Dublet

PROGRAMM

des

Königlichen Gymnasiums

zu

LISSA

für

die Zeit von Ostern 1884 bis Ostern 1885.

Inhalt:

1) Über Additionstheoreme vom Oberlehrer Julius Toeplitz.

2) Schulnachrichten vom Direktor Dr. Hermann Eckardt.

LISSA.

Leszno

Druck von Oskar Ludwig.

1885. Progr. 139.

Ueber Additionstheoreme.

Einleitung.

Der Aufstellung von Additionstheoremen liegt folgender Gedanke zu Grunde. Es sei eine symmetrische Differenzialgleichung:

$$f(x).dx + f(y).dy = o \quad (1)$$

gegeben. Diese kann man Glied für Glied integriren. Lässt man die Integrale von der unteren Grenze α anfangen, so erhält man die Integralgleichung:

$$\int_\alpha^x f(x).dx + \int_\alpha^y f(y).dy = C \quad (2)$$

Um die Constante C zu bestimmen, setzen wir fest, dass $y = z$ für $x = \alpha$ werden soll. Alsdann ergiebt sich aus der Gleichung (2): $C = \int_\alpha^z f(z).dz$. Also erhalten wir die (im Allgemeinen transcendente) Gleichung:

$$\int_\alpha^x f(x).dx + \int_\alpha^y f(y).dy = \int_\alpha^z f(z).dz, \quad \text{oder:} \quad F(x) + F(y) = F(z) \quad (3),$$

wenn wir $\int_\alpha^x f(x).dx = F(x)$ setzen.

Gelingt es nun auf irgend eine Weise, eine algebraische Integralgleichung: $\psi(x,y,c) = o$ für die Differenzialgleichung (1) zu finden, und setzt man, wie oben, fest, dass $y = z$ für $x = \alpha$ werde, so ergiebt sich: $\psi(\alpha,z,c) = o$. Eliminirt man aus dieser Gleichung und der obigen $\psi(x,y,c) = o$ die Constante c, so erhält man eine Gleichung zwischen x,y und z und aus dieser $z = \chi(x,y)$. Dadurch verwandelt sich die Gleichung (3) in folgende:

$$F(x) + F(y) = F(\chi[x,y]). \quad (4).$$

Es ist also die Summe zweier transcendenten Functionen in eine einzige derselben Art verwandelt, deren Argument eine algebraische Function der Argumente der beiden Summanden ist; eine solche Gleichung nennt man ein Additionstheorem.

Als Beispiel diene die Differenzialgleichung $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = o$. Diese giebt, unmittelbar integrirt: $\int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^y \frac{dy}{x} = \int_1^z \frac{dz}{z}$, oder: $\log x + \log y = \log z$. Die Gleichung $\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = o$

giebt aber, wenn man sie auf die Form $y.dx + x.dy = o$ bringt, die algebraische Integralgleichung: $xy = c$. Da $y = z$ für $x = 1$ werden soll, so erhalten wir $z = c$, und daher $z = xy$. Also lautet das Additionstheorem für die Logarithmen: $\log x + \log y = \log (xy)$. —

Die Additionsgleichung (4) wird häufiger in einer anderen Form angewendet. Setzt man nämlich $F(x) = u$, und sieht x als eine Function von u an, so dass $x = \varphi(u)$ gesetzt wird, so heisst φ die Umkehrung von F, und es gilt die Gleichung: $\varphi\,(F[x]) = x$. Setzt man nun in der Gleichung (4) $F(x) = u$, $F(y) = v$, so nimmt sie folgende Form an: $u + v = F(\chi[\varphi u, \varphi v])$. Wenden wir auf diese Gleichung die Operation φ an, so erhalten wir die zweite Form des Additionstheorems: $\varphi(u+v) = \chi(\varphi u, \varphi v)$ (5), d. h. wir erhalten die Function der Summe zweier Argumente ausgedrückt durch eine algebraische Verbindung der Functionen der einzelnen Argumente.

Um bei dem obigen Beispiele zu bleiben, setzen wir $\log x = u$, und die umgekehrte Function $x = e^u$. Es ergiebt sich das Theorem: $e^{u+v} = e^u . e^v$.

Euler war der Erste, dem es gelang, eine algebraische Integralgleichung der Differenzialgleichung $\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{f(y)}} = o$ zu finden, in welcher $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ ist; und zwar ging Euler nicht von der Differenzialgleichung aus, sondern von der algebraischen Gleichung. Er nahm nämlich eine algebraische Gleichung $\psi(x,y) = o$ an, die sowohl in x, als in y vom 2. Grade war. Diese differenzirte er, und bestimmte die vorher unbestimmt gelassenen Coëfficienten so, dass die Differenzialgleichung die gewünschte Form $\frac{dx}{\sqrt{f(x)}} + \frac{dy}{\sqrt{f(y)}} = o$ annahm; womit in der Hauptsache das Additionstheorem für die elliptischen Functionen 1. Gattung gefunden war. Lagrange schlug den entgegengesetzten Weg ein. Er ging von der Differenzialgleichung aus, und leitete aus dieser die algebraische Integralgleichung ab.

Die eigentliche Quelle aller Additionstheoreme fand Abel. Seine Untersuchungen sind in dem berühmten Aufsatze: *„Mémoire sus une propriété générale d'une classe très-étendue de fonitions transcendantes“* niedergelegt. Jacobi erkannte sofort die ganze Tragweite der Abel'schen Untersuchungen. In den beiden Aufsätzen: *„De functionibus quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianarum innititur“* (Crelle, Bd. 13), und „Ueber eine neue Methode zur Integration der hyperelliptischen Differenzialgleichung und über die rationale Form ihrer vollständigen algebraischen Integralgleichungen“ (Cxelle, Bd. 32) hat Jacobi die schwierigen Untersuchungen Abels zugänglich gemacht, und insbesondere gezeigt, dass bei der Umkehrung der Abel'schen Integrale nicht Functionen e i n e r, sondern m e h r e r e r Variabeln eingeführt werden müssen.

Die Abel-Jacobi'sche Methode zur Auffindung von Additionstheoremen scheint die einzig naturgemässe zu sein. Die Allgemeinheit und Schwierigkeit der Abel'schen Untersuchungen hat es aber verhindert, dass in den gangbaren Lehrbüchern über elliptische Functionen diese Art der Herleitung der Additionstheoreme angewendet wird. Es dürfte daher keine vergebliche Arbeit sein, wenn in dem Folgenden der Versuch gemacht wird, die bekanntesten Additionstheoreme nach der Abel-Jacobi'schen Methode herzuleiten, und dadurch den Einblick in diese Methode zu erleichtern.

In der Abtheilung I werden die Additionstheoreme für Integrale von der Form $\int \frac{dx}{fx}$ entwickelt, in denen fx eine ganze Function von x ist. In der Abtheilung II werden die Additionstheoreme für die Kreis- und elliptischen Functionen abgeleitet.

I.

A.

Additionstheorem für das Integral $\int_{\alpha}^{x} \frac{dx}{a_0 x^2 - a_1 x + a_2}$.

§ 1.

Es sei die Gleichung:

$$(a_0 x^2 - a_1 x + a_2)\, y + b_0 x^2 - b_1 x + b_2 = 0 \quad (1)$$

gegeben. Jedem Werthe x_1 von x entspricht ein Werth von y. Demselben Werthe von y entspricht aber ausser x_1 noch ein zweiter Werth x_2 von x. Mithin gehört zu jedem Werthe x_1 von x ein bestimmter zweiter Werth x_2. Es sind also x_1 und x_2 Functionen von einander, und zwar so, dass, wenn $x_1 = f(x_2)$ ist, auch $x_2 = f(x_1)$ sein muss. Man nennt sie am besten involutorische Functionen von einander.

