

Dublet

GEOMETRISCHE UNTERSUCHUNGEN

ÜBER DEN

ZUSAMMENHANG DER THEORIE DER CURVEN

MIT DER

THEORIE DER VERWANDTSCHAFTEN.

*Bibliothek des
Lissaer - Gymnasiums
zu St. Peter u. Pauli*

VON

JULIUS TOEPLITZ,

OBERLEHRER.

Programm des Lissaer Gymnasiums

Ostern 1879.

*Y
Lissaer*

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1879.



Gz 31024/1879

258 b 1463

Zur Theorie der Curven und der Verwandtschaften.

Das Nachfolgende ist der Anfang einer grösseren Arbeit über Constructionen an Curven 3. und 4. Ordnung. Die zugehörigen Figuren sind meist weggelassen, da sie leicht zu ergänzen sind.

I.

Die Verwandtschaft auf der Geraden.

1.

Definition. Um die Lage eines Punktes auf einer Geraden zu bestimmen, wählt man auf derselben einen festen Anfangspunkt O aus. Ein Punkt A heisst dann bestimmt, wenn seine Entfernung von diesem Anfangspunkte gegeben ist (Abscisse), und zwar wird diese Entfernung positiv oder negativ genommen, je nachdem der Punkt A rechts oder links vom Anfangspunkte liegt. Geben wir der Abscisse eine bestimmte Reihe von Werthen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots$, so erhalten wir eine bestimmte Punktreihe. Geben wir der Abscisse eine zweite Reihe von Werthen $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \dots$, so erhalten wir eine zweite Punktreihe. Zwei Punktreihen heissen verwandt, wenn nach einem bestimmten Gesetze zu jedem Punkte der einen Reihe ein oder mehrere Punkte der andern gehören, so dass, wenn die Abscisse eines Punktes der einen Reihe als Strecke oder Zahl gegeben ist, die Abscissen der entsprechenden Punkte der andern Reihe durch Construction oder Rechnung gefunden werden können.

Der allgemeinste Fall wird der sein, dass einem Punkte der ersten Reihe m Punkte der zweiten und einem Punkte der zweiten Reihe n Punkte der ersten entsprechen. Alsdann heisst die Verwandtschaft eine „ m - und n -deutige“. Nennen wir α einen Punkt (d. h. die Abscisse eines Punktes) der ersten Reihe, und β einen entsprechenden Punkt der zweiten Reihe, so muss zwischen α und β eine Gleichung $f(\alpha, \beta) = 0$ stattfinden, die in Bezug auf α vom n^{ten} und in Bezug auf β vom m^{ten} Grade sein muss. Wir nennen diese die Verwandtschaftsgleichung und bezeichnen sie durch: $f(\alpha^n, \beta^m) = 0$.

2.

Ein und eindeutige oder projectivische Verwandtschaft. Wir betrachten zuerst die ein und eindeutige oder projectivische Verwandtschaft, in der also jedem Punkte der einen Reihe nur ein einziger Punkt der andern entsprechen soll. In diesem Falle muss die Verwandtschaftsgleichung sowohl in α , als in β vom ersten Grade sein. Ihre allgemeine Form ist daher: $a\alpha\beta + b\alpha + c\beta + d = 0$.

Diese Gleichung enthält 4 Constanten: a, b, c, d . Sind die Verhältnisse dieser 4 Constanten bestimmt, so ist dadurch das ganze Wesen der projectivischen Verwandtschaft dargestellt. Zu jedem Punkte α kann man dann den zugehörigen Punkt β , und umgekehrt, berechnen oder construiren. Die Verhältnisse $a : b : c : d$ sind aber bestimmt, wenn 3 Bedingungen festgestellt

werden, welche die Verwandtschaft erfüllen muss. Sind z. B. 3 Punktepaare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ gegeben, welche einander entsprechen sollen, so erhalten wir die 3 Gleichungen:

$$\begin{aligned} a\alpha_1\beta_1 + b\alpha_1 + c\beta_1 + d &= 0 \\ a\alpha_2\beta_2 + b\alpha_2 + c\beta_2 + d &= 0 \\ a\alpha_3\beta_3 + b\alpha_3 + c\beta_3 + d &= 0. \end{aligned}$$

Diese geben uns die Verhältnisse $a : b : c : d$, und die Verwandtschaft ist in dem oben definirten Sinne bestimmt. Wir erhalten also den Satz:

Jede projectivische Verwandtschaft ist durch 3 einander entsprechende Punktepaare bestimmt, d. h. sind 3 einander entsprechende Punktepaare gegeben, so können wir zu jedem beliebigen Punkte der einen Reihe den entsprechenden Punkt der andern durch Construction oder Rechnung finden.

3.

