t. d. znajdziemy z liczb ich stosunkowych przez następujące wnioskowanie. Liczba zamiany ma nam okazać, ile razy pewna waga, miara i t. d. w drugiej się mieści; to zaś znajdziemy dzieląc ich liczby stosunkowe przez siebie. Jasném téż jest, że dla każdych dwóch wag, miar i t. d. zawsze dwie liczby zamiany mieć musimy, jedną dla zamiany pierwszej rzeczy na drugą, drugą zaś dla zamiany drugiej rzeczy na pierwszą. Np.

Liczby stosunkowe berlińskich i hamburskich łokci są 295,65 i 254.

Ile razy mieści się berliński łokieć w hamburskim?

$$\text{Odpowiedź: } 295,65 : 254 = \frac{254}{295,65} \text{ t. j. 1 hamburski łokieć}$$

$$= \frac{254}{295,65} \text{ berl. łokcia.}$$

Ile razy mieści się hamburski łokieć w berlińskim?

$$\text{Odpowiedź: } 254 : 295,65 = \frac{295,65}{254} \text{ t. j. 1 berliński łokieć}$$

$$= \frac{295,65}{254} \text{ hamb. łokcia.}$$

Liczby zamiany więc berlińskich i hamburskich łokci są:

$$\frac{254}{295,65} \text{ i } \frac{295,65}{254}$$

z których pierwszej używamy przy zamianie łokci hamburskich na berlińskie, drugiej zaś przy zamianie łokci berlińskich na hamburskie.

99. Pytając się więc: ile hamburskich łokci daje 80 berlińskich? tak wnioskujemy: ponieważ liczby stosunkowe hamburskich i berlińskich łokci 254 i 295,65 są, a zatem 254 łokci berlińskich 295,65 hamburskich daje, przykład nasz zamieni się na taki: ile hamburskich łokci daje 80 berlińskich, jeżeli 254 berlińskich jest równych 295,65 hamburskim? Z tego taka wyniknie proporcya:

$$\text{B.Ł. B.Ł. H.Ł. H.Ł.}$$

$$254 : 80 = 295,65 : x$$

$$x = \frac{80 \cdot 295,65}{254}$$

Jeżeli się zaś pytamy, ile berlińskich łokci daje 80 hamburskich, następującą otrzymamy proporcya:

$$\text{H.Ł. H.Ł. B.Ł. B.Ł.}$$

$$295,65 : 80 = 254 : x$$

$$x = \frac{80 \cdot 254}{295,65}$$

Z przykładów tych następująca wynika reguła: Zamieniając większe miary, wagi i t. d. na mniejsze, mnożymy daną liczbę przez większą liczbę stosunkową a iloczyn wypadły dzielimy przez mniejszą; zamieniając zaś mniejsze miary, wagi i t. d. na większe, mnożymy daną liczbę przez mniejszą liczbę stosunkową a iloczyn wypadły dzielimy przez większą.

Zważając na regułę powyższą łatwiej się błędów ustrzeżemy, jak gdy mówimy: mnożymy daną liczbę przez przynależną podług (98) utworzoną liczbę zamiany.

Zamieniając obce monety na pruskie tal. mamy więc:

$$1 \text{ angielska korona} = \frac{1 \cdot 14}{8,509} = \frac{14}{8,509} = 1 \text{ tal. } 19 \text{ sr. } 4\frac{29}{100} \text{ f.}$$

$$1 \text{ rossijski rubel} = \frac{1 \cdot 14}{13} = \frac{14}{13} = 1 \text{ tal. } 2 \text{ sr. } 3\frac{2}{3} \text{ fen.}$$

100. Z łatwością można tu także liczby w starych pruskich wagach dane na liczby równomiennych wag nowych zamienić i z cen wag dawnych ceny wag nowych obrachować. Z (41) wiemy już, że stare liczby zamiany są 110, 32, 4, nowe zaś 100, 30, 10, 10 i że stary funt = 467,71104, nowy zaś = 500 grammom jest. W następujących rachunkach uważać będziemy stary funt = 467,7 grammom i tylko w tych razach, gdzie opuszczone następujące małe liczby dziesiętne na wypadek wpływ wywierają, takowe uwzględnić będziemy.

Zamiany wag.

$$\text{I. } 1 \text{ stary ład. : } 1 \text{ now. ładunku} = 4000 \cdot 467,7 : 4000 \cdot 500 \\ = 467,7 : 500 = 935,4 : 1000$$

$$\text{a zatem } 1000 \text{ star. ład.} = 935,4 \text{ now. ład.}$$

$$1 \text{ star. ład.} = \frac{935,4}{1000} = 0,9354 \text{ now. ład.} \\ = 4000 \cdot 0,9354 = 3741,6 \text{ now. funt.} \\ = 37 \text{ cent. } 41 \text{ fnt. } 18 \text{ łót. now. wagi,}$$

$$\text{dokładniej} = 37 \text{ cent. } 41 \text{ fnt. } 21 \text{ łót. (1)} \\ \text{jeżeli } 467,71104 \text{ zamiast } 467,7 \text{ weźniemy.}$$

$$\text{Dalej jest } 1 \text{ nowy ład.} = \frac{1000}{935,4} \text{ star. ład.} = 38 \text{ cent. } 96 \text{ funt.}$$

$7\frac{3}{4}$ łóta starój wagi,

$$\text{dokładniej} = 38 \text{ cent. } 96 \text{ funt. } 4\frac{3}{8} \text{ łóta. (2)} \\ \text{jeżeli znów } 467,71104 \text{ zamiast } 467,7 \text{ weźniemy.}$$

$$\text{II. } 1 \text{ stary centnar : } 1 \text{ nowego centnaru} = 110,467,7 : 100,500 \\ = 1029 : 1000$$

$$\text{a zatem } 1000 \text{ star. centn.} = 1029 \text{ now. cent.}$$

$$1 \text{ star. cent.} = \frac{1029}{1000} \text{ now. cent.} = 1,029 \text{ cent.}$$

$$= 1 \text{ cent. } 2 \text{ fnt. } 27 \text{ łót. now. wagi (3).}$$

$$1 \text{ now. cent.} = \frac{1000}{1029} \text{ star. cent.} = \frac{1000,110}{1029} \text{ star. fnt.}$$

$$= 106 \text{ funt. } 29 \text{ łót., dokładniej}$$

$$= 106 \text{ fnt. } 28 \text{ łót. } 36 \text{ kw. star. wagi (4).}$$

$$\text{III. } 1 \text{ stary funt : } 1 \text{ now. funta.} = 467,7 : 500 = 935,4 : 1000$$

$$\text{a więc } 1000 \text{ starego funta} = 935,4 \text{ now. funt.,}$$

$$1 \text{ stary funt.} = 0,9354 \text{ now. funt.}$$

$$= 30 \cdot 0,9354 \text{ now. łót.}$$

$$= 28,062 \text{ now. łótom}$$

$$= 28 \text{ łót. — kw. } 6 \text{ cent. } 2 \text{ gran.,}$$

$$\text{dokładniej} = 28 \text{ łót. — kw. } 6 \text{ cent. } 3 \text{ gr. (5).}$$

Dalej 1 nowy funt = $\frac{1000}{935,4}$ star. funtów = 1 funt. $2\frac{1}{2}$ łota starłej wagi, dokładniej = 1 funt. 2 łót. 0,886 kwint. (6).

IV. 1 stary łót : 1 nowego łóta
 $= \frac{467,7}{32} : \frac{500}{30} = 877 : 1000,$

z czego wynika, że 1000 star. łót. = 877 now. łót.
 1 stary łót = 0,877 now. łót. = 8,77 now. kwint. = 8 kw.
 8 cent. 7 granom, (7).

Dalej jest 1 nowy łót $\frac{1000}{877}$ star. łót. = $1\frac{1}{7}$ star. łót. = 1 łót.
 0,5612 kwintlom (8).

V. 1 stary kwintel : 1 nowego kwintla
 $= \frac{467,7}{32,4} : \frac{500}{30,10} = 2192,5 : 1000$

a zatem 1000 star. kwint. = 2192,5 now. kwint.
 1 stary kwint. = 2,1925 now. kwint. = 2 kwint. 1 cent.
 $9\frac{1}{4}$ granom (9).

Dalej jest 1 nowy kwint. = $\frac{1000}{2192,5}$ star. kwint. = prawie
 $\frac{5}{11}$ kwint. = 0,456 kwint. (10).

Z powyższych obrachunków następującą tabliczkę zestawić
 możemy:

| | | | | | | | |
|----|------|-------|-----------|---|--------|------|------------|
| A. | 1000 | star. | ładunków | = | 935,4 | now. | ładunkom, |
| | 1000 | . | centnarów | = | 1029 | . | centnarom, |
| | 1000 | . | funtów | = | 935,4 | . | funtom, |
| | 1000 | . | łótów | = | 877 | . | łótom, |
| | 1000 | . | kwintli | = | 2192,5 | . | kwintlom. |

B. Ułamki, które w powyższych zadaniach (I—V) stary
 ładunek, stary centnar i t. d. w równoimiennych nowych
 wagach wyrażają, dadzą się na insze dla rachunku dogo-
 dniejsze i sobie prawie równe ułamki zamienić.

1 star. ładun. = $\frac{935,4}{1000} = \frac{1000}{1069}$ now. ład., gdyż $935,4 : 1000$
 $= 1000 : x,$

1 . centn. = $\frac{1029}{1000}$ now. cent.,

1 . funt = $\frac{935,4}{1000} = \frac{1000}{1069}$ now. funt,

1 . łót = $\frac{877}{1000} = \frac{100}{144}$ now. łót,

1 . kwint. = $\frac{2192,5}{1000} = \frac{1000}{456}$ now. kwint.

Przez ułamki te trzeba dane stare wagi mnożyć, aby je na równoimienne nowe zamienić, jest więc:

$$12 \text{ cent. } 10 \text{ funt. } 6 \text{ łót. stariej wagi} = \frac{12 \cdot 1029}{1000} \text{ cent. } \frac{10 \cdot 1000}{1069} \text{ funt.}$$

$$\frac{6 \cdot 100}{144} \text{ łótów nowej wagi.}$$

C. Dalej jest:

| | |
|--|---------------|
| 1 star. ładun. = 37 cent. 41 funt. 21 łót. | } nowej wagi. |
| 1 . cent. = 1 . 2 . 27 . | |
| 1 . funt. = — . — . 28 . kw. 6 cent. 3 gr. | |
| 1 . łót = — . — . — . 8 . 7 . 7 . | |
| 1 . kwint. = — . — . — . 2 . 1 . 94 . | |

D. W końcu mamy:

| | |
|--|-----------------|
| 1 nowy ładun. = 38 cent. 96 funt. 4 $\frac{3}{4}$ łót. | } stariej wagi. |
| 1 . centn. = — . 106 . 29 . (28 łót 3,6 kw.) | |
| 1 . funt = — . 1 . 2 $\frac{1}{2}$. (2 łót 0,836 kw.) | |
| 1 . łót = — . — . 1 $\frac{1}{7}$. (1 łót 0,5612 kw.) | |
| 1 . kwint. = — . — . — . 1 $\frac{1}{1}$ kw. (0,456 kw.) | |

Aby więc 12 cent. 10 funt. 6 łót. stariej wagi na nową zamienić, piszemy podług C.:

$$12 \text{ cent.} = 12 \text{ cent. } 34 \text{ funt. } 24 \text{ łót.}$$

$$10 \text{ funt.} = — . 9 . 10 . 6 \text{ kw. } 3 \text{ cent. } - \text{ gr.}$$

$$6 \text{ łót.} = — . — . 5 . 2 . 6 . 2 .$$

$$\hline 12 \text{ cent. } 44 \text{ funt. } 9 \text{ łót. } 8 \text{ kw. } 9 \text{ cent. } 2 \text{ gr. now. wagi.}$$

Obrachowanie cen.