Die Abhängigkeit der x_1 und x_2 von einander kann ohne Vermittelung von y folgendermassen ausgedrückt werden. x_1 und x_2 sind die beiden Wurzeln der Gleichung (1) für dasselbe y. Setzen wir also: $x_1 + x_2 = s_1$ und $x_1 x_2 = s_2$, so erhalten wir:

$$s_1 = \frac{a_1 y + b_1}{a_0 y + b_0},\ s_2 = \frac{a_2 y + b_2}{a_0 y + b_0},\ \text{oder:}$$

$$(a_0 s_1 - a_1)\, y + b_0 s_1 - b_1 = 0,\ (a_0 s_2 - a_2)\, y + b_0 s_2 - b_2 = 0,$$

also nach Elimination von y:

$$\begin{vmatrix} a_0 s_1 - a_1, & b_0 s_1 - b_1 \\ a_0 s_2 - a_2, & b_0 s_2 - b_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ oder endlich: } (a_0 b_1).s_2 + (a_2 b_0) s_1 + (a_1 b_2) = 0 \quad (2)$$

als die gesuchte Gleichung zwischen x_1 und x_2.

§ 2.

Aus der Gleichung (1) können wir eine andere Form der Abhängigkeit der x_1 und x_2 von einander ableiten.

Differenziren wir nämlich die Gleichung (1), so erhalten wir:

$$(a_0 x^2 - a_1 x + a_2)\, dy + \left[(2 a_0 x - a_1)\, y + 2 b_0 x - b_1\right].\, dx = 0.$$

Da diese Gleichung bei ein und demselben Werthe von y für jeden der beiden Werthe von x gilt, so erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$(a_0 x_1^2 - a_1 x_1 + a_2)\, dy + \left[(2 a_0 x_1 - a_1)\, y + 2 b_0 x_1 - b_1\right] dx_1 = 0, \text{ und:}$$

$$(a_0 x_2^2 - a_1 x_2 + a_2)\, dy + \left[(2 a_0 x_2 - a_1)\, y + 2 b_0 x_2 - b_1\right] dx_2 = 0; \text{ oder:}$$

$$\frac{dy}{(2 a_0 x_1 - a_1)\, y + 2 b_0 x_1 - b_1} + \frac{dx_1}{a_0 x_1^2 - a_1 x_1 + a_2} = 0, \text{ und:}$$

$$\frac{dy}{(2 a_0 x_2 - a_1)\, y + 2 b_0 x_2 - b_1} + \frac{dx_2}{a_0 x_1^2 - a_1 x_1 + a_2} = 0.$$

Addiren wir diese beiden Gleichungen, und bedenken wir, dass:

$$\frac{1}{(2a_0x_1-a_1)y+2b_0x_1-b_1}+\frac{1}{(2a_0x_2-a_1)y+2b_0x_2-b_1}$$
$$=\frac{2\left[(a_0y+b_0)s_1-a_1y-b_1\right]}{\left[(2a_0x_1-a_1)y+2b_0x_1-b_1\right]\left[(2a_0x_2-a_1)y+2b_0x_2-b_1\right]}=o,$$

so finden wir, dass: $\frac{dx_1}{a_0x_1^2-a_1x_1+a_2}+\frac{dx_2}{a_0x_2^2-a_1x_2+a_2}=o.$ (3).

§ 3.

Die beiden Variabeln x_1 und x_2 hängen also einerseits durch die Gleichung (2) von einander ab, andrerseits durch die Gleichung (3). Also ist (2) eine algebraische Integralgleichung der Gleichung (3).

Integriren wir nun die Gleichung (3) direct, und lassen die Integrale von der unteren Grenze α ausgehen, so erhalten wir die Integralgleichung

$$\int_\alpha^{x_1}\frac{dx_1}{a_0x_1^2-a_1x+a_2}+\int_\alpha^{x_2}\frac{dx_2}{a_0x_2^2-a_1x_2+a_2}=C.$$

Zur Bestimmung von C setzen wir fest, dass $x_1=z$ für $x_2=\alpha$ werden soll. Alsdann erhalten wir: $C=\int_\alpha^z\frac{dz}{a_0z^2-a_1z+a_2}$.

Es ergiebt sich also folgendes Endresultat: Sind 3 Variable durch die transcendente Gleichung $\int_\alpha^{x_1}\frac{dx_1}{a_0x_1^2-a_1x+a_2}+\int_\alpha^{x_2}\frac{dx_2}{a_0x_2^2-a_1x_2+a_2}=\int_\alpha^z\frac{dz}{a_0z^2-a_1z+a_2}$ verbunden, so genügen sie auch der algebraischen Gleichung: $(a_0b_1)s_2+(a_2b_0)s_1+(a_1b_2)=o$, wo $s_1=x_1+x_2$, $s_2=x_1x_2$ ist, und die b so bestimmt werden müssen, das $x_1=z$ für $x_2=\alpha$ wird.

Die letzte Bedingung giebt die Gleichung: $(a_0b_1).\alpha z+(a_2b_0).(\alpha+z)+(a_1b_2)=o$. Die Elimination der b geschieht am einfachsten auf folgende Weise. Verbindet man die Gleichungen: $(a_0b_1).s_2+(a_2b_0).s_1+(a_1b_2)=o$, $(a_0b_1).\alpha z+(a_2b_0).(\alpha+z)+(a_1b_2)=o$ mit der Identität $(a_0b_1).a_2+(a_2b_0).a_1+(a_1b_2).a_0=o$, so erhalten wir zur Bestimmung von z die Gleichung: $\begin{vmatrix} s_2, s_1, 1\\ \alpha z, \alpha+z, 1\\ a_2, a_1, a_0\end{vmatrix}=o$, woraus sich ergiebt $z=\frac{(a_0\alpha-a_1)s_2+a_2s_1-a_2\alpha}{-a_0s_2+a_0\alpha.s_1-a_1\alpha+a_2}$. (4).

Wählen wir $\alpha=o$, so ist: $z=\frac{a_2s_1-a_1s_2}{a_2-a_0s_2}$.

§ 4.

Setzen wir: $\int_\alpha^{x_1}\frac{dx_1}{a_0x_1^2-a_1x+a_2}=u_1$ und $\int_\alpha^{x_2}\frac{dx_2}{a_0x_2^2-a_1x_2+a_2}=u_2$, so ist $\int_\alpha^z\frac{dz}{a_0z^2-a_1z+a_2}=u_1+u_2$. Setzen wir ferner die umgekehrte Function $x_1=\varphi(u_1)$, so ist: $x_2=\varphi(u_2)$ und $z=\varphi(u_1+u_2)$. Wir erhalten also das Additionstheorem:

$$\varphi(u_1+u_2)=\frac{(a_0\alpha-a_1).\varphi(u_1).\varphi(u_2)+a_2(\varphi[u_1]+\varphi[u_2])-a_2\alpha}{-a_0.\varphi(u_1).\varphi(u_2)+a_0\alpha(\varphi[u_1]+\varphi[u_2])-a_2\alpha+a_2},$$

und für $\alpha=o$: $\varphi(u_1+u_2)=\frac{a_2(\varphi u_1+\varphi u_2)-a_1.\varphi u_1.\varphi u_2}{a_2-a_0.\varphi u_1.\varphi u_2}$.

Beispiele.

1. Ist $a_0=o$, $a_2=o$, $a_1=-1$ und $\alpha=1$, so erhalten wir:
$$\varphi(u_1+u_2)=\varphi u_1.\varphi u_2,$$ das Additionstheorem für e^u.