Bedingungen für 4 Punktepaare ein und derselben Verwandtschaft. Da durch 3 Punktepaare eine projectivische Verwandtschaft bestimmt ist, so müssen 4 Punktepaare, die derselben Verwandtschaft angehören sollen, durch eine Relation verbunden sein. Diese findet man, indem man zu den Gleichungen des vorigen Paragraphen die Gleichung $a\alpha_4\beta_4 + b\alpha_4 + c\beta_4 + d = 0$ hinzufügt, und aus den 4 homogenen Gleichungen die Coefficienten a, b, c, d eliminirt. Man erhält als die gesuchte Bedingung die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1, & \alpha_1, & \beta_1, & 1 \\ \alpha_2\beta_2, & \alpha_2, & \beta_2, & 1 \\ \alpha_3\beta_3, & \alpha_3, & \beta_3, & 1 \\ \alpha_4\beta_4, & \alpha_4, & \beta_4, & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese giebt ausgerechnet: $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_3} : \frac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_4 - \alpha_3} = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 - \beta_3} : \frac{\beta_4 - \beta_2}{\beta_4 - \beta_3}$. Bezeichnen wir den Anfangspunkt mit 0, und die Punkte, deren Abscissen α_i und β_i sind, durch A_i und B_i , so erhalten wir als Bedingungsgleichung:

$$\frac{A_1A_2}{A_1A_3} : \frac{A_4A_2}{A_4A_3} = \frac{B_1B_2}{B_1B_3} : \frac{B_4B_2}{B_4B_3}, \text{ d. h.}$$

In 2 projectivischen Punktreihen sind die Doppelverhältnisse von 4 Punkten der einen Reihe gleich den Doppelverhältnissen der entsprechenden Punkte der zweiten Reihe.

4.

Verlegung des Anfangspunktes. Ein und dieselbe Verwandtschaft zweier Punktreihen kann durch verschiedene Verwandtschaftsgleichungen dargestellt werden, da man den Anfangspunkt der Abscissen verlegen kann. Rückt man den Anfangspunkt um eine Strecke λ nach rechts, so wird jede Abscisse um λ kleiner. Setzt man also $\alpha + \lambda$ und $\beta + \lambda$ statt α und β , so hat man als Verwandtschaftsgleichung für den neuen Anfangspunkt:

$$a(\alpha + \lambda)(\beta + \lambda) + b(\alpha + \lambda) + c(\beta + \lambda) + d = 0,$$

oder

$$a\alpha\beta + (a\lambda + b)\alpha + (a\lambda + c)\beta + a\lambda^2 + (b + c)\lambda + d = 0.$$

Bezeichnen wir die neue Gleichung durch $A\alpha\beta + B\alpha + C\beta + D = 0$, so sehen wir, dass

$$A = a, \quad B = a\lambda + b, \quad C = a\lambda + c, \quad D = a\lambda^2 + (b + c)\lambda + d.$$

Ist eine projectivische Verwandtschaft von einer besondern Art, so muss das Eigenartige der Verwandtschaft durch eine Gleichung zwischen den Coefficienten a, b, c, d , oder, was dasselbe ist, durch das Verschwinden einer Function von a, b, c, d ausgedrückt werden, z. B. durch $f(a, b, c, d) = 0$. Jede Eigenschaft, die in der Natur einer Verwandtschaft liegt, muss aber von der Wahl des Anfangspunktes unabhängig sein. Wählen wir also irgend einen andern Anfangspunkt, so muss auch $f(A, B, C, D) = 0$ sein.

Invarianten. Wir nennen eine Function $f(a, b, c, d)$, welche durch Verlegung des Anfangspunktes unverändert bleibt, so dass $f(a, b, c, d) = f(A, B, C, D)$, eine Invariante.

Es giebt unzählig viele solcher Invarianten; sie lassen sich aber auf 3 Grund-Invarianten zurückführen. Soll nämlich $f(a, b, c, d)$ eine Invariante sein, so muss $f(a, b, c, d) = f(A, B, C, D)$, oder nach dem Früheren:

$$f(a, b, c, d) = f(a, a\lambda + b, a\lambda + c, a\lambda^2 + (b + c)\lambda + d)$$

sein. Da diese Relation eine identische für jede Lage des Anfangspunktes d. h. für jeden Werth von λ sein muss, so können wir λ den speciellen Werth $-\frac{c}{a}$ geben; alsdann erhalten wir:

$$f(a, b, c, d) = f\left(a, b - c, 0, \frac{ad - bc}{a}\right).$$

Wir haben also den Satz:

Jede Invariante einer projectivischen Verwandtschaft muss eine Function von $a, b - c$ und $ad - bc$ sein.

Dass $a, b - c$ und $ad - bc$ selbst Invarianten sind, ersieht man leicht aus den obigen Bestimmungen für A, B, C, D . Denn diese ergeben:

$$A = a, \quad B - C = b - c, \quad AD - BC = ad - bc.$$

5.

Bedeutung des Verschwindens der Invarianten $a, b - c, ad - bc$. Zunächst ist es von Interesse zu untersuchen, bei welchen Arten der projectivischen Verwandtschaft die 3 Grund-Invarianten $a, b - c, ad - bc$ verschwinden.