Ile kosztuje nowy centnar, jeżeli za stary 12 tal zapłacić musimy?

Pierwszy sposób podług B.

1 stary centnar kosztuje 12 tal. t. j. $\frac{1029}{1000}$ nowego centnara kosztuje 12 tal., a zatem 1029 now. cent. kosztuje 12.1000 tal., a 1 nowy centnar kosztuje $\frac{12 \cdot 1000}{1029}$ tal. czyli 11 tal. 19 śr. 11 fen.

Z przykładu tego pokazuje się, że, chcąc cenę jakiegokolwiek nowej wagi z ceny równoimiennej stariej wagi obrachować, cenę stariej wagi przez odwrotny odpowiedni pod B. stojący ułamek mnożyć musimy.

Jeżeli więc 5 starych funtów 7 tal. kosztuje, wtedy

za 5 now. funt. $\frac{7.1069}{1000}$ tal. dać musimy;
 jeżeli zatem 7 star. łótów 17 śr. kosztuje, to
 7 now. łótów $\frac{17.144}{100}$ śr. kosztować będzie;
 jeżeli na koniec 3 star. kw. 11 fen. kosztuje, wtedy cena
 3 nowych kwintli $\frac{11.456}{1000}$ fen. wynosić musi.

Drugi sposób podług C.

1 stary centnar kosztuje 12 tal., czyli, co to samo jest, 1 centnar 2 funty 27 łótów nowej wagi kosztują 12 tal.; kładziemy więc:

1 cent. 2 funt. 27 łót. : 1 cent. = 12 : x, albo
 1²⁷/₁₀₀ cent. : 1 cent. = 12 : x, z czego wypada x = 11 tal.
 19 śr. 11 fen.

Trzeci sposób.

Gdy daleko łatwiej jest oprócz liczb zamiany 110, 32, 4 i 100, 30, 10 spamiętać także liczby 467,7 i 500, jako ilość w starych i nowych funtach zawartych grammów, niż liczby pod B. i C. podane, możemy więc i tak rachować:

1 star. cent. : 1 now. centn. = 12 tal. : x tal.

110.467,7 : 100.500 = 12 : x.

z czego także wypada x = 11 tal. 19 śr. 11 fen.

Przykłady. 1. Stary funt kosztuje 4 tal. 6 śr. 8 fen., ile kosztuje nowy funt?

a) Ponieważ $\frac{1000}{1069}$ now. funt. 4 tal. 6 śr. 8 fen. kosztuje, więc 1 nowy funt $\frac{1069}{1000}$ razy 4 tal. 6 śr. 8 fen. kosztować będzie.

b) 28,062 : 30 = 4 tal. 6 śr. 8 fen. : x.

c) 467,7 : 500 = 4 tal. 6 śr. 8 fen. : x.

Zawsze jest x = 4 tal. 15 śr. 5 fen.

2. 6 centn. 20 funt. 16 łótów starej wagi kosztują 24 tal. 7 śrbr. 6 fen., ile kosztuje 10 centnarów 80 funtów 18 łótów nowej wagi?

Ponieważ 6 centnarów 20 funt. 16 łót. starej wagi = 680,5 starym funtom = $\frac{680,5 \cdot 1000}{1069} = \frac{680500}{1069}$ now. funtom,

i dalej 10 cent. 80 fnt. 18 łót. now. wagi = 1080,6 now. fnt.

i na koniec 24 tal. 7 sr. 6 fen. = 24 $\frac{1}{4}$ tal. = $\frac{97}{4}$ tal.; możemy zadanie nasze na niżej oznaczone sposoby rozwiązać.

a) $\frac{680500}{1069}$ now. funt. kosztuje $\frac{97}{4}$ tal., 1 więc nowy funt kosztuje $\frac{97 \cdot 1069}{4 \cdot 680500}$ tal., a 1080,6 now. funt. kosztować

będzie $\frac{97 \cdot 1069 \cdot 1080,6}{4 \cdot 680500}$ tal.

b) $467,7 \cdot 680,5 : 500 \cdot 1080,6 = \frac{97}{4} : x$, i na koniec

c) 6 star. cent. = 6 cent. 17 fnt. 12 lót.

20 . funt. = - . 18 . 21 . 2 kw. 6 cent.

16 . lót. = - . - . 14 . - . 3 . 2 gr. } nowej wagi.

6 cent. 36 fnt. 17 lót. 2 kw. 9 cent. 2 gr.

biorąc z tego tylko 3 najwyższe gatunki, otrzymamy: $636\frac{17}{30} : 1080\frac{6}{10} = 24\frac{1}{4} : x$, z czego wypada $x = 41$ tal. 4 srebr. 2 fen.

3. Ile według nowej wagi ważyć będzie bochenek chleba 5 sr. kosztujący, jeżeli takowy 5 $\frac{1}{2}$ star. funta ważył?

5 star. fnt. = 4 fnt. 20 lót. 3 kw. 1 cent. 5 gr.

16 . lót. = - . 14 . - . 3 . 2 . }

5 fnt. 4 lót. 3 kw. 4 cent. 7 gr. } nowej wagi.

a zatem 5 funt. 4 lóty.

Łatwiej jeszcze tak rachować możemy:

5 $\frac{1}{2}$ czyli 1 $\frac{1}{2}$ star. funta = $\frac{11 \cdot 467,7}{2}$ grammom, to zaś jest

równém $\frac{11 \cdot 467,7}{2 \cdot 500} = 11 \cdot 0,4677 = 5,1447 = 5$ fnt. 4 lót. i t. d.

Jeżeli dawniej funt wołowiny według starzej wagi 3 $\frac{1}{2}$ sr. kosztował, ile teraz nowy funt kosztować będzie?

Ponieważ 1 star. fnt. = 28 now. lót., wnioskujemy tak:

28 lótotów kosztuje $\frac{7}{5}$ sr., a zatem 1 lót kosztuje $\frac{7}{5 \cdot 28}$ srebr. a

30 lótotów kosztuje $\frac{7 \cdot 30}{56} = \frac{7 \cdot 15}{28} = \frac{105}{28} = 3\frac{3}{8}$ sr. = 3 sr. 9 fen.

albo:

467,7 grammów kosztuje $\frac{7}{5}$ sr., więc 1 gramm kosztuje $\frac{7}{935,4}$ a

500 grammów kosztuje $\frac{3500}{935,4} = \frac{35000}{9354}$ prawie = 3 sr. 9 fen.

Uwaga. Wszystkie te mozolne zamiany starych wag na nowe i z t \acute{e} m w po \acute{l} o \acute{z} eniu stoj \acute{a} c \acute{e} obrachowania cen w praktyce wielce s \acute{a} u \acute{l} atwione przez odpowiednio urz \acute{a} dzone tabliczki. Obrachowania te stan \acute{a} si \acute{e} p \acute{o} zniej zup \acute{e} lnie zbytecznymi, skoro publiczno \acute{s} c \acute{d} do nowych wag wi \acute{e} c \acute{e} j si \acute{e} przyzwyczai, w peryodzie jednak przej \acute{s} cia obznajmienie si \acute{e} z nimi jest koniecznym.

Przyk \acute{a} dy.

1. Ile hamburskich łokci daje 125 $\frac{1}{2}$ wiedeńskich?
2. Jak wielka jest w berlińskich łokciach wyrażona różnica między 100 wiedeńskimi i 100 lipskimi łokciami?
3. Ile berlińskich łokci daje 450 $\frac{1}{2}$ warszawskich i 98 $\frac{3}{4}$ monachijskich?
4. Ile pruskich talarów daje 250 tureckich piastrów?
5. Mamy 4844 pruskich tal. zamienić na rzymskie skudi?
6. Ile rubli daje 3250 pruskich talarów?
7. Ile berlińskich funtów daje 1246 wiedeńskich?
8. Jak wielka jest w berlińskich łokciach wyrażona różnica między 400 warszawskimi i 400 lipskimi łokciami?
9. Ile otrzymamy wyrażając 24 cent. 66 funt. 22 łótów star \acute{e} j pruskiej wagi w nowych wagach?
10. Jaka jest różnica między 12 cent. 82 funt. star \acute{e} j wagi i 14 cent. 66 fun. now \acute{e} j wagi, 1) w nowych wagach, 2) w starych wagach — wyrażona?
11. Ile kosztuje nowy funt jakiego towaru, je \acute{z} eli za 3 cent. 55 funt. star \acute{e} j wagi 400 tal. 20 śr. zapłacono?
12. Je \acute{z} eli za 80 funt. 8 łót. star \acute{e} j wagi 122 tal. 15 śr. płacimy; co \acute{z} trzeba zapłacić za 2 cent. 60 funt. 20 łótów now \acute{e} j wagi?
13. Za 4 tal. 25 śr. dostać można by $\acute{ł}$ o dawniej z pewnego towaru 44 funt. 24 łoty star \acute{e} j wagi, ilebyśmy teraz na now \acute{a} wagę dostali?
14. Funt cielęciny podług star \acute{e} j wagi kosztował 3 śr. 9 fen., ilebyśmy teraz za funt now \acute{e} j wagi zapłacić musieli?
15. Za 10 cent. 10 funt. 10 łót. star \acute{e} j wagi płacono dawniej 200 tal, 20 śr., ileby za 10 cent. 10 funt. 10 łótów tego samego towaru na now \acute{a} wagę wa \acute{z} onego zapłacić trzeba?

ROZDZIAŁ VI.

0 regule łańcuchow \acute{e} j.

101. Reguła łańcuchowa uczy nas wszelkie przyk \acute{a} dy reguły trzech i reguły złożonych na kr \acute{o} t \acute{s} zy spos \acute{o} b obra-

chować. Tworzymy sobie w tym celu z proporcji dwie kolumny, a w kolumnie po prawej ręce stojącej kładziemy same średnie, w kolumnie zaś po lewej ręce stojącej same skrajne wyrazy, między którymi i nieznajomy wyraz się znajduje. Kolumny te tak ustawiamy, aby wyrazy w proporcji stosunek tworzące na przeciwko siebie stały. I tak z proporcji

$$2 : 4 = 3 : x$$

te dwie tworzymy kolumny:

$$\begin{array}{r} x \\ 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ 4 \end{array}$$

Podobnie otrzymamy z proporcji

$$\left. \begin{array}{l} 2 : 4 \\ 8 : 3 \\ 7 : 6 \end{array} \right\} = 5 : x$$

te dwie kolumny:

$$\begin{array}{r} x - 5 \\ 2 - 4 \\ 8 - 3 \\ 7 - 6 \end{array}$$

Ponieważ zaś w proporcji geometrycznej wyraz skrajny znajdujemy, mnożąc wyrazy średnie przez siebie i dzieląc iloczyn wypadły przez wyraz skrajny lub przez iloczyn wyrazów skrajnych, musimy więc tutaj, zamieniwszy pojedyncze lub złożone proporcje na takie dwie kolumny, regułę, za pomocą której nieznajomy wyraz znajdujemy, tak wyrazić: Mnożymy wyrazy prawej kolumny przez siebie a iloczyn wypadły dzielimy przez wyraz znajomy lub przez iloczyn wyrazów znanych lewej kolumny. W tém leży przyczyna, że prawą kolumnę często *kolumną mnożenia*, lewą zaś *kolumną dzielenia* nazywamy.