2. Ist $a_0=1$, $a_1=o$, $a_2=1$, so erhalten wir für $\alpha=o$:
$$\varphi(u_1+u_2)=\frac{\varphi u_1+\varphi u_2}{1-\varphi u_1.\varphi u_2},$$ das Additionstheorem für tg u.

3. Ist $a_0=1$, $a_1=o$, $a_2=-1$, so erhalten wir für $\alpha=o$:
$$\varphi(u_1+u_2)=\frac{\varphi u_1+\varphi u_1}{1+\varphi u_1.\varphi u_2},$$ das Additionstheorem für $\varphi u=\frac{e^u-e^{-u}}{e^u+e^{-u}}$.

4. Ist $a_0=1$, $a_1=-2$, $a_2=1$, so erhalten wir für $\alpha=o$:
$$\varphi(u_1+u_2)=\frac{\varphi u_1+\varphi u_2+2\varphi u_1.\varphi u_2}{1-\varphi u_1.\varphi u_2},$$ das Additionstheorem für $\varphi u=\frac{u}{1-u}$.

5. Ist $a_0=1$, $a_1=-1$, $a_0=1$, so erhalten wir für $\alpha=o$:
$$\varphi(u_1+u_2)=\frac{\varphi u_1+\varphi u_2+\varphi u_1.\varphi u_2}{1-\varphi u_1.\varphi u_2},$$ wo φu die umgekehrte Function von $\int_0^x\frac{dx}{1+x+x^2}=u$
ist, also $$\varphi u=\frac{2\,\mathrm{tg}\frac{u\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3}-\mathrm{tg}\frac{u\sqrt{3}}{2}}$$

B.

Additionstheorem für $\int_\alpha^x\frac{dx}{a_0x^3-a_1x^2+a_2x-a_3}$

§ 5.

Nach der Methode der vorigen §§ behandeln wir jetzt die Gleichung:
$$(a_0x^3-a_1x^2+a_2x-a_3)y+b_0x^3-b_1x^2+b_2x-b_3=o. \quad (5)$$
Jedem Werthe x_1 von x entspricht ein Werth von y. Demselben Werthe von y entsprechen aber ausser x_1 noch zwei Werthe x_2 und x_3 von x. Es sind also x_1, x_2, x_3 so von einander abhängig, dass wenn eins von ihnen einen bestimmten Werth annimmt, auch die anderen beiden bestimmt sind. Sie bilden eine Involution 3. Ordnung.

Setzen wir $x_1+x_2+x_3=s_1$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=s_2$, $x_1x_2x_3=s_3$, so erhalten wir:
$$s_1=\frac{a_1y+b_1}{a_0y+b_0},\quad s_2=\frac{a_2y+b_2}{a_0y+b_0},\quad s_3=\frac{a_3y+b_3}{a_0y+b_0}.$$
Durch Elimination von y erhält man die beiden Gleichungen, durch welche x_1, x_3 und x_3 von einander abhängen, nämlich:
$$(a_0b_1).s_2+(a_2b_0).s_1+(a_1b_2)=o, \text{ und: } (a_0b_2).s_3+(a_3b_0).s_2+(a_2b_3)=o. \quad (6)$$

§ 6.

Differenziren wir die Gleichung (5), so erhalten wir:
$$(a_0x^3-a_1x^2+a_2x-a_3).dy+\left[(3a_0x^2-2a_1x+a_2)y+3b_0x^2-2b_1x+b_2\right].dx=o,$$ oder
$$\frac{dy}{(3a_0x^2-2a_1x+a_2)y+3b_0x^2-2b_1x+b_2}+\frac{dx}{a_0x^3-a_1x^2+a_2x-a_3}=o.$$

Diese Gleichung gilt für alle 3 Werthe von x, die demselben Werthe von y entsprechen. Wir haben also die 3 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy}{(3a_0x_1^2-2a_1x_1+a_2)y+3b_0x_1^2-2b_1x_1+b_2}+\frac{dx_1}{a_0x_1^3-a_1x_1^2+a_2x_1-a_3}=0.\\
\frac{dy}{(3a_0x_2^2-2a_1x_2+a_2)y+3b_0x_2^2-2b_1x_2+b_2}+\frac{dx_2}{a_0x_2^3-a_1x_2^2+a_2x_2-a_3}=0.\\
\frac{dy}{(3a_0x_3^2-2a_1x_3+a_2)y+3b_0x_3^2-2b_1x_3+b_2}+\frac{dx_3}{a_0x_3^3-a_1x_3^2+a_2x_3-a_3}=0.
\end{aligned}\right\}(7).$$

Addiren wir diese 3 Gleichungen, so können wir durch eine etwas langwierige Rechnung nachweisen, dass in der Summe der Coëfficient von dy verschwindet. Leichter erreicht man dieses durch folgenden algebraischen Satz, der häufig in der Analysis Anwendung findet.

§ 7.

Es sei $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_n)$, so ergiebt die Zerlegung in Partialbrüche:

$$\frac{1}{\varphi(x)}=\frac{1}{\varphi^1(x_1)}\cdot\frac{1}{x-x_1}+\frac{1}{\varphi^1(x_2)}\cdot\frac{1}{x-x_2}+\ldots.+\frac{1}{\varphi^1(x_n)}\cdot\frac{1}{x-x_n}.$$

Entwickeln wir beide Seiten nach fallenden Potenzen von x, so beginnt die linke Seite mit $\frac{1}{x^n}$, und wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^n}+\frac{A}{x^{n+1}}+\frac{B}{x^{n+2}}+\text{etc.}=&\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{\varphi^1(x_1)}+\frac{1}{\varphi^1(x_2)}+\ldots.+\frac{1}{\varphi^1(x_n)}\right\}\\
&+\frac{1}{x^2}\left\{\frac{x_1}{\varphi^1(x_1)}+\frac{x_2}{\varphi^1(x_2)}+\ldots.+\frac{x_n}{\varphi^1(x_n)}\right\}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\frac{1}{x^{n-1}}\left\{\frac{x_1^{n-2}}{\varphi^1(x_1)}+\frac{x_2^{n-2}}{\varphi^1(x_2)}+\ldots.+\frac{x_n^{n-2}}{\varphi^1(x_n)}\right\}\\
&+\frac{1}{x^n}\left\{\frac{x_1^{n-1}}{\varphi^1(x_1)}+\frac{x_2^{n-1}}{\varphi^1(x_2)}+\ldots.+\frac{x_n^{n-1}}{\varphi^1(x_n)}\right\}\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Durch Vergleichung beider Seiten finden wir folgenden Satz:

Ist $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots.(x-x_n)$, so ist

$$\frac{1}{\varphi^1(x_1)}+\frac{1}{\varphi^1(x_2)}+\ldots.+\frac{1}{\varphi^1(x_n)}=0,$$

$$\frac{x_1}{\varphi^1(x_1)}+\frac{x_2}{\varphi^1(x_2)}+\ldots.+\frac{x_n}{\varphi^1(x_n)}=0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{x_1^{n-2}}{\varphi^1(x_1)}+\frac{x_2^{n-2}}{\varphi^1(x_2)}+\ldots.+\frac{x_n^{n-2}}{\varphi^1(x_n)}+0,$$

Ist insbesondere $\varphi(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$, so haben wir die beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{\varphi^1(x_1)}+\frac{1}{\varphi^1(x_2)}+\frac{1}{\varphi^1(x_3)}=0,\quad\text{und}\quad\frac{x_1}{\varphi^1(x_1)}+\frac{x_2}{\varphi^1(x_2)}+\frac{x_3}{\varphi^1(x_3)}=0,$$

die man auch unmittelbar verificiren kann.

§ 8.

Kehren wir nun zur Differenziation der Gleichung (5) zurück.