1. Ist $a = 0$, so lautet die Verwandtschaftsgleichung: $b\alpha + c\beta + d = 0$. In dieser kommen bloss 3 Constanten linear und homogen vor. Die Verwandtschaft ist daher bestimmt, wenn 2 Paare einander entsprechender Punkte gegeben sind. Sind 3 Paare einander entsprechender Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ gegeben, so müssen diese durch eine Bedingungsgleichung verbunden sein. Diese ergibt sich, wie oben, als die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1, \beta_1, 1 \\ \alpha_2, \beta_2, 1 \\ \alpha_3, \beta_3, 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{oder: } \frac{\alpha_1 - \alpha_3}{\alpha_2 - \alpha_3} = \frac{\beta_1 - \beta_3}{\beta_2 - \beta_3}, \quad \text{oder: } \frac{A_1 A_3}{A_2 A_3} = \frac{B_1 B_3}{B_2 B_3}.$$

Die Punktreihen schneiden also auf dem Träger proportionale Strecken ab. Man nennt alsdann die Punktreihen einander ähnlich.

Involution. 2. Ist $b - c = 0$, so ist die Verwandtschaftsgleichung: $a\alpha\beta + b(a + \beta) + d = 0$. Diese ist in α und β symmetrisch. Man ersieht hieraus, dass bei dieser Verwandtschaft jedem Punkte des Trägers ein und derselbe Punkt entspricht, möge man ihn als einen Punkt der ersten oder der zweiten Reihe ansehen. Man nennt die Verwandtschaft eine involutorische, und sagt: die Punkte des Trägers bilden eine Involution. Da die involutorische Verwandtschaftsgleichung nur 3 Constanten linear und homogen enthält, so sieht man, dass zur Bestimmung der

Verwandtschaft nur 2 Bedingungen nöthig sind. Sind also 3 Punktepaare $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ einer Involution gegeben, so findet zwischen ihnen eine Relation statt, die dargestellt wird durch die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\beta_1, & \alpha_1 + \beta_1, & 1 \\ \alpha_2\beta_2, & \alpha_2 + \beta_2, & 1 \\ \alpha_3\beta_3, & \alpha_3 + \beta_3, & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

oder durch:

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_3} \cdot \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_2 - \beta_3} = \frac{\alpha_1 - \beta_2}{\alpha_3 - \beta_1}$$

d. h.

$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3} \cdot \frac{B_1B_2}{B_2B_3} = \frac{A_1B_3}{A_3B_1}.$$

3. Ist $ad - bc = 0$, so ist $d = \frac{bc}{a}$, also die Verwandtschaftsgleichung:

$$a\alpha\beta + b\alpha + c\beta + \frac{bc}{a} = 0, \quad \text{oder: } a^2\alpha\beta + ab\alpha + ac\beta + bc = 0,$$

oder endlich:

$$(a\alpha + c)(a\beta + b) = 0.$$

Diese Gleichung besagt, dass β für jeden Werth von α ein und denselben constanten Werth $-\frac{b}{a}$ erhält, ausser für $\alpha = -\frac{c}{a}$, in welchem Falle β völlig unbestimmt bleibt. Ebenso erhält α für jeden beliebigen Werth von β ein und denselben constanten Werth $-\frac{c}{a}$, ausser für $\beta = -\frac{b}{a}$, in welchem Falle α völlig unbestimmt bleibt.

Ist also $ad - bc = 0$, so entspricht jedem Punkte der ersten Reihe ein und derselbe Punkt der zweiten Reihe, mit Ausnahme des Punktes $\alpha = -\frac{c}{a}$, dem jeder Punkt der zweiten Reihe entsprechen kann. Ebenso entspricht jedem Punkte der zweiten Reihe ein und derselbe Punkt der ersten Reihe, mit Ausnahme des Punktes $\beta = -\frac{b}{a}$, dem jeder Punkt der ersten Reihe entsprechen kann.

6.

Gegenpunkte. Es giebt bei 2 projectivischen Punktreihen ausgezeichnete Punkte, die bei späteren Constructionen von Wichtigkeit sind.

Zunächst suchen wir für jede Reihe denjenigen Punkt, welcher dem unendlich entfernten Punkte des anderen entspricht. Diese Punkte nennen wir Gegenpunkte, und bezeichnen sie durch u_α und u_β . Der Gegenpunkt u_α der ersten Reihe entspricht also dem unendlich entfernten Punkte ∞ der zweiten Reihe, und der Gegenpunkt u_β der zweiten Reihe entspricht dem unendlich entfernten Punkte ∞ der ersten Reihe. Setzen wir in der Verwandtschaftsgleichung $\beta = \infty$, so erhalten wir: $u_\alpha = -\frac{c}{a}$. Ebenso erhalten wir $u_\beta = -\frac{b}{a}$.