Musimy teraz jeszcze okazać, jak najłatwiej wyrazy każdego przykładu reguły trzech lub reguł złożonych w dwie kolumny ustawić się dają i jakie potem odmiany z kolumnami przedsięwziąć trzeba, aby wyraz nieznajomy za pomocą wyżej podanych a z proporcji wynikających reguł wynaleść.

102. Dwie te kolumny na sposób następujący tworzymy: Piśmemy x , w pytaniu przykładu danego zachodzące, w lewej kolumnie, porównywamy potem każdy wyraz pytania po kolei z x i kładziemy wyraz porównany w *prawą kolumnę*, jeżeli z x w prostym stosunku stoi, w *lewą zaś*, jeżeli

z x w odwrotnym stosunku stoi, zawsze jednak rządęk niżej; np. pewien kapitał musi, aby 4200 tal. prowizyi przyniósł na 7 lat po 6% być wypożyczonym, za jakie procenta ten sam kapitał wypożyczonym być musi, aby w 10 latach 6 miesiącach 5250 tal. prowizyi przyniósł?

Porządkując wyrazy pytania podług wyżej wyłożonej reguły, mamy:

$$\begin{array}{r} x \text{ ‰} \text{ —} \\ 10 \text{ l. } 6 \text{ m. —} \\ \text{— } 5250 \text{ tal. P.} \end{array}$$

gdyż procenta i czas stoją do siebie w odwrotnym stosunku; dla tego więc stoi 10 l. 6 m. w lewej kolumnie rządęk niżej; — procenta i prowizya stoją do siebie w prostym stosunku, dla tego stoi 5250 tal. P. w prawej kolumnie, ale rządęk niżej jak 10 l. 6 m.

Wyrazy warunku stawiamy naprzeciwko odpowiednich wyrazów pytania, przez co obie kolumny wypełnimy; taką więc formę z danego przykładu otrzymamy:

$$\begin{array}{r} x \text{ ‰} \text{ — } 6 \text{ ‰} \\ 10 \text{ l. } 6 \text{ m. — } 7 \text{ l.} \\ 4200 \text{ tal. p. — } 5250 \text{ tal. P.} \end{array}$$

Widzimy zaraz przy tém, że nie koniecznym jest warunek i pytanie wypisywać, lecz że zaraz bezpośrednio ze zadania obie kolumny czyli łańcuch ułożyć możemy. Wygodnym lecz nie koniecznym jest, jeżeli w wszystkich przykładach reguły trzech i reguł złożonych, które przez regułę łańcuchową rozwiązane być mają, pierwój pytanie a potem dopiero warunek podajemy.

103. Przykłady dane rozwiązujemy podług tych samych reguł jakieśmy przy regule trzech i regułach złożonych wyłożyli w (82). Niektóre tylko reguły, z przyczyny odmienionego uporządkowania wyrazów, inaczej wyrazić musimy. Te zaś są:

1) Liczby związane zamieniamy na niewiązane, tak żeby naprzeciwko siebie stojące wyrazy w tym samym gatunku wyrażone były; tu więc:

$$\begin{array}{r} x \text{ — } 6 \\ 10\frac{1}{2} \text{ — } 7 \\ 4200 \text{ — } 5250 \end{array}$$

2) Liczby mieszane zamieniamy na ułamki; tu więc:

$$\begin{array}{r}
 x \text{ — } 6 \\
 \frac{3}{2} \text{ — } 7 \\
 \hline
 4200 \text{ — } 5250
 \end{array}$$

3) Znosimy ułamki, pisząc mianownik każdego ułamka lewej kolumny jako czynnik w prawej kolumnie i przeciwnie mianownik ułamka każdego prawej kolumny kładąc jako czynnik w lewą kolumnę; tu więc:

$$\begin{array}{r}
 x \text{ — } 6 \\
 21 \text{ — } 7 \\
 \hline
 4200 \text{ — } 5250 \\
 \text{— } 2
 \end{array}$$

4) Znosimy wyrazy jednej kolumny z wyrazami drugiej kolumny; tu więc:

$$\begin{array}{r}
 x \text{ — } 6 \ 2 \\
 21 \text{ — } 7 \\
 3 \quad 2 \\
 \hline
 4200 \text{ — } 3230 \\
 84 \quad 103 \\
 21 \quad 33 \\
 7 \quad 5
 \end{array}$$

5) Mnożymy nakoniec wyrazy prawej kolumny przez siebie a iloczyn wypadły dzielimy przez iloczyn wyrazów lewej kolumny. W lewej kolumnie mamy w przykładzie naszym tylko 1 kilka razy jako czynnik, w prawej zaś oprócz jedności tylko 5; — a zatem jest:

$$1 : 5 = 5 \text{ \textcircled{8}}$$

Forma całego rachunku jest więc taka:

$$\begin{array}{r}
 x \text{ \textcircled{8}} \text{ — } 6 \text{ \textcircled{8}} \\
 \quad \quad \quad 2 \\
 10 \text{ l. } 6 \text{ m. — } 7 \text{ l.} \\
 10\frac{1}{2} \\
 21 \\
 \hline
 2 \\
 4200 \text{ tal. P. — } 3230 \text{ tal. P.} \\
 3 \quad 2 \\
 84 \quad 33 \\
 21 \quad 5 \\
 7
 \end{array}$$

$$1 : 5 = 5 \text{ \textcircled{8}}$$

Przykłady dla reguły trzech i reguł złożonych i t. d. wyżej podane, mogą tu jeszcze raz przez regułę łańcuchową być rozwiązane.

ROZDZIAŁ VII.

O regule spółki i o regule alligacyi czyli mięszania.

I. Reguła spółki.

104. Reguła spółki uczy nas daną liczbę podzielić wedle danych stosunków t. j. tak, ażeby części szukane tak się do siebie i do ich summy miały, jak się mają pewne dane części do siebie i do ich summy. W każdym więc reguły spółki przykładzie zachodzą dwojakie części, znajome i nieznanome albo dane i szukane i dwie summy tych części. Części znajome zowią się *liczby stosunkowe* albo *liczby podział stanowiące*; ich summa zowie się *summą główną*. Części nieznanome nazywamy *liczbami podziału zależnemi*, a ich summę *summą podzielną*. Liczby stosunkowe i summa podzielną są zawsze dane; summę główną znajdujemy zawsze przez dodanie liczb stosunkowych, nieznanome części zaś przez proporcją, tak wnioskując:

summa główna ma się do pierwszej znajomej części, jak się ma summa podzielną do pierwszej nieznanomej części, — summa główna ma się do drugiej znajomej części, jak się ma summa podzielną do drugiej nieznanomej części i t. d.

albo zmieniając porządek wyrazów średnich w tych proporcjach:

summa główna ma się do summy podzielną, jak pierwsza znajoma część do pierwszej nieznanomej części, dalej także jak druga znajoma część do drugiej nieznanomej i t. d.

albo jeżeli pierwsza nieznanoma część już jest znaleziona:

pierwsza znajoma część ma się do drugiej, jak pierwsza znaleziona część do drugiej szukanej, — dalej, pierwsza znajoma do trzeciej znajomej, jak pierwsza znale-

ziona do trzeciej szukaniej albo też druga znajoma ma się do trzeciej znajomej, jak druga znaleziona do trzeciej szukaniej i t. d.

Przekonujemy się z tego łatwo, że reguła spółki na regule trzech się opiera. Zastósowanie jej w życiu praktycznym jest nader częstym, nie tylko przy wspólnych kupieckich przedsięwzięciach, na które różne summy są dane, przy przedsięwzięciach więc wspólnych, od czego też reguła ta ma swe nazwisko, ale także przy rozdzieleniu podatków podług wysokości dochodów, przy ustanowieniu składek podług liczby mieszkańców, przy działach spadkowych, przy rozłożeniu składek do kassy ogniowej podług cen kupna, przy konkursach i w wielu innych przypadkach.

Reguła spółki jest *pojedynczą* lub *złożoną*, podług tego, czy w niej jeden tylko lub kilka gatunków liczb stosunkowych zachodzi. Reguła złożona na pojedynczą zawsze się sprowadza.

A. Reguła spółki pojedyncza.

105. Chcąc jaki przykład reguły spółki pojedynczej obrachować, dodajemy najpierw wszystkie znajome części, aby summę główną otrzymać i tworzymy potem dla znalezienia szukanych części tyle proporeyi podług reguł w (103) danych, ile jest części nieznanomych. Najdogodniej jest tak wnioskować: summa główna ma się do summy podzielnej, jak pierwsza znajoma część do pierwszej szukaniej, albo jak druga znajoma część do drugiej szukaniej i t. d. gdyż tedy wszystkie proporeye ten sam pierwszy stosunek mają. Jeżeli wyrazy stosunku tego znieść się dają, wynika jeszcze i ta korzyść, że we wszystkich proporeyach stosunek pierwszy przez najmniejsze liczby jest wyrażonym. Rachunek sam wykonujemy najdogodniej w następującej formie:

Trzech kupców daje różne summy, A. 500 tal., B. 350 tal. a C. 650 tal.; zarabiają temi pieniędzmi 450 tal., pytanie jest ile każdy stosunkowo dostać musi. Piszemy:

| | | | |
|----|----|------|-----|
| 1. | A. | 500 | x |
| | B. | 350 | y |
| | C. | 650 | z |
| | | 1500 | 450 |

$$\begin{aligned}
 2. \quad & 1500 : 450 = 500 : x \\
 & 1500 : 450 = 350 : y \\
 & 1500 : 450 = 650 : z
 \end{aligned}$$

lub też znosząc:

$$1500 : 450 = 500 : x$$

$$10 : 3$$

$$x = 3 \times 50 = 150$$

$$\text{dalej } 10 : 3 = 350 : y$$

$$y = 3 \times 35 = 105$$

$$\text{i } 10 : 3 = 650 : z$$

$$z = 3 \times 65 = 195$$

3) Każdą znaną liczbę łączymy zaraz z oznaczającą ją literą przez znak równości, przez co taka forma powstaje:

$$\text{A. } 500 \quad x = 150$$

$$\text{B. } 350 \quad y = 105$$

$$\text{C. } 650 \quad z = 195$$

$$\hline 1500$$

$$\hline 450$$

$$\hline 450$$

4) Próbę robimy, jeżeli, jak tutaj, liczby znalezione do siebie dodamy i przekonujemy się, czy summa ich jest równą summie podzielnej. Możemy też próbę robić patrząc, czy między danymi częściami ten sam jest stosunek, jak między znanymi odpowiednimi częściami np. tu między pierwszymi i drugimi.

$$500 : 350 = \frac{350}{350} = \frac{35}{35} = \frac{7}{7}, \text{ ale też}$$

$$150 : 105 = \frac{105}{105} = \frac{31}{31} = \frac{7}{7}$$

albo też patrząc, czy między każdą daną częścią i summą główną ten sam jest stosunek, jak między odpowiednią znaną częścią i summą podzielną, np. tu między pierwszymi częściami i ich summami

$$1500 : 500 = 3, \text{ ale też}$$

$$150 : 450 = 3, \text{ i t. d.}$$

106. Dane liczby stosunkowe mogą być różnego gatunku i tak mogą one być 1) całe liczby bez wspólnego dzielnika; 2) całe liczby wspólny dzielnik mające; 3) różnomianowne ułamki; 4) różnomianowne ułamki; 5) liczby mieszane i na koniec 6) liczby związane. W pierwszym razie przed ustaleniem proporcji żadnych skrótów przedsięwziąć nie możemy, które jednak w pozostałych pięciu przypadkach uskutecznić się dają. Skrócenia takowe ułatwiają bardzo często rachunek, poznać więc je musimy:

1) Jeżeli całości stosunkowe wspólny dzielnik mają, dzielimy je przez niego i ilorazy wypadłe dopiero dodajemy do siebie, aby summę główną otrzymać. Postępowanie to, przez które nie tylko liczby stosunkowe ale i summa główna się zmniejszają, jest dozwoloném, gdyż przez to nic więcej nie

czynimy, jak tylko że w proporcjach, z których szukane części znaleźć chcemy, średni i skrajny wyraz zmniejszamy. (74. III.)