Wir setzen: $(a_0x^3-a_1x^2+a_2x-a_3).y+b_0x^3-b_1x^2+b_2x-b_3=\varphi(x)=o$, so erhalten wir: $(a_0x^3-a_1x^2+a_2x-a_3).dy+\varphi^1(x).dx=o$. Da diese Gleichung für alle 3 zu demselben y gehörenden Werthe von x gilt, so haben wir die 3 Gleichungen.

$$\frac{dy}{\varphi^1(x_1)}+\frac{dx_1}{a_0x_1^3-a_1x_1^2+a_2x_1-a_3}=o,$$
$$\frac{dy}{\varphi^1(x_2)}+\frac{dx_2}{a_0x_2^3-a_1x_2^2+a_2x_2-a_3}=o,$$
$$\frac{dy}{\varphi^1(x_3)}+\frac{dx_3}{a_0x_3^3-a_1x_3^2+a_2x_3-a_3}=o.$$

Je nachdem wir diese 3 Gleichungen unmittelbar addiren, oder erst nachdem wir sie resp. mit x_1, x_2, x_3 multiplicirt haben, erhalten wir mit Hülfe unseres obigen Satzes die beiden Differenzialgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{a_0x_1^3-a_1x_1^2+a_2x_1-a_3}+\frac{dx_2}{a_0x_2^3-a_1x_2^2+a_2x_2-a_3}+\frac{dx_3}{a_0x_3^3-a_1x_3^2+a_2x_3-a_3}&=o\\ \frac{x_1.dx_1}{a_0x_1^3-a_1x_1^2+a_2x_1-a_3}+\frac{x_2.dx_2}{a_0x_2^3-a_1x_2^2+a_2x_2-a_3}+\frac{x_3.dx_3}{a_0x_3^3-a_1x_3^2+a_2x_3-a_3}&=o\end{aligned}\right\}(8)$$

§ 9.

Wir haben jetzt gefunden, dass die 3 Grössen x_1, x_2, x_3, welche durch die Gleichungen (6) verbunden sind, auch den Gleichungen (8) genügen. Folglich sind die Gleichungen (6) die algebraischen Integralgleichungen der Differenzialgleichungen (8).

Integriren wir nun die Gleichungen (8) unmittelbar und setzen der Abkürzung wegen $a_0x^3-a_1x^2+a_2x-a_3=fx$, so erhalten wir, wenn wir den Integralen die untere Grenze α geben:

$$\int_\alpha^{x_1}\frac{dx_1}{fx_1}+\int_\alpha^{x_2}\frac{dx_2}{fx_2}+\int_\alpha^{x_3}\frac{dx_3}{fx_3}=C_1,\ \text{und}\int_\alpha^{x_1}\frac{x_1.dx_1}{fx_1}+\int_\alpha^{x_2}\frac{x_2.dx_2}{fx_2}+\int_\alpha^{x_3}\frac{x_3.dx_3}{fx_3}=C_2.$$

Setzen wir nun fest, dass für $x_3=\alpha$ $x_1=z_1$ und $z_2=z_2$ werden soll, so bestimmen wir dadurch C_1 und C_2, und wir erhalten:

$$\left.\begin{aligned}\int_\alpha^{x_1}\frac{dx_1}{fx_1}+\int_\alpha^{x_2}\frac{dx_2}{fx_2}+\int_\alpha^{x_3}\frac{dx_3}{fx_3}&=\int_\alpha^{z_1}\frac{dz_1}{fz_1}+\int_\alpha^{z_2}\frac{dz_2}{fz_2},\\ \int_\alpha^{x_1}\frac{x_1.dx_1}{fx_1}+\int_\alpha^{x_2}\frac{x_2.dx_2}{fx_2}+\int_\alpha^{x_3}\frac{x_3.dx_3}{fx_3}&=\int_\alpha^{z_1}\frac{z_1.dz_1}{fz_1}+\int_\alpha^{z_2}\frac{z_2.dz_2}{fz_2}.\end{aligned}\right\}(9)$$

§ 10.

Nach dem Vorhergehenden können wir die Summe dreier Integrale von der Form $\int_\alpha^x\frac{dx}{fx}$ und $\int_\alpha^x\frac{x.dx}{fx}$ durch die Summe zweier Integrale von derselben Form ausdrücken. Wir werden jetzt die algebraischen Relationen entwickeln, durch welche x_1, x_2, x_3 und z_1, z_2 mit einander verbunden sind.

Wir hatten für x_1, x_2, x_3 die Relationen (6):
$(a_0 b_1) s_2 + (a_2 b_0) s_1 + (a_1 b_2) = o$ und $(a_0 b_2) s_3 + (a_3 b_0) s_2 + (a_2 b_3) = o$; wo $s_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $s_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$, $s_3 = x_1 x_2 x_3$.

Setzen wir der Symmetrie wegen $1 = s_0$, so erhalten diese Gleichungen die Form:

$$(a_1 b_2) s_0 + (a_2 b_0) s_1 + (a_0 b_1) s_2 = o \quad \text{und} \quad (a_2 b_3) s_0 + (a_3 b_0) s_2 + (a_0 b_2) s_3 = o. \quad (10)$$

Wir setzen nun, wie oben, fest, dass für $x_3 = \alpha$ $x_1 = z_1$ und $x_2 = z_2$ werden soll, ferner zur Abkürzung: $z_1 + z_2 = p_1$ und $z_1 z_2 = p_2$. Alsdann erhalten wir zur Bestimmung von p_1 und p_2 die Gleichungen: $(a_1 b_2) s_0 + (a_2 b_0).(\alpha + p_1) + (a_0 b_1).(\alpha p_1 + p_2) = o$, und $(a_2 b_3).s_0 + (a_3 b_0).(\alpha p_1 + p_2) + (a_0 b_2).\alpha p_2 = o$.

Die beiden Gleichungen: $(a_1 b_2) s_0 + (a_2 b_0).s_1 + (a_0 b_1) s_2 = o$, $(a_1 b_2).s_0 + (a_2 b_0)(\alpha + p_1) + (a_0 b_1).(\alpha p_1 + p_2) = o$ geben in Verbindung mit der Identität: $(a_1 b_2) a_0 + (a_2 b_0) a_1 + (a_0 b_1).a_2 = o$ die Endgleichung:

$$\begin{vmatrix} s_0, s_1, s_2 \\ s_0, \alpha + p_1, \alpha p_1 + p_2 \\ a_0, a_1, a_2 \end{vmatrix} = o$$

oder entwickelt $p_1 \left[(a_2 s_0) + \alpha (a_0 s_1)\right] + p_2 (a_0 s_1) + s_0 (a_1 s_2) + \alpha (a_2 s_0) = o. \quad (11)$

Ebenso geben die Gleichungen: $(a_2 b_3).s_0 + (a_3 b_0) s_2 + (a_0 b_2) s_2 = o$
$(a_2 b_3).s_0 + (a_3 b_0).(\alpha p_1 + p_2) + (a_0 b_2) \alpha p_2 = o$
in Verbindung mit der Identität $(a_2 b_3).a_0 + (a_3 b_0).a_2 + (a_0 b_2).a_3 = o$
die Endgleichung: $\alpha p_1.(a_3 s_0) + p_2 \left[(a_3 s_0) + \alpha (a_0 s_2)\right] + s_0.(a_2 s_3) = o. \quad (12)$

Ist insbesondere $\alpha = o$, so ergeben die Gleichungen (11) und (12): $p_1.(a_2 s_0) + p_2 (a_0 s_1) + s_0 (a_1 s_2) = o$ und $p_2 (a_3 s_0) - s_0.(a_3 s_2) = o$, oder nach einer leichten Reduction: $(a_3 s_0).p_1 - s_0 (a_3 s_1) = o$ und $(a_3 s_0).p_2 - s_0 (a_3 s_2) = o. \quad (13)$

§ 11.