Sind unter den gegebenen Punktepaaren einer Verwandtschaft die beiden Gegenpunkte enthalten, so wird die Relation, welche wir in § 3 erhalten haben, bei Weitem einfacher. Die Relation lautete:

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_3} \cdot \frac{\alpha_4 - \alpha_2}{\alpha_4 - \alpha_3} = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 - \beta_3} \cdot \frac{\beta_4 - \beta_2}{\beta_4 - \beta_3}.$$

Setzen wir nun $\alpha_1 = \infty$ und $\beta_1 = \infty$, so ist $\alpha_1 = u_\alpha$ und $\beta_1 = u_\beta$, $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_3} = 1$ und $\frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 - \beta_3} = 1$. Folglich verwandelt sich jetzt die obige Relation in folgende:

$$(u_\alpha - \alpha_2)(u_\beta - \beta_2) = (u_\alpha - \alpha_3)(u_\beta - \beta_3), \quad \text{d. h.}$$

Die Produkte der Entfernungen zweier entsprechenden Punkte von ihren Gegenpunkten sind constant.

Bei einer involutorischen Verwandtschaft ist $b = c$, also auch $u_\alpha = u_\beta$; d. h. bei einer Involution fallen die Gegenpunkte zusammen; was sich auch schon aus der Definition der Involution ergibt. Wenn umgekehrt die Gegenpunkte zusammenfallen, so ist $b = c$, folglich die Verwandtschaft eine involutorische. Nennen wir diesen gemeinsamen Gegenpunkt u , so findet für die Involution die Relation: $(u - \alpha_2)(u - \beta_2) = (u - \alpha_3)(u - \beta_3)$ statt.

Bei ähnlichen Punktreihen ist $a = 0$, also $u_\alpha = \infty$, d. h. bei ähnlichen Punktreihen fallen die Gegenpunkte ins Unendliche.

7.

Gemeinsame Punkte. Ausser den Gegenpunkten sind die Punkte von Wichtigkeit, welche beiden Reihen gemeinsam sind, d. h. die Punkte, welche mit ihren entsprechenden zusammenfallen. Um diese zu finden, setzen wir $\alpha = \beta = g$, und wir erhalten zur Bestimmung von g die Gleichung: $ag^2 + (b + c)g + d = 0$. Aus dieser ergeben sich 2 Werthe g_1 und g_2 für g . Also giebt es immer zwei gemeinsame Punkte, die reell und verschieden, gleich oder imaginär sind, je nachdem $(b + c)^2 - 4ad \geq 0$ ist.

$(b + c)^2 - 4ad$ muss eine Invariante sein, da durch ihr Verschwinden eine Eigenschaft ausgedrückt wird, die unabhängig von der Lage des Anfangspunktes ist. Und in der That ist auch: $(b + c)^2 - 4ad = (b - c)^2 - 4(ad - bc)$, also nach dem Früheren eine Invariante.

Aus der obigen Gleichung folgt: $g_1 + g_2 = -\frac{b+c}{a} = u_\alpha + u_\beta$. Daraus schliessen wir, dass die Mitte der Entfernung der Gegenpunkte zugleich die Mitte der Entfernung der gemeinsamen Punkte ist.

Daraus folgt, dass bei der Involution der Gegenpunkt in der Mitte zwischen den beiden gemeinsamen Punkten liegt. Man nennt bei der Involution den Gegenpunkt auch den Centralpunkt der Involution. Ist O dieser Punkt, und sind A_1, A_2 und B_1, B_2 zwei Paar entsprechende Punkte der Involution, G_1 und G_2 die gemeinsamen Punkte, so ist nach dem Früheren:

$$OA_1 \cdot OB_1 = OA_2 \cdot OB_2 = OG_1^2 = OG_2^2.$$

Daraus folgert man leicht, dass die beiden gemeinsamen Punkte und je zwei einander entsprechende Punkte harmonische Punkte sind.

Bei ähnlichen Punktreihen ist $a = 0$; also fällt einer der gemeinsamen Punkte ins Unendliche.

Verlegt man den Anfangspunkt nach einem der gemeinsamen Punkte, z. B. g_1 , so nimmt die Verwandtschaftsgleichung folgende Form an:

$$a\alpha\beta + (ag_1 + b)\alpha + (ag_1 + c)\beta = 0.$$

8.

Mehrere Reihen. Haben wir die zwei Gleichungen: $a\alpha\beta + b\alpha + c\beta + d = 0$ und $a'\beta\gamma + b'\beta + c'\gamma + d' = 0$, so findet man nach der Elimination von β eine Gleichung von der-

selben Form: $A\alpha\gamma + B\alpha + C\gamma + D = 0$. Wenn also 2 Reihen einer dritten projectivisch verwandt sind, so sind sie auch unter einander projectivisch. Geometrisch ist dieses von Vorne herein klar.