500 tal. ma być między 4 osoby A, B, C, i D wedle liczb stosunkowych 4, 6, 8 i 10 podzielonych; ile dostanie każda? Piszemy:

| | | | | | |
|---|----|---|-----|---|-----|
| A | 4 | 2 | x | = | 100 |
| B | 6 | 3 | y | = | 150 |
| C | 8 | 4 | z | = | 200 |
| D | 10 | 5 | v | = | 250 |
| | 14 | | 700 | | 700 |

$$\text{gdyż } 14 : 700 = 2 : x \quad | \quad 1 : 50 = 4 : z$$

$$1 : 50$$

$$1 : 50 = 3 : y \quad | \quad 1 : 50 = 5 : v$$

2. Jeżeli liczby stosunkowe są równomianownemi ułamkami, wypuszczamy mianowniki a pozostałe liczniki zatrzymujemy jako liczby stosunkowe. Reguła ta wynika z tego, że w każdej proporcji można wyraz średni i skrajny przez jedną i tę samą liczbę, tu więc przez wspólny mianownik pomnożyć (74. III.). Dobrze jest i liczniki, jeżeli się da, znieść. Np.:

| | | | | | |
|-----------------|----|---|-----|---|-----|
| $\frac{4}{15}$ | 4 | 1 | x | = | 20 |
| $\frac{8}{15}$ | 8 | 2 | y | = | 40 |
| $\frac{12}{15}$ | 12 | 3 | z | = | 60 |
| | 6 | | 120 | | 120 |

$$\text{gdyż } 6 : 120 = 1 : x \quad | \quad 1 : 20 = 2 : y$$

$$1 : 20$$

$$1 : 20 = 3 : z$$

3. Jeżeli liczby stosunkowe są ułamkami różnomianownemi, sprowadzamy je do jednego mianownika, zatrzymujemy z ułamków równomianownych tylko liczniki i patrzymy, czy się one znieść dadzą lub nie; w pierwszym razie dodajemy otrzymane ilorazy, w drugim zaś liczniki same, aby sumę główną otrzymać; zamieniwszy więc ułamki na równomianowne, mamy przykład w (2) rozwiązany, np.:

| | | | | | | | |
|---------------|-----------------|----|---|-------------|---------------|----|---|
| $\frac{2}{3}$ | $\frac{8}{12}$ | 8 | 4 | albo krócej | $\frac{2}{3}$ | 8 | 4 |
| $\frac{1}{2}$ | $\frac{6}{12}$ | 6 | 3 | | $\frac{1}{2}$ | 6 | 3 |
| $\frac{5}{6}$ | $\frac{10}{12}$ | 10 | 5 | | $\frac{5}{6}$ | 10 | 5 |
| | 12 | | | | | 12 | |

Jeżeli liczby stosunkowe w części całościami, w części zaś uławkami są, zamieniamy całości na ułamki i postępujemy podług reguł w (2) i (3) wyłożonych.

4. Jeżeli liczby stosunkowe są same liczby mieszane, albo liczby mieszane z uławkami lub całościami, lub też nakoniec liczby mieszane z uławkami i całościami, zamieniamy wszystkie liczby stosunkowe na ułamki i postępujemy podług reguł w (3) danych, np.:

| | | | | | | | |
|----------------|----------------|----|---|----------------|----------------|----|---|
| $4\frac{1}{4}$ | $4\frac{3}{2}$ | 52 | i | $5\frac{1}{4}$ | $2\frac{1}{4}$ | 21 | 7 |
| $2\frac{3}{4}$ | $2\frac{9}{2}$ | 33 | | 3 | $1\frac{1}{4}$ | 12 | 4 |
| $1\frac{1}{6}$ | $1\frac{2}{2}$ | 14 | | $\frac{3}{4}$ | $\frac{3}{4}$ | 3 | 1 |
| 99 | | | | | | 12 | |

5. Jeżeli nakoniec liczby stosunkowe są liczbami wiązanymi, lub też w części wiązanymi, w części niewiązanymi liczbami, wyrażamy je w całościach przez zamianę na najniższe gatunki, albo też, ponieważ w ostatnim razie wypadłe liczby są wielkie i niewygodne, wyrażamy je w liczbach mieszanych przez zamianę na średnie lub najwyższe gatunki. Uczyniwszy to, postępujemy podług reguł w (4) danych, np.:

| | | | | |
|--------|-------|--------|------|------|
| 2 tal. | 8 śr. | 6 fen. | 822 | 411 |
| 3 . | 11 . | 8 . | 1220 | 610 |
| 1 . | 20 . | 10 . | 610 | 305 |
| | | | | 1326 |

albo

| | | | | | |
|--------|-------|--------|----------------|----------------|-----|
| 2 tal. | 8 śr. | 6 fen. | $2\frac{1}{6}$ | $2\frac{5}{6}$ | 411 |
| 3 . | 11 . | 8 . | $3\frac{1}{3}$ | $3\frac{2}{3}$ | 610 |
| 1 . | 20 . | 10 . | $1\frac{2}{3}$ | $1\frac{1}{3}$ | 305 |
| | | | | 1326 | |

albo

| | | | | | |
|--------|-------|--------|------------------|------------------|-----|
| 2 tal. | 8 śr. | 6 fen. | $68\frac{1}{2}$ | $68\frac{3}{4}$ | 411 |
| 3 . | 11 . | 8 . | $101\frac{2}{3}$ | $101\frac{1}{3}$ | 610 |
| 1 . | 20 . | 10 . | $50\frac{3}{4}$ | $50\frac{1}{4}$ | 305 |
| | | | | 1326 | |

R. Reguła spółki złożona.

107. W każdym zadaniu reguły spółki złożonej zachodzi kilka gatunków liczb stosunkowych. I tak np. jeżeli kilku kupców na zakład jaki różne summy na różny czas daje, czego skutkiem być musi, że przy podziale zysku nie tylko na wielkość wyłożonego kapitału, ale i na czas, przez który tenże był wyłożonym, zważać trzeba; również przy rozkła-

dzie podatków między różne gminy trzeba uwzględnić liczbę mieszkańców i wielkość posiadłości i t. d.

Każdy przykład reguły spółki złożonej możemy łatwo na przykład reguły spółki pojedynczej zamienić, jeżeli do siebie należące liczby stosunkowe przez siebie pomnożone za właściwe liczby stosunkowe weźmiemy i potem podług reguł w (104 i 105) danych postępujemy; np. A. daje do handlu pewnego 2000 tal. na 3 lata, B. 3000 tal. na 4 lata a C. 4400 tal. na 5 lat; ile dostanie każdy ze zysku, który właśnie tyle wynosi, ile C. wypłacić?

Piszemy:

$$\begin{array}{r|l} 2000 \times 3 = 6000 & 3 \quad x = 660 \\ 3000 \times 4 = 12000 & 6 \quad y = 1320 \\ 4400 \times 5 = 22000 & 11 \quad z = 2420 \\ \hline & 20 \quad 4400 \quad 4400 \end{array}$$

$$\text{gdyż } \frac{20}{1} : \frac{4400}{220} = 3 : x \quad | \quad 1 : 220 = 6 : y$$

$$1 : 220 = 11 : z$$

Jako postępowanie takowe nie jest fałszywem, wynika z tego co następuje: przez pomnożenie danych kapitałów przez dane czasy, znajdujemy kapitały, które w jednym roku tyle zysku przynoszą, ile dane kapitały w danych czasach. W rachunku więc bierzemy wszystko tak, jak gdyby całe przedsięwzięcie rok jeden tylko trwało. Widocznem bowiem jest, że 2000 tal. w 3 latach równie tyle zysku przyniesie, ile $3 \times 2000 = 6000$ tal. w 1 roku, 3000 tal. w 4 latach tyle ile $4 \times 3000 = 12000$ w 1 roku i t. d. Przykład dany do rozwiązania jest więc taki sam jak następujący: A. daje do handlu pewnego 6000 tal., B. 12000 tal. a C. 22000 tal. zyskują 4400 tal.; ile dostanie każdy?

Przykłady.

1. Cztery miasta mają zapłacić 8000 tal. podatku wojennego w stosunku do liczby swych mieszkańców. Jeżeli więc A. ma 2000, B. 2500, C. 3500 a D. 4500 mieszkańców; ile każde miasto zapłacić musi?

2. Liczbę 225 mamy wedle danych stosunków $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$ i $\frac{5}{6}$ podzielić; jak wielkie będą pojedyncze części?

3. Dwóch kupców prowadzi wspólnie handel; A. dał w tym celu 4800 tal. na 4 lata 8 miesięcy a B. 6000 tal. na 6 lat 6 miesięcy; zyskują obadwaj 2250 tal., ile więc każdy dostanie?

4. Pięć wsi, A., B., C., D., E., ma na założenie drogi zwirowej 3800

fur piasku dostawić; A. ma 40 koni, B. 60, C. 80, D. 90 a E 100; ile fur musi każda wieś w stosunku do liczb koni zwieźć?

5. W pewnym powiecie musi wieś A. 350 tal., wieś B. 530 tal., a wieś C. 600 tal. kontrybucyi nieprzyjacielowi zapłacić; po wojnie płaci im rząd jako wynagodzenie 1100 tal.; ile dostanie każda wieś w stosunku do wyplaconej przez nią kontrybucyi?

6. Cztery osoby wygrywają 7800 tal. w loteryi; ile dostanie każda, jeżeli ich wstawki do siebie się mają jak $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$?

7. Koszta transportu 108 cent. pewnego towaru wynoszą 80 tal.; z tego towaru należy się A. 35 cent., B. 55 cent., a C. reszta; ile każdy z nich stosunkowo za transport zapłacić powinien?

8. Ktoś zapisuje w testamencie A. 1300 tal., B. 1500 tal., C. 2000 tal. a D. 2400 tal.; koszta sądowe wynoszą jednak 1600 tal.; ile więc każdemu z jego części odciągnioném będzie?

9. Za pozostałe towary kupca pewnego, który zbankrutował, zapłacono 500 tal.; od kupca tego mają do żądania A. 4000 tal., B. 6000 tal., C. 1000 tal. a D. 600 tal.; ile więc dostanie każdy z tych 500 tal. w stosunku do swego żądania?