Beispiel 1. Es sei $fx = 1 + x^3$ und $\alpha = o$, so ist: $a_0 = 1$, $a_1 = a_2 = o$, $a_3 = -1$. Wir erhalten nach dem Vorstehenden folgenden Satz:

Bestehen zu gleicher Zeit folgende beiden Gleichungen:

$$\int_0^{x_1} \frac{dx_1}{1 + x_1^3} + \int_0^{x_2} \frac{dx_2}{1 + x_2^3} + \int_0^{x_3} \frac{dx_3}{1 + x_3^3} = \int_0^{z_1} \frac{dz_1}{1 + z_1^3} + \int_0^{z_2} \frac{dz_2}{1 + z_2^3},$$

$$\int_0^{x_1} \frac{x_1 . dx_1}{1 + x_1^3} + \int_0^{x_2} \frac{x_2 . dx_2}{1 + x_2^3} + \int_0^{x_3} \frac{x_3 . dx_3}{1 + x_3^3} = \int_0^{z_1} \frac{z_1 . dz_1}{1 + z_1^3} + \int_0^{z_2} \frac{z_2 . dz_2}{1 + z_2^3},$$

so lassen sich z_1 und z_2 algebraisch durch x_1, x_2, x_3 ausdrücken. Die Gleichungen (13) ergeben nämlich: $p_1 = \frac{s_1}{1 + s_3}$ und $p_2 = \frac{s_3}{1 + s_3}$, d. h. es ist: $z_1 + z_2 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{1 + x_1 x_2 x_3}$ und $z_1 z_2 = \frac{x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3}{1 + x_1 x_2 x_3}$. Es sind also z_1 und z_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung: $(1 + s_3) z^2 - s_1 z + s_2 = o$.

Hier dürfte der geeignete Ort sein, zu zeigen, auf welche Weise die Umkehrung der obigen Functionen statt haben muss. Nach Jacobi'schen Principien (cf. den Aufsatz „*De functionibus quadrupliciter*“ *etc.*) ist folgendermassen zu verfahren.

Wir haben oben die Summe von je 3 Integralen von der Form $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$ und $\int_0^1 \frac{x.dx}{1+x^3}$ auf die Summe von je 2 Integralen derselben Form reducirt. Daraus folgt, dass die Summe von beliebig vielen Integralen dieser Art auf die Summe von 2 Integralen zurückgeführt werden kann.

Wir führen dies für die Summe von 4 Integralen aus.

Es ist nach dem Obigen:

$$\int_0^{x_1}\frac{dx_1}{1+x_1^3}+\int_0^{x_2}\frac{dx_2}{1+x_2^3}+\int_0^{x_3}\frac{dx_3}{1+x_3^3}+\int_0^{x_4}\frac{dx_4}{1+x_4^3}=$$

$$=\int_0^{z_1}\frac{dz_1}{1+z_1^3}+\int_0^{z_2}\frac{dz_2}{1+z_2^3}+\int_0^{x_4}\frac{dx_4}{1+x_4^3}=\int_0^{t_1}\frac{dt_1}{1+t_1^3}+\int_0^{t_2}\frac{dt_2}{1+t_2^3}, \text{ und}$$

$$\int_0^{x_1}\frac{x_1.dx_1}{1+x_1^3}+\int_0^{x_2}\frac{x_2.dx_2}{1+x_2^3}+\int_0^{x_3}\frac{x_3.dx_3}{1+x_3^3}+\int_0^{x_4}\frac{x_4 dx_4}{1+x_4^3}=$$

$$=\int_0^{z_1}\frac{z_1.dz_1}{1+z_1^3}+\int_0^{z_2}\frac{z_2.dz_2}{1+z_2^3}+\int_0^{x_4}\frac{x_4.dx_4}{1+x_4^3}=\int_0^{t_1}\frac{t_1.dt_1}{1+t_1^3}+\int_0^{t_2}\frac{t_2.dt_2}{1+t_2^3},$$

$$\text{wo } z_1+z_2=\frac{x_1+x_2+x_3}{1+x_1x_2x_3},\ z_1z_2=\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{1+x_1x_2x_3}, \text{ und}$$

$$t_1+t_2=\frac{z_1+z_2+x_4}{1+z_1z_2x_4},\quad t_1t_2=\frac{z_1z_2+z_1x_4+z_2x_4}{1+z_1z_2x_4}.$$

Daraus ergiebt sich:

$$t_1+t_2=\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_1x_2.x_3x_4}{1+(x_1+x_2)x_3x_4+(x_3+x_4)x_1x_2} \text{ und } t_1t_2=\frac{(x_1+x_2)(x_3+x_4)+x_1x_2+x_3x_4}{1+(x_1+x_2)x_3x_4+(x_3+x_4)x_1x_2}.$$

Die Umkehrung geschieht nun folgendermassen:

Man setzt: $\int_0^{x_1}\frac{dx_1}{1+x_1^3}+\int_0^{x_2}\frac{dx_2}{1+x_2^3}=u_1$, und $\int_0^{x_1}\frac{x_1.dx_1}{1+x_1^3}+\int_0^{x_2}\frac{x_2.dx_2}{1+x_2^3}=v_1$, so sind x_1 und x_2 als Functionen von u_1 und v_1 anzusehen, ebenso auch x_1+x_2 und x_1x_2. Wir setzen daher $x_1+x_2=\varphi_1(u_1,v_1)$ und $x_1x_2=\varphi_2(u_1,v_1)$.

Ist nun $\int_0^{x_3}\frac{dx_3}{1+x_3^3}+\int_0^{x_4}\frac{dx_4}{1+x_4^3}=u_2$, und $\int_0^{x_3}\frac{x_3.dx_3}{1+x_3^3}+\int_0^{x_4}\frac{x_4.dx_4}{1+x_4^3}=v_2$, so ist ebenso, wie oben: $x_3+x_4=\varphi_1(u_2,v_2)$ und $x_3x_4=\varphi_2(u_2,v_2)$.

Daraus ergiebt sich:

$$\int_0^{t_1}\frac{dt_1}{1+t_1^3}+\int_0^{t_2}\frac{dt_2}{1+t_2^3}=u_1+u_2. \text{ und } \int_0^{t_1}\frac{t_1.dt_1}{1+t_1^3}+\int_0^{t_2}\frac{t_2.dt_2}{1+t_2^3}=v_1+v_2.$$

Also ist: $t_1+t_2=\varphi_1(u_1+u_2,v_1+v_2)$ und $t_1t_2=\varphi_2(u_1+u_2,v_1+v_2)$.

Wir erhalten daher folgendes Additionstheorem:

$$\varphi_1(u_1+u_2,v_1+v_2)=\frac{\varphi_1(u_1,v_1)+\varphi_1(u_2,v_2)+\varphi_2(u_1,v_1).\varphi_2(u_2.v_2)}{1+\varphi_1(u_1,v_1).\varphi_2(u_2,v_2)+\varphi_1(u_2,v_2).\varphi_2(u_1,v_1)}$$

$$\varphi_2(u_1+u_2,v_1+v_2)=\frac{\varphi_1(u_1,v_1).\varphi_1(u_2,v_2)+\varphi_2(u_1,v_1)+\varphi_2(u_2,v_2)}{1+\varphi_1(u_1,v_1).\varphi_2(u_2,v_2)+\varphi_1(u_2,v_2).\varphi_2(u_1,v_1)}.$$

§ 12.