Stehen im Allgemeinen die Punktreihen α und β in einer „ m und n -deutigen“, und die Punktreihen β und γ in einer „ p und q -deutigen“ Verwandtschaft, so entsprechen jedem Punkte der Reihe α m Punkte der Reihe β . Da aber jedem der letzteren p Punkte der Reihe γ entsprechen, so gehören zu jedem Punkte der Reihe α mp Punkte der Reihe γ . Ebenso gehören zu jedem Punkte der Reihe γ q Punkte der Reihe β , und zu jedem dieser letzteren Punkte n Punkte der Reihe α ; folglich entsprechen jedem Punkte der Reihe γ nq Punkte der Reihe α . Wir haben also den für das Spätere wichtigen Satz:

Stehen die Punktreihen α und β in einer „ m und n -deutigen“, und die Reihen β und γ in einer „ p und q -deutigen“ Verwandtschaft, so stehen die Reihen α und γ in einer „ mp und nq -deutigen“ Verwandtschaft.

II.

Geometrische Beispiele.

1.

Es sei eine feste Gerade L gegeben, ferner ausserhalb derselben 2 feste Punkte P und Q , und endlich eine als Träger gewählte feste Gerade G . Zieht man von einem Punkte A der letzteren eine Gerade durch P , welche L in dem Punkte A' schneidet, und verbindet A' mit Q , so wird durch die Linie $A'Q$ auf dem Träger G ein Punkt B bestimmt. Jedem Punkte A auf dem Träger G entspricht also ein einziger bestimmter Punkt B auf demselben. Die Punktreihen A und B sind mithin projectivisch. Wir haben also den Satz:

Zieht man von allen Punkten einer Geraden Strahlen durch 2 feste Punkte, so bestimmen die so gebildeten Strahlenpaare auf jeder Transversale 2 projectivische Punktreihen. Man überzeugt sich leicht, dass die beiden Punkte, in welchen die Gerade L und die Gerade PQ den Träger schneiden, die beiden gemeinsamen Punkte der beiden Reihen sind.

2.

Es sei ein Kegelschnitt K gegeben, auf demselben 2 feste Punkte P und Q , und endlich eine Gerade G als Träger. Verbindet man einen Punkt A der Geraden G mit dem festen Punkte P , so schneidet die Verbindungslinie AP den Kegelschnitt K in noch einem einzigen Punkte A' ; und verbindet man A' mit dem zweiten festen Punkte Q , so bestimmt die Gerade $A'Q$ auf dem Träger G einen einzigen Punkt B . Ist B gegeben, so finden wir A , indem wir erst B mit Q verbinden, und den Durchschnitt A' der Linie BQ mit dem Kegelschnitte mit P verbinden; der Durchschnitt der Linie $A'P$ mit G giebt den Punkt A . Die Punktreihen A und B sind also projectivisch, und wir haben mithin den Satz:

Verbindet man alle Punkte eines Kegelschnitts mit 2 festen Punkten P und Q desselben, so entstehen um P und Q 2 Strahlbüschel, welche auf jeder Transversalen 2 projectivische Punktreihen ausschneiden. — Man überzeugt sich leicht, dass die Durchschnittspunkte der Transversalen mit dem Kegelschnitte die beiden gemeinsamen Punkte der beiden Reihen sind. Betrachten wir ferner den Durchschnittspunkt O der Geraden PQ mit der Transversalen als einen Punkt der ersten Reihe, so entspricht ihm der Punkt, in welchem die Transversale von der

Tangente in Q getroffen wird. Betrachten wir ihn dagegen als einen Punkt der zweiten Reihe, so entspricht ihm der Punkt, in dem die Transversale von der Tangente in P getroffen wird.

3.

Es seien 2 feste Punkte P und Q und eine Gerade G gegeben. Hebt man einen Punkt A der Geraden G heraus, so kann man durch diesen Punkt und die Punkte P und Q einen Kreis legen, welcher in der Geraden G als zweiten Durchschnittspunkt einen Punkt B bestimmt. Jedem Punkte A entspricht also ein Punkt B ; die Punktreihen A und B sind also projectivisch. Ausserdem sind sie involutorisch, da A ebenso aus B , wie B aus A , construirt wird. — Nehmen wir für A den unendlich entfernten Punkt der Geraden G , so wird der entsprechende Kreis zur Geraden PQ . Der Punkt also, in dem die Gerade PQ die gegebene Gerade G trifft, ist der Centralpunkt der Involution. — Die gemeinsamen Punkte sind offenbar diejenigen, in denen die zugehörigen Kreise die Gerade G tangiren. Da nun jede Involution im Allgemeinen 2 gemeinsame Punkte besitzt, so sehen wir, dass es im Allgemeinen 2 Kreise giebt, welche durch 2 gegebene Punkte gehen, und eine gegebene Gerade berühren. — Wir haben also den Satz:

Das Kreisbüschel, welches durch 2 feste Punkte (Basispunkte) geht, erzeugt auf jeder Transversalen 2 involutorische Punktreihen. Der Punkt, in dem die Transversale von der Verbindungslinie der Basispunkte getroffen wird, ist der Centralpunkt der Involution. Legt man durch jeden der beiden gemeinsamen Punkte der Involution und die beiden Basispunkte je einen Kreis, so berühren diese beiden Kreise die Transversale.