10. Pewien pan postanowia w testamencie, aby trzem jego służącym 800 tal. dano i żeby tę summę w stosunku do lat służby między nich rozdzielono; A. służył $8\frac{1}{2}$ lat, B. $6\frac{3}{4}$ a D. $9\frac{3}{8}$; ile dostanie każdy?

11. Ze zysku 980 tal. wynoszącego należy się A. $\frac{1}{4}$, B. $\frac{2}{3}$, C. $\frac{1}{8}$, a D. reszta; ile dostanie każdy?

12. Czterech kupców wysłał wspólnie towary; A. 50 cent., B. $60\frac{1}{2}$ cent., C. $40\frac{2}{3}$ cent. a D. 56 cent., koszta wysłania wynoszą 189 tal. 20 śr.; ile każdy z nich dać musi?

13. Między 4 kupców ma 10,000 tal., które przy pewnym przedsięwzięciu zyskali, być podzielonych. Uwzględnioną jednak przy podziale ma być ta okoliczność, że A. na ten cel 900 tal. na 2 lata dał, B. 800 tal. na $3\frac{1}{2}$ lat, C. tyle ile A. i B. razem na 4 lata, D. nakoniec też na 4 lata tyle ile A. i C. Ile więc dostanie każdy?

14. 4000 tal. było wypożyczonych po $5\frac{0}{100}$ przez 3 lata i 6660 tal. po $4\frac{0}{100}$ przez $4\frac{1}{2}$ lat. Prowizyje na ten sposób urosłe mają być między 3 osoby w stosunku liczb $2\frac{1}{2}$, $3\frac{2}{3}$ i $4\frac{3}{4}$ podzielone; ile dostanie każda?

15. Pewien pan zapisał w testamencie dwom służącym 1420 tal. z warunkiem, aby te w stosunku ich rocznej pensyi i lat służby podzielone zostały. Ile więc dostanie każdy, kiedy A. 12 lat z pensją 80 tal., a B. 18 lat z pensją 48 tal. służył?

II. Reguła mieższania czyli alligacyi.

108. Jeżeli kilka różnogatunkowych ciał tak ze sobą zmieszanych zostanie, że zupełnie nowe ciało powstaje, wtedy ciało to nowe nazywamy mieższaniną, a ciała, z których mieższanina powstała częściami składowemi. I tak np. jest mieższad mieższaniną, której częściami składowemi są mieżz i cynk; proch jest mieższaniną złożoną z saletry, siarki i wę-

gła, szkło mieszaniną potażu i krzemionki. Również powstają mieszaniny, jeżeli wodę z winem, lub różne gatunki win ze sobą, zmieszamy, i t. d.

Mieszając jakiegokolwiek rzeczy ze sobą, możemy, co się ich *dobroci* lub *wartości* tyczy, dwojaki cel mieć; raz porównujemy dobroć nowój mieszaniny z dobrocią innój mieszaniny, której ilość większą lub mniejszą być może, ale która z *z tych samych ciał* się się składa, żądając, aby obie mieszaniny *równą* dobroć miały; — drugi raz porównujemy dobroć mieszaniny z dobrocią ciał składowych, żądając, żeby wartość mieszaniny była pewną średnią wartością z wartości ciał składowych. W pierwszym razie chcemy się dowiedzieć, ile z ciał składowych do oznaczonej mieszaniny wziąć trzeba; w drugim zaś chcemy oznaczyć wartość średnią mieszaniny z ilości i wartości ciał składowych, lub też chcemy się dowiedzieć ile z ciał składowych, pewną wartość posiadających wziąć musimy, aby mieszanina pewną daną wartość miała.

Takim sposobem *trzy gatunki reguły mieszania* powstają. Pierwszy gatunek jest tylko obrachowaniem podziału ciał pewnych wedle danych stosunków, dla tego więc zwykle już przy regule spółki się o nim mówi i jako osobny rachunek się nie wyklada; drugi zaś i trzeci zowią się często *właściwą regułą mieszania* lub *regułą alligacyi*.

II. A. Pierwszy gatunek reguły mieszania.

109. Pierwszy gatunek reguły mieszania uczy nas znać liczbę, które nam okazują, ile z każdego ciała do pewnej mieszaniny, której ilość jest oznaczona, wziąć musimy, aby ta mieszanina taką samą dobroć miała, jak inna z tych samych ciał w danym stosunku złożona mieszanina. Dwie mieszaniny, których ilość jest różna, z tych samych jednak ciał złożone, wtedy tylko równą dobroć mieć mogą, jeżeli każde ciało składowe taką samą częścią jednej jest, jaką częścią drugiej, czyli jeżeli ilości tych samych ciał w obydwóch mieszaninach do siebie tak się mają, jak się mają ilości mieszanin samych do siebie. Z tego wypada, że wszelkie przykłady do pierwszego gatunku reguły mieszania należące, na ten sam sposób jak przykłady reguły spółki się rozwiązują; w miejscu summy głównej i części znajomych mamy tutaj ilość mieszaniny i znajome ilości ciał składowych, a w miejscu summy podzielnej i części nieznanomych mamy ilość mieszaniny i nieznanome ilości ciał skła-

dowych. Możemy więc tak mówić: summa główna ma się do summy podzielnej, jak się ma ilość znajoma danego ciała składowego do ilości nieznamomiej odpowiedniego ciała składowego; np. ile saletry, siarki i węgla potrzeba do zrobienia 240 cent. prochu, jeżeli do fabrykacyi prochu się bierze 75 części saletry, 11½ części siarki i 13½ części węgla?

Piszemy:

| | | |
|------------|-----|---------------------|
| Saletra 75 | 150 | $x = 180$ |
| Siarka 11½ | 23 | $y = 27\frac{3}{8}$ |
| Węgiel 14½ | 27 | $z = 32\frac{2}{3}$ |
| | 200 | $\frac{240}{240}$ |

$$\text{gdyż : } 200 : 240 = 150 : x \quad | \quad 5 : 6 = 23 : y$$

$$5 : 6 \quad 30 \quad | \quad y = 1\frac{3}{8} = 27\frac{3}{8}$$

$$x = 6 \times 30 = 180$$

$$5 : 6 = 27 : z$$

$$z = 1\frac{2}{3} = 32\frac{2}{3}$$

II. B. Drugi gatunek reguły mieszania.

110. Jeżeli kilka ciał, różną cenę posiadających ze sobą zmieszamy, widocznem jest, że pewna ilość tej mieszanki więcej kosztować musi, jak równa ilość tańszego, mniej zaś, jak równa ilość droższego ciała. Cena mieszanki będzie pewną ceną średnią zależną od cen ciał składowych. Drugi gatunek reguły mieszania albo pierwszy gatunek reguły aligacyi uczy nas znaleźć średnią cenę lub średnią wartość jakiej mieszanki, jeżeli ilości i ceny ciał składkowych są dane.

Mieszamy ze sobą 10 szefli zboża po 3 tal., 8 szefli po 2 tal. i 12 szefli po 2½ tal.; ile kosztować będzie szefel tej mieszanki? Zastanowiwszy się nieco nad tém zadaniem, rozwiązanie łatwo następującym sposobem znajdziemy: mnożąc każdą ilość zboża przez jego cenę, otrzymamy iloczyny, które nam wartość każdego gatunku zboża dają; summa tych iloczynów daje nam wartość wszystkich gatunków zboża, a dzieląc takową przez ilość szefli otrzymamy cenę albo wartość średnią; tu więc:

| | | |
|--------------------------|-----------|--|
| 10 szefli po 3 | tal. daje | 30 tal. |
| 8 . . . 2 | . . . | 16 . |
| 12 . . . 2½ | . . . | 30 . |
| 30 szefli kosztuje . . . | | 76 tal. |
| 1 . . . | więc | $\frac{76}{30} = 2 \text{ tal. } 16 \text{ sr.}$ |

Chcąc rachunek ten przez regułę trzech rozwiązać tak wnioskować możemy: ile kosztuje 1 szefel, jeżeli 30 szefli 76 tal. kosztuje?

kładziemy więc:

$$30 : 1 = 76 : x$$

$$x = \frac{76}{30} = 2 \text{ tal. } 16 \text{ srebr.}$$

111. Rachunku alligacyi, czyli dwóch ostatnich gatunków reguły mieszania, używamy często przy obrachowaniu mieszaniny złota i srebra z innymi metalami. I tak mieszamy złoto ze srebrem (biała mieszanina), albo z miedzią (czerwona mieszanina), albo ze srebrem i miedzią; srebro mieszamy zwykle z miedzią tylko.

Przed zaprowadzeniem nowego systemu wag ilość czystego złota w mieszaniu złota zawartego podawano w *karatach*, ilość zaś czystego srebra w mieszaniu srebra zawartego w *łótach*. Teraz podaje się ta ilość w *częściach tysięcznych* mieszaniny. Bliżej o tem z następującego dowiemy się wykładu.

A. Grzywna złota waży $\frac{1}{4}$ star. funta; tyle też waży grzywna srebra; grzywna złota zawiera w sobie 24 karaty a grzywna srebra 16 star. łótów. Grzywna złota albo srebra nazywa się *czystą* albo *nieczystą*, jeżeli złoto lub srebro czystym lub zmieszaniem jest. Czyste złoto zowie się 24 karatowém, czyste srebro 16 łótowém, gdyż w pierwszym razie składa się grzywna z 24 karatów czystego złota, w drugim zaś z 16 łótów czystego srebra; — ale złoto zowie się 23, 22, 21, 20 i t. d. karatowém, jeżeli w grzywnie takiego złota 1, 2, 3, 4 i t. d. karaty innego, gorszego metalu się znajdują; również i srebro zowie się 15, 14, 13, 12 i t. d. łótowém, jeżeli w grzywnie takiego srebra 1, 2, 3, 4 i t. d. łoty innego, gorszego metalu się znajdują. Inny ten gorszy metal nie nazywa się ani karatowym w stosunku do złota, ani łótowym w stosunku do srebra.

Stopiliśmy 8 grzywien 10 łótowego, 10 grzywien 12 łótowego i 6 grzywien 7 łótowego srebra; — ilo łótową jest mieszanina?

Piszemy:

| | |
|----------------------------------|-------------------|
| 8 grzywien 10 łótowego srebra ma | 80 łótów srebra |
| 10 12 | 120 |
| 6 7 | 42 |
| <hr/> | |
| 24 grzywien zawiera więc w sobie | 242 łótów srebra, |

A jak 12 łótowe?

$16 : 1000 = 12 : x$
 $x = 750$ tysięcznych części srebra zawierające.
 albo krótko tak: $12 = \frac{1}{4} \cdot 16$ i $\frac{1}{4} \cdot 1000 \times 750$.

Nowe pruskie talary zawierają w sobie 900 tysięcznych części czystego srebra, ile łótowe są więc one?

$1000 : 900 = 16 : x$
 $x = 14\frac{2}{3}$ łótowe;
 albo krótko: $900 = \frac{9}{10} \cdot 1000$ i $\frac{9}{10} \cdot 16 = 14\frac{2}{3}$.

Frydrychsdor jest $21\frac{1}{2}$ karatowem złotem, jakże da się na terazniejszy sposób ilość czystego złota w nim zawartego wyrazić?

$24 : 21\frac{1}{2} = 1000 : x$
 $x = 895\frac{3}{4}$ tysięcznych części czystego złota.