Beispiel 2. Es sei wieder $\alpha = o$ und $a_0 = o$, $a_1 = -1$, $a_2 = o$, $a_3 = -1$, so erhalten wir die Integralgleichungen:

$$\int_0^{x_1} \frac{dx_1}{1+x_1^2} + \int_0^{x_2} \frac{dx_2}{1+x_2^2} + \int_0^{x_3} \frac{dx_3}{1+x_3^2} = \int_0^{z_1} \frac{dz_1}{1+z_1^2} + \int_0^{z_2} \frac{dz_2}{1+z_2^2}$$

$$\int_0^{x_1} \frac{x_1 . dx_1}{1+x_1^2} + \int_0^{x_2} \frac{x_2 . dx_2}{1+x_2^2} + \int_0^{x_3} \frac{x_3 . dx_3}{1+x_3^2} = \int_0^{z_1} \frac{z_1 . dz_1}{1+z_1^2} + \int_0^{z_2} \frac{z_2 . dz_2}{1+z_2^2}.$$

Wir finden hier zwischen x_1, x_2, x_3, z_1, z_2 folgende algebraische Relationen:

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + x_3 - x_1 x_2 x_3 \text{ und } z_1 z_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3.$$

Nehmen wir ebenso, wie im vorigen § 4 Integrale zusammen, so erhalten wir:

$$t_1 + t_2 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_1 x_2 (x_3 + x_4) - x_3 x_4 . (x_1 + x_2), \text{ und}$$
$$t_1 t_2 = x_1 x_2 + x_3 x_4 + (x_1 + x_2)(x_3 + x_4) - x_1 x_2 . x_3 x_4.$$

Setzen wir wieder $\int_0^{x_1} \frac{dx_1}{1+x_1^2} + \int_0^{x_2} \frac{dx_2}{1+x_2^2} = u_1$, und $\int_0^{x_1} \frac{x_1 . dx_1}{1+x_1^2} + \int_0^{x_2} \frac{x_2 . dx_2}{1+x_2^2} = v_1$, und dann $x_1 + x_2 = \varphi_1(u_1, v_1)$ und $x_1 x_2 = \varphi_2(u_1, v_1)$, so finden wir das Additionstheorem:

$$\varphi_1(u_1 + u_2, v_1 + v_2) = \varphi_1(u_1, v_1) + \varphi_1(u_2, v_2) - \varphi_1(u_1, v_1) . \varphi_2(u_2, v_2) - \varphi_1(u_2, v_2) . \varphi_2(u_1, v_1)$$
$$\varphi_2(u_1 + u_2, v_1 + v_2) = \varphi_2(u_1, v_1) + \varphi_2(u_2, v_2) + \varphi_1(u_1, v_1) . \varphi_1(u_2, v_2) - \varphi_2(u_1, v_1) . \varphi_2(u_2, v_2).$$

Dieses kann leicht verificirt werden; denn in diesem Beispiele ist:

$$\varphi_1(u, v) = e^u . \sin v \text{ und } \varphi_2(u, v) = 1 - e^u . \cos v.$$

C.

Additionstheorem für $\int_\alpha^x \frac{dx}{a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n}$.

§ 13.

Es ist leicht, das Vorhergehende auf den allgemeinen Fall auszudehnen. Es sei $fx = a_0 x^n - a_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n a_n$ und $\varphi x = b_0 x^n - b_1 x^{n-1} + \ldots + (-1)^n b_n$, ferner: $fx . y + \varphi x = o$. Alsdann gehören zu jedem bestimmten Werthe von y je n Werthe $x_1, x_2, \ldots x_n$ von x. Lassen wir y variiren, so werden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ involutorische Functionen von einander, die durch die Gleichungen:

$$s_1 = \frac{a_1 y + b_1}{a_0 y + b_0}, \quad s_2 = \frac{a_2 y + b_2}{a_0 y + b_0}, \ldots, \quad s_n = \frac{a_n y + b_n}{a_0 y + b_0}$$

mit einander verbunden sind, wo $s_1 = \Sigma y_1, s_2 = \Sigma y_1 y_2, \ldots, s_n = \Sigma y_1 y_2 \ldots y_n$.

Verbinden wir die letzte Gleichung mit jeder der vorhergehenden, so erhalten wir die folgenden $n-1$ Gleichungen, durch welche die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_n$ von einander abhängen:

$$\left.\begin{array}{l} (a_0 b_n) s_1 - (a_0 b_1) s_n - (a_1 b_n) = o, \; (a_0 b_n) s_2 - (a_0 b_2) s_n - (a_2 b_n) = o, \ldots\ldots \\ \ldots (a_0 b_n) s_{n-1} - (a_0 b_{n-1}) s_n - (a_{n-1} b_n) = o. \end{array}\right\} (14)$$

Differenziren wir die Gleichung $fx . y + \varphi x = o$, so erhalten wir auf dieselbe Weise, wie in den vorigen §§, die $n-1$ Differenzialgleichungen.

$$\sum_1^n \frac{dx}{fx} = o, \quad \sum_1^n \frac{x . dx}{fx} = o, \ldots, \quad \sum_1^n \frac{x^{n-2} . dx}{fx} = o. \quad (15)$$

Die Gleichungen (14) sind also die algebraischen Integralgleichungen der Differenzialgleichungen (15).

Integriren wir nun die Gleichungen (15), lassen die Integrale von der unteren Grenze α anfangen, und setzen fest, dass $x_1 = z_1$, $x_2 = z_2, \ldots x_{n-1} = z_{n-1}$ für $x_n = \alpha$ werden soll, so erhalten wir $n-1$ Gleichungen, durch welche die Summe von je n Integralen auf eine Summe von $n-1$ Integralen derselben Art reducirt wird. Die algebraischen Relationen zwischen den oberen Grenzen der Integrale ergeben sich aus den Gleichungen (14).

Zur Lösung des Umkehrungsproblems muss man ganz so, wie oben, $n-1$ Functionen von $n-1$ Variabeln einführen. Die wirkliche Ausführung kann hier weggelassen werden, da sie keinerlei Schwierigkeiten bietet.

II.

Additionsformel für $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4}}$.

§ 14.

Wir dehnen die vorhergehenden Untersuchungen auf Gleichungen aus, die sowohl in x, als in y vom 2. Grade sind.

Es sei also die Gleichung:

$$F(x,y) = (a_0x^2 + 2a_1x + a_2)y^2 + 2(b_0x^2 + 2b_1x + b_2)y + c_0x^2 + 2c_1x + c_2 = 0 \quad (16)$$

gegeben. Setzen wir:

$$a_0x^2 + 2a_1x + a_2 = f_1(x), b_0x^2 + 2b_1x + b_2 = f_2(x), c_0x^2 + 2c_1x + c_2 = f_3(x),$$

ferner: $a_0y^2 + 2b_0y + c_0 = \varphi_1(y), a_1y^2 + 2b_1y + c_1 = \varphi_2(y), a_0y^2 + 2b_2y + c_2 = \varphi_3(y)$, so erhält die Gleichung (16) folgende Formen:

$$F(x_1y) \equiv f_1(x).y^2 + 2f_2(x).y + f_3(x) \equiv \varphi_1(y).x^2 + 2\varphi_2(y).x + \varphi_3(y) = 0. \quad (17)$$

Geben wir in dieser Gleichung x einen bestimmten Werth x_1, so entsprechen diesem 2 Werthe von y. Heben wir einen dieser 2 Werthe von y heraus, so entspricht diesem ausser dem Werthe x_1 von x noch ein zweiter Werth x_2. Es sind also x_1 und x_2 Functionen von einander. Aus der Gleichung (17) folgt: $x_1 + x_2 = -\frac{2\varphi_2(y)}{\varphi_1(y)}$ und: $x_1x_2 = \frac{\varphi_3(y)}{\varphi_1(y)}$ (18).
Eliminiren wir aus diesen Gleichungen y, so erhalten wir die algebraische Relation, durch welche x_1 und x_2 mit einander verbunden sind.