4.

Ganz auf dieselbe Weise wird folgender Satz bewiesen:

Alle Kegelschnitte eines Büschels (d. h. die durch 4 feste Punkte gehen) erzeugen auf jeder Transversalen 2 involutorische Punktreihen. Die beiden Kegelschnitte des Büschels, welche durch die beiden gemeinsamen Punkte der Involution gehen, berühren die Transversale, und sind die einzigen Kegelschnitte des Büschels, welche diese Eigenschaft haben.

5.

Gegeben sei ein fester Kegelschnitt K , eine feste Tangente desselben T und ausserdem eine beliebige feste Gerade L . Aus einem beliebigen Punkte A der festen Tangente T kann man an den Kegelschnitt K noch eine, und zwar nur eine Tangente T' legen. Diese schneidet die feste Gerade L in dem Punkte A' . Dann kann man aus A' an den Kegelschnitt noch eine Tangente legen, welche auf der gegebenen Tangente T den Punkt B bestimmt. Die Punkte A und B entsprechen einander offenbar involutorisch. Wir haben also den Satz:

Zieht man von allen Punkten einer festen Geraden an einen festen Kegelschnitt die Tangentenpaare, so erzeugen diese auf jeder Tangente des Kegelschnitts 2 involutorische Punktreihen. — Die beiden Tangenten in den Durchschnittspunkten der festen Geraden und des Kegelschnitts bestimmen die beiden gemeinsamen Punkte der Involution. Der Durchschnittspunkt der gegebenen Geraden mit der zum Träger gewählten Tangente entspricht dem Berührungspunkte der letzteren.

6.

Es seien 2 Kegelschnitte K und K' gegeben, ferner 2 ihrer gemeinsamen Tangenten T und T' . Wir betrachten T als den Träger zweier Punktreihen. Von einem Punkte A der Tangente T kann man an den Kegelschnitt K nur noch eine einzige Tangente ziehen, welche auf der gegebenen zweiten Tangente T' einen einzigen Punkt A' bestimmt. Von diesem Punkte A' kann man an den zweiten gegebenen Kegelschnitt K' wiederum nur noch eine einzige Tangente ziehen, welche auf dem Träger T den dem Punkte A entsprechenden Punkt B bestimmt. Wir erhalten daher folgenden Satz:

Zieht man von allen Punkten einer zweien Kegelschnitten gemeinsamen Tangente T' Tangenten an diese Kegelschnitte, so bestimmen diese Tangentenpaare auf jeder anderen gemeinsamen Tangente derselben beiden Kegelschnitte 2 projectivische Punktreihen. — Um die gemeinsamen Punkte der beiden Punktreihen zu bestimmen, bemerken wir, dass, wenn A und B zusammenfallen sollen, $A'A$ (BA') beide Kegelschnitte berühren muss. Ausser den beiden gegebenen gemeinschaftlichen Tangenten der beiden Kegelschnitte müssen also noch 2 reelle, imaginäre oder zusammenfallende gemeinschaftliche Tangenten der beiden Kegelschnitte vorhanden sein, welche den Träger T in den beiden gemeinsamen Punkten der Verwandtschaft treffen.

III.

Verwandtschafts-Coordinaten.

1.

Strahlbüschel und Erzeugung von Curven durch verwandte Reihen. Die Beispiele 1 und 2 des vorigen Abschnitts haben gezeigt, dass jede Gerade oder jeder Kegelschnitt mit Hülfe zweier festen Punkte auf einem Träger 2 projectivische Punktreihen erzeugt. Wenn man umgekehrt die entsprechenden Punkte zweier projectivischen Punktreihen mit 2 festen Punkten verbindet, so entstehen 2 einander entsprechende Strahlbüschel, deren Durchschnittspunkte, wie wir später sehen werden, im Allgemeinen einen Kegelschnitt erzeugen.

Es liegt daher nahe, diese Methode im Allgemeinen darauf auszudehnen, dass man mit Hülfe einer Curve und zweier festen Punkte verwandte Punktreihen, und umgekehrt, erzeugt. Diese allgemeine Methode wird folgende sein.

Von 2 „ m - und n -deutig“ verwandten Punktreihen werden die Punkte der einen mit einem festen Punkte P , die der anderen mit einem festen Punkte Q verbunden. Dann entstehen 2 einander entsprechende Strahlbüschel mit den Mittelpunkten P und Q . Jedem Strahle des einen Büschels entsprechen m Strahlen des zweiten, und jedem Strahle des zweiten Büschels entsprechen n Strahlen des ersten. Die Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen bestimmen eine Curve, die also von den „ m - und n -deutig“ verwandten Punktreihen abhängt.