Ile tysięcznych części czystego srebra zawiera w sobie mieszanina z 8 funtów 625 tysięcznych części, 10 funtów 750 tysięcznych części i 6 funtów 437,5 tysięcznych części czystego srebra w sobie zawierających złożona?

| | | | |
|-----------|---|-------|--|
| 8 . 625 | = | 5000 | |
| 10 . 750 | = | 7500 | |
| 6 . 437,5 | = | 2625 | |
| 24 | | 15125 | |
| | | 24 | $= 630\frac{1}{4}$ tysięcznych części. |

II. C. Trzeci gatunek reguły mieszania.

112. Trzeci gatunek reguły mieszania albo drugi gatunek reguły alligacyi uczy nas znaleźć ilość, jaką z dwóch ciał, pewną cenę i wartość posiadających, do mieszaniny pewnej wziąć trzeba, aby takowa daną cenę lub daną wartość miała.

Reguły, za pomocą których zadania niniejsze rozwiązywać trzeba, tylko spamiętać musimy, prawdziwości bowiem ich tutaj dowieść nie możemy, gdyż zadania trzeciego gatunku reguły mieszania należą już do algebry; dla tego więc najprostsze zadanie tylko, w którym dwa ciała składowe zachodzą tutaj rozwiążemy. W zadaniu tém możemy szukać ilości ciał składowych, aby otrzymać mieszaninę, 1, 20, 30, 35 i t. d.

1. Ile potrzeba 15 i 10 łótowego srebra, aby otrzymać grzywnę 12 łótowego srebra.

Znajdujemy najpierw ilość gorszego gatunku odcinając wartość lub cenę średnią od wyższej wartości lub ceny i dzieląc różnicę tę przez różnicę między najwyższą i najniższą wartością lub ceną zachodzącą, — a tak będzie:

$$\frac{15 - 12}{15 - 10} = \frac{3}{5} \text{ grzywny } 10 \text{ łótowego.}$$

Znajdujemy potem ilość lepszego gatunku, odcinając otrzymaną ilość gorszego gatunku od mieszaniny 1, tu więc:

$$1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} \text{ grzywny } 15 \text{ łótowego.}$$

Że reguła ta nie jest fałszywą, wynika już z tego (na czem się oraz próba opiera), że w obydwóch ilościach znalezionych tyle jest srebra, ile w mieszaninie 1. I tak ma

$$\begin{array}{r} \frac{3}{5} \text{ grzywny } 10 \text{ łótowego srebra } \frac{3}{5} \cdot 10 = 6 \text{ łót. srebra} \\ \frac{2}{5} \quad \quad \quad 15 \quad \quad \quad \frac{2}{5} \cdot 15 = \frac{6}{1} \end{array}$$

tyle więc ile jedna grzywna 12 łótowego srebra.

Rachunkowi temu następującą formę nadać możemy:

$$5 \left\{ \begin{array}{l} 15 \quad \quad 2 \quad \quad \frac{3}{5} \\ 10 \quad \quad 3 \quad \quad \frac{2}{5} \end{array} \right. \text{ t. j.}$$

t. j. do mieszaniny 1 potrzeba $\frac{3}{5}$ 15 łótowego i $\frac{2}{5}$ 10 łótowego srebra, albo do mieszaniny 5 = 2 × 3 potrzeba 2 części 15 łótowego i 3 części 10 łótowego srebra.

Chcąc przykład powyższy według nowego sposobu rachować, takbyśmy rachować musieli:

Ile potrzeba ze srebra 937,5 tysięcznych części i ze srebra 625 tysięcznych części czystego srebra w sobie zawierającego, aby dostać funt srebra 750 tysięcznych części czystego srebra w sobie zawierającego?

$$\frac{937,5 - 750}{937,5 - 625} = \frac{187,5}{312,5} = \frac{1875}{3125} = \frac{3}{5} \text{ i } 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

2. Ile potrzeba 18 i 14 karatowego złota do 20 funtów 16 karatowego?

Znajdujemy najpierw podług (1) ilości obydwóch gatunków złota dla mieszaniny 1 potrzebnych i mnożymy takowe przez 20; piszemy więc:

ilość 11 karatowego złota

dla mieszaniny 1 jest $= \frac{18 - 16}{18 - 11} = \frac{2}{7}$, dla mieszaniny 20
 $= \frac{20 \cdot 2}{7} = \frac{40}{7} = 5\frac{5}{7}$;

ilość zaś 15 karatowego złota

dla mieszaniny 1 jest $= 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$, dla mieszaniny 20
 $= \frac{20 \cdot 5}{7} = \frac{100}{7} = 14\frac{2}{7}$ albo $20 - 5\frac{5}{7} = 14\frac{2}{7}$.

Jakbyśmy przykład ten rachować musieli, chcąc oznaczyć ilość danego i szukanego złota przez części tysięczne?

Przykłady.

1. Ile tysięcznych części droższego metalu znajduje się w mieszaninie z 26 funtów czystego srebra i 10 funtów miedzi złożonej?

2. Ile saletry, siarki i węgla potrzeba do 448 funtów prochu; jeżeli do 100 funtów potrzeba 75 funt. saletry, $11\frac{1}{4}$ funt. siarki i $13\frac{1}{4}$ funta węgla?

3. Ile tysięcznych części droższego metalu znajduje się w mieszaninie z 18 funtów czystego złota, 6 funtów srebra i 2 funtów miedzi złożonej?

4. Mamy z dwóch gatunków srebra 840 i 620 tysięcznych części czystego srebra w sobie zawierających zrobić mieszaninę 700 tysięcznych części czystego srebra w sobie zawierającą; ile musimy z każdego gatunku wziąć, aby 120 funtów tej mieszaniny otrzymać?

5. Kupiec pewien miesza trzy gatunki wina węgierskiego ze sobą, t. j. 25 kwart po 1 tal. 5 śr., 18 kwart po 28 śr. i 10 kwart po 1 tal. 10 śr.; pytanie jest, po ile kwartę mieszaniny tej przedawać może, nie chcąc ani zyskać ani stracić?

6. Chemik pewien ma dwie szklanki wody, w których sól jest rozpuszczona. W pierwszej z nich jest $\frac{1}{4}$ część, w drugiej $\frac{1}{3}$ część soli. Ile z każdego gatunku wody wziąć musi, aby dostać wodę w której $\frac{1}{4}$ część jest soli?

7. Ktoś dolewa do 80 kwart wina po 25 śr. 8 kwart wody; ile wtedy kosztuje kwarta tej mieszaniny?

8. Do mieszaniny pewnej metalowej, 6 funtów ważącej, potrzeba 2 funt. 24 łót. miedzi, 24 łót. ołowiu i resztę cyny; ile potrzeba z każdego gatunku do 10 cent. 80 funt.?

9. Złotnik pewien miesza kilka gatunków srebra t. j. 12 funtów 560 tysięcznych części, 10 funtów 820 tysięcznych części, 11 funtów 710 tysięcznych części czystego srebra w sobie zawierających i 4 funty miedzi ze sobą; ile tysięcznych części droższego metalu będzie ta mieszanina w sobie zawierająca?

10. Dwa gatunki wina mamy tak ze sobą zmieszać, abyśmy 50 kwart wina po 28 śr. dostali; kwarta jednego gatunku tych win kosztuje 1 tal. 2 śr., kwarta zaś drugiego 25 śr.; ile więc kwart z każdego gatunku wziąć musimy?

11. Ile potrzebujemy wziąć z dwóch gatunków złota, z których jeden 920 tysięcznych części, drugi zaś 650 tysięcznych części czystego złota w sobie zawiera, aby otrzymać 18 funtów złota 800 tysięcznych części czystego złota w sobie zawierającego?

12. Ile tysięcznych części droższego metalu zawiera w sobie mieszanina złota z 12 funtów 400 tysięcznych części, 6 funtów 800 tysięcznych części, 10 funtów 720 tysięcznych części, 13 funtów 910 tysięcznych części czystego złota w sobie zawierających i 5 funtów srebra złożona?

13. Ile tysięcznych części droższego metalu zawiera w sobie dawniejsze $13\frac{1}{2}$ łótowe srebro?

14. Ile tysięcznych części droższego metalu zawiera w sobie mieszanina srebrna złożona z 20 funtów 11 łót. srebra i 10 funt. srebra 740 tysięcznych części czystego srebra w sobie zawierających?

15. Do 20 funtów pewnej metalowej mieszaniny wzięliśmy 5 funt. 20 łótów srebra, 6 funtów 10 łótów ołowiu i 8 funtów miedzi; mając zrobić 25 funtów takiej samej mieszaniny, ile z każdego z wymienionych metali wziąć musimy?

ROZDZIAŁ VIII.

Rachunek zysku i straty.

113. W rachunku tym zachodzą pieniądze pod czworakiem nazwiskiem, jako cena kupna, cena sprzedaży, zysk i strata. *Ceną kupna* są te pieniądze, za które towar jaki kupujemy, albo za wypłatą których towar jaki naszą własnością się staje; *ceną sprzedaży* nazywamy te pieniądze, za który towar jaki komu sprzedajemy albo za wypłatą których towar jaki na własność komu dajemy. Jeżeli cena sprzedaży większą jest jak cena kupna, nazywamy przewyżkę ceny sprzedaży nad cenę kupna *zyskiem*; jeżeli zaś przeciwnie cena kupna większą jest jak cena sprzedaży, nazywamy przewyżkę ceny kupna nad cenę sprzedaży *stratą*. Przesyłając towar jaki z miejsca na miejsce na osi lub wodą, rachujemy wynikłe ztąd koszta transportu, do ceny kupna.

Przy każdym kupnie lub sprzedaży zachodzą z tych czterech rzeczy zawsze tylko trzy, t. j. zawsze cena kupna i sprzedaży i oprócz tego zysk albo strata; wszystkie cztery razem zachodzić nie mogą, gdyż na tym samym towarze równocześnie zyskać i stracić nie możemy. Mogą więc zachodzić:

I. cena kupna, cena sprzedaży i zysk.

II. cena kupna, cena sprzedaży i strata.

W każdym z tych dwóch głównych przypadków możemy każdą z trzech rzeczy z dwóch innych wynaleść, przez co sześć zadań w ogóle powstaje:

1. cenę kupna wynaleść z ceny sprzedaży i zysku;
2. cenę kupna wynaleść z ceny sprzedaży i straty;
3. cenę sprzedaży wynaleść z ceny kupna i zysku;
4. cenę sprzedaży wynaleść z ceny kupna i straty;
5. zysk wynaleść z cen kupna i sprzedaży;
6. stratę wynaleść z cen kupna i sprzedaży.

114. Zysk i stratę możemy na dwojaki sposób obrachować, t. j.

1. *na sposób zwyczajny* znajdujemy zysk odciągając cenę kupna od ceny sprzedaży; stratę zaś odciągając cenę sprzedaży od ceny kupna, i wyrażając różnicę otrzymaną w talarach, srebrnikach i t. d.
2. *w procentach* t. j. szukamy ile zysku na każdym 100 mamy, lub też ile straty na każdym 100 jest. I tak jeżeli za wyłożone 100 tal.; 105 tal. dostaniemy, zyskaliśmy 5 %; jeżeli zaś za 100 tal. wyłożonych tylko 95 tal. wybierzemy, straciliśmy 5 %. Mówi się zaś: zysk obrachowuje się na 100, strata w 100. Obrachowanie zysku i straty w procentach uskuteczniamy przez regułę trzech.