Wir können aber auch eine transcendente Relation zwischen x_1 und x_2 folgendermaassen ableiten. Differenziren wir die Gleichung (17), so erhalten wir:

$$\left[f_1(x).y + f_2(x)\right].dy + \left[\varphi_1(y)x + \varphi_2(y)\right].dx = 0, \text{ oder } \frac{dy}{\varphi_1(y).x + \varphi_2(y)} + \frac{dx}{f_1(x).y + f_2(x)} = 0.$$

Da diese Gleichung sowohl für den Werth x_1, als für den Werth x_2 von x gültig ist, so erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$\frac{dy}{\varphi_1(y).x_1 + \varphi_2(y)} + \frac{dx_1}{f_1(x_1).y + f_2(x_1)} = 0, \text{ und } \frac{dy}{\varphi_1(y).x_2 + \varphi_2(y)} + \frac{dx_2}{f_1(x_2).y + f_2(x_2)} = 0.$$

Addiren wir diese beiden Gleichungen, und bedenken, dass:

$$\frac{1}{\varphi_1(y).x_1+\varphi_2(y)}+\frac{1}{\varphi_1(y).x_2+\varphi_2(y)}=\frac{\varphi_1(y).(x_1+x_2)+2\varphi_2(.y)}{\left[\varphi_1(y).x_1+\varphi_2(y)\right]\left[\varphi_1(y).x_2+\varphi_1(y)\right]}=o$$

nach (18), dass ferner nach der Gleichung (17): $f_1(x).y+f_2(x)=\sqrt{f_2{}^2(x)-f_1(x).f_3(x)}_1$ so erhalten wir die Differentialgleichung: $\frac{dx_1}{\sqrt{f_2{}^2(x_1)-f_1(x_1).f_3(x_1)}}+\frac{dx_2}{\sqrt{f_2{}^2(x_2)-f_1(x_2).f_3(x_2)}}=o.$

$f_2{}^2(x)-f_1(x).f_3(x)$ ist eine Function 4. Grades. Wir setzen sie $=F(x)$, und wir erhalten die Differenzialgleichung: $\frac{dx_1}{\sqrt{F(x_1)}}+\frac{dx_2}{\sqrt{F(x_2)}}=o.$ (19)

Diese Gleichung besitzt also das Eliminationsresultat der Gleichungen (18) als algebraische Integralgleichung.

Integriren wir die Gleichung (19) direct, lassen die Integrale von $x=\alpha$ anfangen, und bestimmen, dass $x_2=z$ für $x_1=\alpha$ werden soll, so erhalten wir die Integralgleichung:

$$\int_\alpha^{x_1}\frac{dx_1}{\sqrt{F(x_1)}}+\int_\alpha^{x_2}\frac{dx_2}{\sqrt{F(x_2)}}=\int_\alpha^z\frac{dz}{\sqrt{F(z)}}. \quad (20)$$

Im Ganzen haben wir also folgendes Resultat:

Ist $F(x)=A_0x^2+A_1x^3+A_2x^2+A_3x-A_4$, und sind die Grössen x_1, x_2 und z durch die transcendente Relation (20) verbunden, so kann man diese folgendermaassen durch eine algebraische Relation ersetzen.

Man wähle 2 unbestimmte Functionen 2. Grades $f_1(x)$ und $f_2(x)$, und setze $f_1(x).y+f_2(x)=\sqrt{F(x)}$ (21). Die Constanten, welche in $f_1(x)$ und $f_2(x)$ vorkommen, müssen so gewählt werden, dass die Gleichung (21), wenn sie rational gemacht wird, auch in x bloss vom 2 Grade wird, und eine Constante C disponibel bleibt. Alsdann folgen aus der Gleichung (21) die beiden: $f_1(x_1).y+f_2(x_1)=\sqrt{F(x_1)}$ und $f_1(x_2).y+f_2(x_2)=\sqrt{F(x_2)}$.

Eliminirt man aus diesen Gleichungen y, so erhält man die algebraische Relation, durch welche x_1 und x_2 verbunden sind, nämlich:

$$f_1(x_2).f_2(x_1)-f_1(x_1).f_2(x_2)=f_1(x_2).\sqrt{F(x_1)}-f_1(x_1)\sqrt{F(x_2)}. \quad (22)$$

Soll nun $x_2=z$ für $x_1=\alpha$ werden, so erhalten wir aus dieser Gleichung eine neue, durch welche z und C mit einander verbunden sind. Eliminirt man aus dieser und der Gleichung (22) C, so erhält man die gesuchte algebraische Relation zwischen x_1, x_2 und z und somit das Additionstheorem.

Die Bestimmung der Constanten und die Auflösung der vorkommenden Gleichungen, bieten manche Schwierigkeiten. Die folgenden Beispiele werden zeigen, wie in einzelnen Fällen zu verfahren ist.

§ 15.

Beispiel 1. Es sei $F(x)=1-x^2$ und $\alpha=o$. Die Integralgleichung (20) wird dann folgende: $\int_0^{x_1}\frac{dx_1}{\sqrt{1-x_1{}^2}}+\int_0^{x_2}\frac{dx_2}{\sqrt{1-x_2{}^2}}=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}.$

Wir wählen nun $f_1(x)=b$ und $f_2(x)=Cx$. Die Gleichung (22) giebt dann folgende: $C(x_1-x_2)=\sqrt{1-x_1{}^2}-\sqrt{1-x_2{}^2}.$

Für $x_1 = o$ soll $x_2 = z$ werden, also erhalten wir: $-Cz = 1 - \sqrt{1-z^2}$, und daher: $\frac{-1+\sqrt{1-z^2}}{z} = \frac{\sqrt{1-x_1^2} - \sqrt{1-x_2^2}}{x_1 - x_2}$ (23).

Diese Gleichung kann auf eine andere Form gebracht werden. Multiplicirt man nämlich auf der linken Seite Zähler und Nenner mit $1 + \sqrt{1-z^2}$ und auf der rechten Seite mit $\sqrt{1-x_1^2} + \sqrt{1-x_2^2}$, so erhält man:

$$\frac{z}{1+\sqrt{1-z^2}} = \frac{x_1 + x_2}{\sqrt{1-x_1^2} + \sqrt{1-x_2^2}}, \text{ oder: } \frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z} = \frac{\sqrt{1-x_1^2} + \sqrt{1-x_2^2}}{x_1 + x_2} \quad (24).$$

Subtrahiren wir (23) von (24), so erhalten wir:

$$\frac{2}{z} = \frac{\sqrt{1-x_1^2} + \sqrt{1-x_2^2}}{x_1 + x_2} - \frac{\sqrt{1-x_1^2} - \sqrt{1-x_2^2}}{x_1 - x_2} = \frac{2x_1\sqrt{1-x_2^2} - 2x_2\sqrt{1-x_1^2}}{x_1^2 - x_2^2},$$

also: $z = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1\sqrt{1-x_2^2} - x_2\sqrt{1-x_1^2}}$. Multipliciren wir hier Zähler und Nenner mit $x_1\sqrt{1-x_2^2} + x_2\sqrt{1-x_1^2}$, so erhalten wir: $z = x_1\sqrt{1-x_2^2} + x_2\sqrt{1-x_1^2}$, (25), das bekannte Additionstheorem für $\sin(u+v)$.