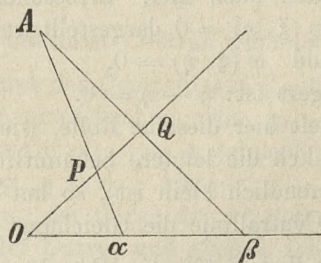
Ist umgekehrt eine Curve gegeben, und verbindet man jeden ihrer Punkte mit 2 festen Punkten P und Q , so entstehen 2 Strahlbüschel, welche auf jedem Träger 2 verwandte Punktreihen erzeugen. Soll man zu einem Punkte α der einen Reihe den entsprechenden β der andern finden, so verbindet man α mit P , ferner die Durchschnittspunkte von αP und der Curve mit Q ; alsdann schneiden die letzteren Verbindungslinien auf dem Träger die dem Punkte α entsprechenden Punkte β der andern Reihe aus.

Die Curve und die verwandten Punktreihen bedingen also einander gegenseitig; und jede Aufgabe, welche die Construction von Curven betrifft, wird dadurch auf eine andere reducirt, welche sich auf die Construction von verwandten Punktreihen bezieht; und umgekehrt.

2.

Verwandtschafts-Coordinationen. Wir werden durch das Vorhergehende auf eine besondere Art von Coordinatenbestimmung geführt. Während bei der gewöhnlichen Coordinatenbestimmung 2 feste Gerade und 2 Richtungen gegeben sind, mit deren Hülfe jeder Punkt der Ebene bestimmt wird, nehmen wir bloss eine einzige feste Gerade, den Träger, als gegeben an und ausserhalb derselben 2 feste Punkte P und Q , die wir die Centralpunkte nennen, so wie ihre Verbindungslinie PQ die Centrallinie. Als Anfangspunkt des Trägers, von dem aus die Abscissen gezählt werden, nehmen wir den Punkt O , in welchem der Träger von der Centrallinie PQ geschnitten wird. Jeder Punkt A der Ebene wird nun folgendermassen bestimmt. Man zieht AP und AQ ; dadurch entstehen auf dem Träger 2 Abschnitte $O\alpha = \alpha$ und $O\beta = \beta$. Sind umgekehrt α und β gegeben, so erhält man den Punkt A als den Durchschnittspunkt der Linien αP und βQ . Zu jedem Punkte der Ebene A gehören also zwei bestimmte Werthe von α und β , und umgekehrt gehört zu jedem Werthepaare von α und β ein bestimmter Punkt A . [Die einzige Ausnahme bilden die Punkte der Centrallinie PQ . Für diese alle ist $\alpha = 0$ und $\beta = 0$; für den Punkt P selbst ist α beliebig und $\beta = 0$, und ebenso für den Punkt Q $\alpha = 0$ und β beliebig]. Wir könnten also α und β die Coordinaten von A nennen. Jedoch ziehen wir aus einem Grunde, der sofort entwickelt werden wird, es vor, die reciproken Werthe $\frac{1}{\alpha} = \xi$ und $\frac{1}{\beta} = \eta$ als Coordinaten von A einzuführen.

Wir wollen nämlich zuerst den Zusammenhang der Verwandtschafts-Coordinationen mit den gewöhnlichen Parallel-Coordinationen feststellen.



Nimmt man nämlich den Träger zur Abscissenachse und die Centrallinie PQ zur Ordinatenachse der Parallel-Coordinationen x und y , und setzt man die gegebenen Strecken $OP = p$, $OQ = q$, so ist die Gleichung der Geraden $A\alpha : \frac{y}{p} + \frac{x}{\alpha} = 1$, und der Geraden $A\beta : \frac{y}{q} + \frac{x}{\beta} = 1$. Für den Punkt A bestehen beide Gleichungen zu gleicher Zeit; wir erhalten also:

$$\alpha = \frac{px}{p-y} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{qx}{q-y};$$

ferner umgekehrt:

$$x = \frac{\alpha\beta(p-q)}{\beta p - \alpha q} \quad \text{und} \quad y = \frac{pq(\beta - \alpha)}{\beta p - \alpha q}.$$

Mit Hülfe dieser Transformationsformeln kann man jede Gleichung $f(x, y) = 0$ in eine andre

$\varphi(\alpha, \beta) = 0$ verwandeln. Wir stellen jedoch an die Transformation die Forderung, dass durch dieselbe der Grad der Gleichung nicht geändert werde. Dies ist bei der obigen Transformation nicht der Fall; denn bei dieser geht jede Gleichung vom n^{ten} Grade in x und y in eine Gleichung vom $2n^{\text{ten}}$ Grade in α und β über. Wir erreichen aber unsern Zweck, wenn wir statt α und β ihre reciproken Werthe $\frac{1}{\alpha} = \xi$ und $\frac{1}{\beta} = \eta$ als Coordinaten einführen. Setzen wir dann noch $p = \frac{1}{\lambda}$ und $q = \frac{1}{\mu}$, so verwandeln sich die obigen Transformationsformeln in folgende:

$$\xi = \frac{1 - \lambda y}{x}, \quad \eta = \frac{1 - \mu y}{x},$$

und:

$$x = \frac{\mu - \lambda}{\mu \xi - \lambda \eta}, \quad y = \frac{\xi - \eta}{\mu \xi - \lambda \eta}.$$

Jede Gleichung vom n^{ten} Grade in x und y bleibt eine Gleichung vom n^{ten} Grade in ξ und η . Also stellt jede Gleichung n^{ten} Grades in ξ und η eine Curve n^{ter} Ordnung dar.