Przy zadaniach rachunku zysku i straty powstaje jeszcze i przez to wielka różnorodność, że trzy w nich zachodzące rzeczy na tę samą mnogość lub też na różne mnogości towarów ściągać się mogą. W ostatnim razie możemy zadanie dane na zadanie pierwszego gatunku zamienić, przez to, że dwie dane rzeczy przez regułę trzech w takiej mnogości wyrażamy, w jakiej nieznajomy wyraz jest szukany*). Widzimy także tutaj, że rachunek zysku i straty z regułą trzech w związku stoi.

115. Jeżeli w przykładzie jakim rachunku zysku i straty wszystkie trzy dane rzeczy *na tę samą mnogość* się ściągają, rachujemy wtedy we wszystkich 6 w (112) podanych przypadkach na sposób następujący:

1. Mamy *zysk* obrachować

a) *na sposób zwyczajny*. Odciągamy cenę kupna od ceny sprzedaży; różnica daje nam zysk.

*) Np.: 30 funt. kosztuje 10 tal., funt sprzedajemy po 15 śr., ile zarobiliśmy na jednym funcie? — Przykład ten łatwo na inny zamienić się da, gdyż wiedząc ile 30 funt. kosztuje, wiemy też ile 1 funt kosztuje, — będzie więc: 1 funt kosztuje 10 śr., sprzedajemy po 15 śr. i t. d.

I tak niech ceną sprzedaży będzie 32 tal. 25 śr.
 kupna 26 15
 zysk 6 tal. 10 śr.

b. *w procentach.* Piszemy: cena kupna ma się do ceny sprzedaży jak 100 : x; odciągamy potem 100 od wartości dla x znalezionej a różnica daje nam zysk w procentach wyrażony; tu więc:

$$26\frac{1}{2} : 32\frac{2}{3} = 100 : x$$

z czego wypada

$$x = \frac{123\frac{1}{3}}{100} \text{ odciągając}$$

będzie $23\frac{1}{3}$ zysk w proc. wyrażony.

2. Mamy stratę obrachować

a. *na sposób zwyczajny.* Odciągamy cenę sprzedaży od ceny kupna; różnica daje nam stratę.

I tak niech będzie ceną kupna 50 tal. 20 śr.
 sprzedaży 36 5
 strata 14 tal. 15 śr.

b. *w procentach.* Piszemy także: cena kupna ma się do ceny sprzedaży jak 100 do x; odciągamy wartość dla x znaną, która zawsze mniejsza jest jak 100, od 100 a różnica daje stratę w procentach wyrażoną; tu więc:

$$50\frac{2}{3} : 36\frac{1}{2} = 100 : x$$

$$\text{a zatem } x = 71\frac{2}{3}$$

jest zaś $100 - 71\frac{2}{3} = 28\frac{1}{3}$ stratą w procentach wyrażoną.

3. Cenę kupna znajdziemy z ceny sprzedaży i zysku odciągając zysk od ceny sprzedaży.

4. Cenę kupna znajdziemy z ceny sprzedaży i straty dodając stratę do ceny sprzedaży.

5. Cenę sprzedaży znajdziemy z ceny kupna i zysku dodając zysk do ceny kupna.

6. Cenę sprzedaży znajdziemy z ceny kupna i straty odciągając stratę od ceny kupna.

116. Jeżeli w jakim przykładzie rachunku zysku i straty wszystkie trzy dane rzeczy na różną mnogość towarów się ściągają, wtedy wyrażamy je w takiej mnogości, w jakiej nieznanym wyraz jest szukanym.

1. Mamy zysk obrachować:

a. *na sposób zwyczajny;* np. 30 funtów pewnego towaru

kosztuje 16 tal. 20 śr.; funt sprzedajemy po 20 srebr.; jak wielką jest korzyść na 1 funcie?

Aby cenę kupną 1 funta obrachować, piszemy:

$$301 : = 16 - 20 : x$$

$$x = \frac{500}{30} = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3} \text{ śr.}$$

| | | |
|--|------------------------|--------------------------|
| | a zatem cena sprzedaży | 20 śr. |
| | · kupna | 16 $\frac{2}{3}$ · |
| | | zysk 3 $\frac{1}{3}$ śr. |

b. w procentach. Piszemy:

$$16\frac{2}{3} : 20 = 100 : x$$

$$x = \frac{2000}{16\frac{2}{3}} = \frac{2000 \cdot 3}{50} = 120$$

$$\text{Zysk więc} = 120 - 100 = 20 \%$$

2. Mamy stratę obrachować:

a. na sposób zwyczajny, np. za 80 szefli zboża zapłacono 160 tal. 15 śr.; sprzedawano potem szefel po 1 tal. 25 śr.; jaka jest strata na 80 szeflach?

Aby znaleźć za ile 80 szefli sprzedano, piszemy:

$$1 : 80 = 1\frac{5}{6} : x$$

$$x = \frac{80 \cdot 11}{6} = \frac{40 \cdot 11}{3} = \frac{440}{3} = 146\frac{2}{3}$$

| | |
|-------------------------|-----------------------|
| a zatem jest cena kupna | 160 tal. 15 śr. |
| · sprzedaży | 146 · 20 · |
| | strata 13 tal. 15 śr. |

b. w procentach. Piszemy:

$$160\frac{1}{2} : 146\frac{2}{3} = 100 : x$$

$$x = 91\frac{3\frac{1}{3}}{3\frac{1}{3}}$$

$$\text{Strata więc } 100 - 91\frac{3\frac{1}{3}}{3\frac{1}{3}} = 8\frac{5\frac{2}{3}}{3\frac{1}{3}} \%$$

3. Łatwém jest, zastanowiwszy się nieco, obrachowanie ceny kupna raz z ceny sprzedaży i zysku, drugi raz z ceny sprzedaży i straty; również łatwém jest obrachowanie ceny sprzedaży raz z ceny kupna i zysku, drugi raz z ceny kupna i straty. Rachujemy podług okoliczności już to z proporcją, już to bez téjże. Np.: ktoś sprzedał 3 cent. pewnego towaru za 120 tal., zyskał na każdym funcie 1 śr. 6 fen., po ile płacił za centnar?

$$\text{Zysk na 1 funcie} = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \text{ śr.}$$

$$\cdot 3 \text{ cent. albo } 300 \text{ funt.} = \frac{300 \cdot 3}{2} \text{ śr.} = 15 \text{ tal.}$$

$$\begin{array}{r} \text{a zatem cena sprzedaży} = 120 \text{ tal.} \\ \text{zysk} = 15 \\ \hline \text{cena kupna} = 105 \text{ tal.} \end{array}$$

Ktoś kupił 7 cent. 50 funt. pewnego towaru za 225 tal.; sprzedając ten towar stracił na każdym funcie 2 śr.; po ile więc sprzedawał funt?

$$\begin{array}{l} 7\frac{1}{2} \text{ cent. : 1 funt.} = 225 \text{ tal. : } x \text{ tal.} \\ 750 \text{ funt. : 1 funt.} = 225.30 \text{ śr. : } x \text{ śr.} \end{array}$$

z czego wypada:

$$\begin{array}{r} x = 9 \text{ śr., cena kupna,} \\ 2 \text{ \cdot strata,} \\ \hline \end{array}$$

a więc 7 śr., cena sprzedaży.

117. Zysk i strata są często, jeżeli ceny kupna lub sprzedaży znaleźć mamy, nie w tal., śr. i t. d. lecz tylko w procentach wyrażone; w takim razie możemy za pomocą proporcji zysk i stratę w tal. i t. d. obrachować; np. kupiec sprzedaje towar pewien, za który 60 tal. zapłacił z 18 % straty; za jaką cenę więc sprzedał?

Ponieważ 18 % straty znaczy: za wyłożone 100 tal. wziął tylko 82 tal., piszemy więc:

$$100 : 82 = 60 : x$$

z czego wypada $x = 49\frac{1}{3}$ tal.

Kupiec zyskuje przy przedsięwzięciu pewnym, na które 20000 tal. dał, 55 %; ile zyskał w ogóle?

55 % zysku znaczy: za każde 100 dostał 155;

mamy więc: $100 : 155 = 20000 : x$

a zatem $x = 31000$

$$\begin{array}{r} 20000 \text{ odciagnione daje} \\ \hline 11000 \text{ tal. zysku.} \end{array}$$

Przykłady.

1. Kramarz pewien kupuje towarów za 22 tal. 20 śr.; zyskał w sprzedaży 16 %; za co sprzedał swe towary?

2. Ktoś sprzedaje konia, którego za 180 tal. kupił, za 145 tal.; ile procentów stracił?

3. Ktoś kupił dobra za 12800 tal. a zyskał przy sprzedaży 35 %; za ile sprzedał te dobra?

4. Ile dano za towar pewien, który za 88 tal. sprzedany 21 % zysku przyniósł?

5. Ile dano za towar pewien, który za 45 tal. 25 śr. sprzedany 9½ % straty przyniósł?

6. Kupiec pewien zbożem handlujący kupił w dobrym czasie 400 szefli zboża za 588 tal.; sprzedaje później szefel po 4 tal. 10 śr.; pytanie jest ile zyskał na szeflu i jaki jest jego zysk w procentach wyrażony?

7. Ktoś sprzedawszy 56 szefli kartofli stracił 12 %; jak wielką jest jego strata, gdy kartofle te za 85 tal. 20 śr. kupił?

8. Kupiec pewien w Poznaniu drzewem handlujący kupił gdzieś 400 sążni drzewa po 3 tal. 20 śr.; koszt transportu do Poznania wyniosły 180 tal. 20 śr.; w Poznaniu sprzedał to drzewo za 1800 tal.; jak wielki jest jego zysk i ile procentów przyniosła mu ta sprzedaż?

9. Za ile sprzedano 11 łokci materyi pewnej, jeżeli za 40 łokci 250 tal. zapłacono i na każdym łokciu 8 śr. zyskano?

10. Kupiec pewien drzewem handlujący sprzedaje 31 sążni drzewa za 180 tal. 20 śr. i zyskuje przytém na każdych $7\frac{1}{2}$ sążniach $9\frac{1}{2}$ tal.; po ile płacił za sążeń?

11. Kupiec pewien traci na pewnym towarze 42 %, jeżeli takowy za 487 $\frac{1}{2}$ tal. sprzedaje; za ile więc kupił ten towar i jak wielką jest jego strata?

12. Za ile może kupiec pewien sprzedąć towar, za który 133 tal. 25 śr. dał, jeżeli na nim 18 procentów zyskać chce?

ROZDZIAŁ IX.

Niektóre uwagi o innych jeszcze rachunkach.

118. Oprócz dotychczas wyłożonych rachunków, z których wszystkie za pomocą czterech działań liczb całkowitych i ułamkowych i za pomocą proporcji rozwiązać się dają, mamy jeszcze wiele innych rachunków, z których niektóre jak np. właściwy rachunek wekslowy do rachunków kupieckich w ścisłym znaczeniu wyrazu należą i rzadko kiedy w innym obrębie praktycznego życia zachodzą; inne zaś tak są łatwe, że, zastanowiwszy się nieco nad niemi, zaraz je obrachować będziemy w stanie, jeżeli tylko zachodzące w nich wyrażenia techniczne poznamy. O niektórych rachunkach takich następującą wzmiankę tu czynimy.