Beispiel 2. Bleibt Alles wie im vorigen Beispiele, nur dass wir $\alpha = 1$ annehmen d. h. dass wir die Integrale von der unteren Grenze 1 anfangen lassen, so haben wir ebenso wie oben: $C(x_1 - x_2) = \sqrt{1-x_1^2} - \sqrt{1-x_2^2}$.

Soll nun $x_1 = z$ für $x_2 = 1$ werden, so erhalten wir:

$$C(z-1) = \sqrt{1-z^2}, \text{ oder } C = \sqrt{\frac{1+z}{1-z}}. \text{ Mithin ist: } \frac{1+z}{1-z} = \frac{\left[\sqrt{1-x_1^2} - \sqrt{1-x_2^2}\right]^2}{(x_1 - x_2)^2}.$$

Daraus ergiebt sich:

$$z = \frac{\left[\sqrt{1-x_1^2} - \sqrt{1-x_2^2}\right]^2 - (x_1 - x_2)^2}{\left[\sqrt{1-x_1^2} - \sqrt{1-x_2^2}\right]^2 + (x_1 - x_2)^2} = \frac{1 - x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_2 - \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}{1 - x_1 x_2 - \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}}.$$

Multipliciren wir Zähler und Nenner mit $1 - x_1 x_2 + \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}^1$, so erhalten wir endlich: $z = x_1 x_2 - \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}$ (26), die bekannte Additionsformel für $\cos(u+v)$.

§ 16.

Beispiel. Es sei jetzt $F(x) = (1-x^2)(1-k^2x^2) = 1 - (1+k^2)x^2 + k^2x^4$. Wir wählen $f_1(x) = ax + b$ und $f_2(x) = kx^2 + C$. Die Gleichung (21) wird dann zu folgender:

$$(ax+b)y + kx^2 + C = \sqrt{1-(1+k^2)x^2 + k^2x^4}.$$

Wird diese Gleichung rational gemacht, so erhalten wir:

$$(ax+b)^2y^2 + 2(ax+b)(kx^2+C)y + (1+2Ck+k^2)x^2 + C^2 - 1 + o. \quad (27)$$

Damit diese Gleichung auch in x vom 2. Grade werde, bestimmen wir, dass $1 + 2Ck + k^2 = a^2$ und $1 - C^2 = b^2$ werden soll. Dann lässt sich die Gleichung (27) durch $ax + b$ dividiren und wir erhalten die Gleichung:

$(ax+b)y^2 + 2(kx^2+C)y + ax - b = o$, oder auch $2ky \cdot x^2 + a(y^2+1) \cdot x + by^2 + 2Cy - b = o$.

Sind x_1 und x_2 die beiden Werthe von x, welche demselben y entsprechen, und setzen wir: $x_1 + x_2 = s$, $x_1 x_2 = p$, so erhalten wir: $s = \frac{-a(y^2+1)}{2ky}$ und $p = \frac{b(y^2-1) + 2Cy}{2ky}$.

Um y zu eliminiren, bringen wir diese beiden Gleichungen auf folgende Formen:

$$y+\frac{1}{y}=-\frac{2ks}{a} \text{ und } y-\frac{1}{y}=\frac{2(kp-C)}{b}.$$

Daraus folgt: $y=\frac{-ks}{a}+\frac{kp-C}{b}$ und $\frac{1}{y}=\frac{-ks}{a}-\frac{kp-C}{b}$; woraus durch Multiplication: $\frac{k^2s^2}{a^2}-\frac{(kp-C)^2}{b^2}=1.$ (28)

Diese Gleichung ist also die algebraische Integralgleichung der Differenzialgleichung:

$$\frac{dx_1}{\sqrt{F(x_1)}}+\frac{dx_2}{\sqrt{F(x_2)}}=o.$$

Die letztere Gleichung giebt die transcendente Integralgleichung:

$\int_o^{x_1}\frac{dx_1}{\sqrt{F(x_1)}}+\int_o^{x_2}\frac{dx_2}{\sqrt{F(x_2)}}=\int_o^{z}\frac{dz}{\sqrt{F(z)}}$, wenn wir festsetzen, dass die Integrale von o anfangen, und dass für $x_1=o$ $x_2=z$ werden soll.

Um nun die entsprechende algebraische Gleichung zwischen x_1, x_2 und z zu finden, müssen wir in der Gleichung (28) $x_1=o$ und $x_2=z$ setzen. Wir erhalten dann: $s=z$ und $p=o$, und daher: $\frac{k^2z^2}{a^2}-\frac{C^2}{b^2}=1$, oder $\frac{b^2k^2z^2}{a^2}=b^2+C^2=1$, da wir $b^2=1-C^2$ angenommen haben. Diese Gleichung dient uns zur Bestimmung von C. Wir haben nämlich: $b^2k^2z^2=a^2$, oder: $(1-C^2)k^2z^2=1+2Ck+k^2.$, oder $C^2.k^2z^2+2k.C=k^2z^2-1-k^2$. Daraus ergiebt sich: $C=\frac{-1+\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}{kz^2}=\frac{\sqrt{F(z)}-1}{kz^2}.$ (29)

Diesen Werth von C müssen wir in die Gleichung (28) einsetzen. Zu diesem Zwecke bringen wir diese Gleichung auf die Form:

$\frac{b^2k^2s^2}{a^2}-k^2p^2+2Ckp-C^2=b^2$, oder $\frac{b^2k^2s^2}{a^2}-k^2p^2+2Ckp=1$ (wegen $b^2=1-C^2$).

Nach dem Obigen ist aber $\frac{b^2k^2}{a^2}=\frac{1}{z^2}$; also haben wir: $\frac{s^2}{z^2}-k^2p^2+2Ckp=1$.

Setzen wir hier $C=\frac{\sqrt{F(z)}-1}{kz^2}$, so ist $\frac{s^2}{z^2}-k^2p^2+\frac{2p(\sqrt{F(z)}-1)}{z^2}=1$, oder:

$$z^2(1+k^2p^2)-s^2+2p=2p.\sqrt{F(z)}, \text{ oder:}$$

$$z^4(1+k^2p^2)^2-2z^2(1+k^2p^2)(s^2-2p)+(s^2-2p)^2=4p^2\left[1-(1+k^2)z^2+k^2z^4\right],$$

oder endlich: $z^4(1-k^2p^2)^2-2z^2\left[(1+k^2p^2)(s^2-2p)-2p^2(1+k^2)\right]+s^2(s^2-4p)=o.$ (30

Es ist aber: $x_1^2.F(x_2)+x_2^2.F(x_1)=(1+k^2p^2)(s^2-2p)-2p^2(1+k^2)$, und:

$$\left[x_1^2.F(x_1)-x_2^2.F(x_1)\right]^2=(1-k^2p^2)^2(s^2-4p)s^2.$$

Also verwandelt sich die Gleichung (30) in folgende:

$$z^4(1-k^2p^2)^4-2z^2(1-k^2p^2)^2\left[x_1^2.F(x_2)+x_2^2F(x_1)\right]+\left[x_1^2.F(x_1)-x_2^2.F(x_1)\right]^2=o.$$

Daraus folgt: $z^2(1-k^2p^2)^2=x_1^2.F(x_2)+x_2^2.F(x_1)+2x_1x_2\sqrt{F(x_1).F(x_2)}$; oder $z^2(1-k^2p^2)^2=\left[x_1\sqrt{F(x_2)}+x_2.\sqrt{F(x_1)}\right]^2$. Mithin ist $z(1-k^2p^2)=x_1.\sqrt{F(x_2)}+x_2.\sqrt{F(x_1)}$, oder endlich: $z=\frac{x_1\sqrt{F(x_2)}+x_2.\sqrt{F(x_1)}}{1-k^2x_1^2x_2^2}$ (31), das bekannte Additionstheorem für sinam(u+v).