Średnią liczbę albo *średniówkę* z dwóch lub więcej liczb dostaniemy, jeżeli dane liczby do siebie dodamy i wypadłą sumę przez ilość tych liczb podzielimy. Za pomocą tej reguły rozwiązujemy rachunek, który *rachunkiem przecięcia* nazwać można.

Ktoś wydaje przez 6 dni codzienie talara więcej. pierwszego dnia wydał 12 tal.; ile wydawał w przecięciu codziennie?

$$x = \frac{12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17}{6} = \frac{87}{6} = 14\frac{1}{2} \text{ tal.}$$

Głównym zadaniem jest tutaj obrachowanie urodzajności lub *średniego plonu* roli pewnej, czyli obrachowanie plonu roli jakiej z kilkoletniego wysiewu i wymłotu. Sposób, na jaki tu rachować trzeba, okaże nam przykład następujący:

| | | | | |
|------|--------------|-----------|---------------|-----------|
| 1851 | roku wysiano | 8 sześci, | a sprzątnięto | 24 sześci |
| 1852 | . | 10 | . | 40 |
| 1853 | . | 6 | . | 21 |
| 1854 | . | 11 | . | 40 |
| 1855 | . | 9 | . | 42 |
| | | 44 | | 167 |

Sprzęt w przecięciu = $\frac{167}{44} = 3\frac{35}{44}$ sześci,

t. j. 44 sześci wysianych przyniosło 167 sześci, ile przyniosł 1 szefel wysiany?

II. Rozsyłając towary w skrzyniach, miechach, beczkach i t. d. rozróżniamy wagę rzeczy do opakowania towarów użytych, *Tarą* nazwaną, od wagi towaru samego, *Netto* zwaną, i od wspólnej wagi obydwóch, która się *Brutto* nazywa. *Rachunek Tary* uczy nas z dwóch danych wag, trzecią wynaleść.

Jest zaś oczywiście: $\text{Tara} = \text{Brutto} - \text{Netto}$

$\text{Netto} = \text{Brutto} - \text{Tara}$

$\text{Brutto} = \text{Tara} + \text{Netto}$

Przykłady wszelkie następującym podobne:

Jeżeli na 109 funt. Brutto 3 funty Tary mamy, ile funtów Tary będzie na 8 cent. 60 funt.? albo

Brutto pewnego towaru wynosi 26 cent., przytém rachujemy na 1 centn. Brutto 12 funtów Tary a funt Netto kosztuje 15 śr., ile kosztuje całe Netto?

za pomocą reguły trzech łatwo obrachować się dają.

III. *Obrachowanie Fusti* należy do rachunku Tary. *Fusti Refacti*, albo *Gerbelura* oznacza w języku kupieckim nieczystą albo zepsutą część towaru pewnego, która oczy-

wiście taniiej przedawaną bywa, jak część niezepsuta. Trudnem nie jest wartość całego towaru obrachować, jeżeli cena pewnej wagi czystego i nieczystego towaru jest dana.

IV. *Rachunek wymiany* zachodzi wtedy, kiedy towar za towar wymieniamy, czyli towar towarem płacimy. I ten rachunek jest łatwy.

Ile łokci sukna po $3\frac{1}{2}$ tal. dostaniemy za 50 kwart wina po 2 tal. 15 śr.?

Piszemy:

$$1. \quad 50 \text{ razy } 2 \text{ tal. } 15 \text{ śr.} = 100 + 25 = 125 \text{ tal.}$$

$$2. \quad 3\frac{1}{2} : 125 = 1 : x$$

$$x = \frac{125 \cdot 2}{7} = \frac{250}{7} = 35\frac{5}{7} \text{ łokci.}$$

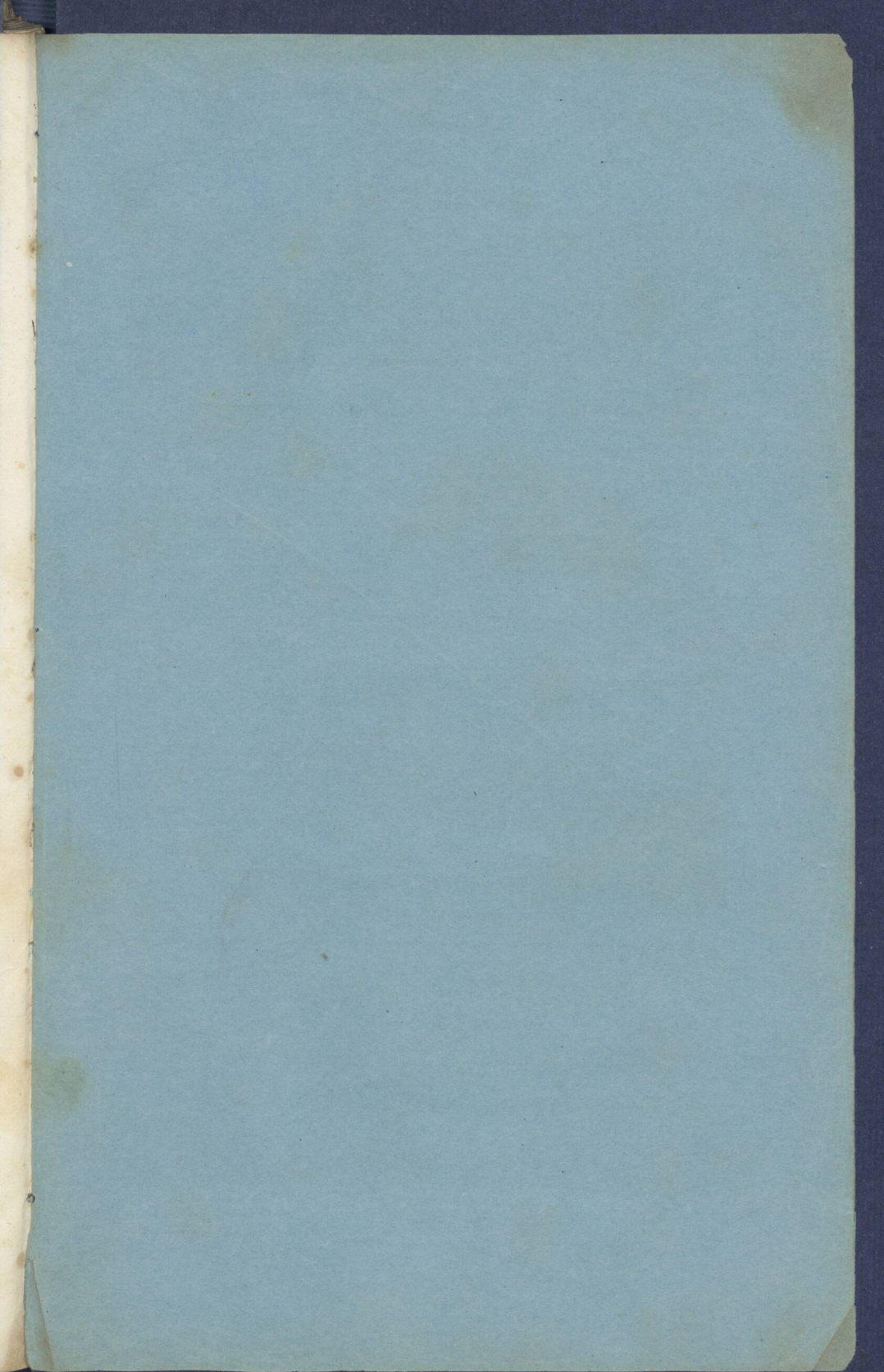
POMYŁKI DRUKU.

| | | | |
|---------------------------|-------|------------------|---|
| Strona 17, wiersz od góry | 1, | po wyrazie cyfrę | braknie słów „mnogość oznaczająca“. |
| „ 17, | „ „ „ | 15, | zamiast przez, czytaj przy. |
| „ 18, | „ „ „ | 18, | „ mając, „ mając. |
| „ 20, | „ „ „ | 34, | „ żedaną, „ żądaną. |
| „ 22, | „ „ „ | 20, | „ to, „ tu. |
| „ 22, | „ „ „ | 24, | „ ilorazem, „ ilorazu. |
| „ 23, | „ „ „ | 29, | przed wyrazem przy braknie „jeżeli“. |
| „ 31, | „ „ „ | 4, | „ Nim „ „41“. |
| „ 31, | „ „ „ | 32, | zamiast 1200000 gran., czytaj 2000000 granom. |
| „ 31, | „ „ „ | 38, | „ starych, „ nowych. |
| „ 32, | „ „ „ | 8, | „ stara, „ stopa. |

SPIS ROZDZIAŁÓW.

| | Strona |
|--|--------|
| Rozdział I. | |
| O liczbach, o systemie liczb dziesiętkowym i o liczeniu | 1 |
| Rozdział II. | |
| Cztery proste działania liczb całkowitych..... | 9 |
| I. Cztery działania proste liczb bezwzględnych całkowitych..... | 9 |
| II. Cztery działania proste liczb imiennych całkowitych..... | 29 |
| Tablica monet, wag i miar krajowych..... | 31 |
| Rozdział III. | |
| O ułamkach..... | 42 |
| I. O ułamkach prostych..... | 42 |
| II. O ułamkach dziesiętnych..... | 65 |
| Rozdział IV. | |
| O stosunkach i proporcjach geometrycznych i o rachunkach na nich opartych..... | 73 |
| I. Stosunki i proporcje..... | 73 |
| II. O regule trzech..... | 84 |
| III. Reguły złożone..... | 96 |
| Rozdział V. | |
| O regułach procentu, czasu i zamiany..... | 100 |
| I. Reguła procentu..... | 100 |
| A. Reguła procentu pojedynczego..... | 100 |
| B. Reguła przychodu złożonego..... | 108 |
| II. Reguła czasu..... | 109 |
| III. Reguła zamiany..... | 113 |
| Zamiany wag starych na nowe i obrachowania cen wag nowych z cen wag starych..... | 117 |
| Rozdział VI. | |
| O regule łańcuchowej..... | 122 |
| Rozdział VII. | |
| O regule spółki i o regule alligacyi czyli mieszania..... | 126 |
| I. Reguła spółki..... | 126 |
| A. Reguła spółki pojedyncza..... | 127 |
| B. Reguła spółki złożona..... | 130 |
| II. Reguła mieszania..... | 132 |
| II. A. Pierwszy gatunek..... | 133 |
| II. B. Drugi gatunek..... | 134 |
| II. C. Trzeci gatunek..... | 137 |
| Rozdział VIII. | |
| Rachunek zysku i straty..... | 140 |
| Rozdział IX. | |
| Niektóre uwagi o innych jeszcze rachunkach..... | 145 |



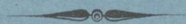


NIEKTÓRE NAKŁADY

KSIEGARNI

Jana Konst. Żupańskiego.

| | Tal. | Sgr. |
|--|------|------|
| Historya królów i książąt polskich przez T. Waga..... | 1 | 20 |
| Wyciąg z Geografii Polski przez Waga..... | — | 10 |
| Geografia opisanie ziem polskich p. Joachima Lelewela..... | — | 25 |
| Nauka prozy Rymarkiewicza..... | — | 20 |
| Pieśń o ziemi naszej..... | — | 25 |
| Zachwycenie i Błogosławiona p. Lenartowicza..... | — | 10 |
| Lirenka przez tegoż..... | 1 | — |
| Święta Zofia przez tegoż..... | — | 10 |
| Obrazy z pisma św. przez L. Niemojowskiego..... | 1 | 20 |



1
The most
in style

No