Ist die Gleichung einer Curve n^{ter} Ordnung $f(\xi, \eta) = 0$ gegeben, und setzen wir $\xi = \frac{1}{\alpha}$, $\eta = \frac{1}{\beta}$, so erhalten wir eine Verwandtschaftsgleichung $f\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right) = 0$. Ist umgekehrt eine Verwandtschaftsgleichung $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ gegeben, und setzt man $\alpha = \frac{1}{\xi}$, $\beta = \frac{1}{\eta}$, so erhält man die Gleichung einer Curve: $\varphi\left(\frac{1}{\xi}, \frac{1}{\eta}\right) = 0$. Zu jeder Verwandtschaft gehört also eine bestimmte Curve, und umgekehrt. Wir nennen die zu jeder Verwandtschaft gehörende Curve die *Leitcurve* der Verwandtschaft.

3.

Einige besondere Fälle als Beispiele. Als Beispiele betrachten wir die Gleichungen einiger Geraden in Verwandtschafts-Coordinaten. Alle Sätze, welche in der Theorie der Parallel-Coordinaten algebraisch entwickelt werden, gelten auch hier. Insbesondere gilt der Satz: Alle Curven, die durch die Gleichung $f(\xi, \eta) + \lambda \cdot \varphi(\xi, \eta) = 0$ dargestellt werden, gehen durch die Durchschnittspunkte der Curven $f(\xi, \eta) = 0$ und $\varphi(\xi, \eta) = 0$.

1. Die Gleichung des Trägers ist: $\xi - \eta = 0$.

2. Die Centrallinie PQ spielt hier dieselbe Rolle, wie die unendlich entfernte Gerade bei den Parallel-Coordinaten. Wie nämlich die letztere bekanntlich die Gleichung $C = 0$ hat (eigentlich $a\varepsilon x + b\varepsilon y + C = 0$, wo ε unendlich klein ist), so hat auch hier, wie man aus den obigen Transformationsformeln sieht, die Centrallinie die Gleichung $C = 0$.

3. Die Gleichung der unendlich entfernten Geraden ist: $\frac{\xi}{\lambda} - \frac{\eta}{\mu} = 0$. Algebraisch er giebt sich dies aus den Transformationsformeln des vorigen Paragraphen; denn, wenn $\frac{\xi}{\lambda} - \frac{\eta}{\mu} = 0$, so ist $x = \infty$ und $y = \infty$. Geometrisch ist dies ersichtlich, weil in diesem Falle $\alpha : \beta = p : q$ ist, und daher die Linien $P\alpha$ und $Q\beta$ parallel werden.

4. $\xi = 0$ und $\eta = 0$ stellen die durch die Centralpunkte zum Träger gezogenen parallelen Geraden dar.

5. Die Gleichung $a_0 \xi + a_1 \eta = 0$ stellt irgend eine Parallele zum Träger dar. Denn der Durchschnittspunkt dieser Geraden und des Trägers hat die Coordinaten $\xi = 0$ und $\eta = 0$.

6. Die Gleichung $\xi - \eta + a_2 = 0$ stellt jede Gerade vor, die durch den Anfangspunkt O geht. Denn sie geht durch den Durchschnittspunkt der Geraden $\xi - \eta = 0$ und $a_2 = 0$, welche den Träger und die Centrallinie darstellen.

4.

Einige allgemeine Untersuchungen über Verwandtschaften und Leitcurven. Für das Folgende ist es von Wichtigkeit, in dieser Einleitung einige allgemeine Eigenschaften der Verwandtschaften und der Leitcurven festzustellen.

Eine „ m - und n -deutige“ Verwandtschaft hat die Gleichung:

$$b_{0,m} \alpha^n + b_{1,m} \alpha^{n-1} + b_{2,m} \alpha^{n-2} + \dots + b_{n-1,m} \alpha + b_{m,m} = 0,$$

in der $b_{0,m}, b_{1,m} \dots$ ganze Functionen von β vom m^{ten} Grade sind. Jedem Werthe von α entsprechen m Werthe von β , und jedem Werthe von β entsprechen n Werthe von α . Jede der Functionen b enthält im Allgemeinen $m + 1$ Constanten; folglich enthält die Verwandtschaftsgleichung $(m + 1)(n + 1)$ Constanten. Sind die $(m + 1)(n + 1) - 1$ Verhältnisse gegeben, so ist die Verwandtschaft bestimmt. Wir erhalten also den Satz:

Jede „ m - und n -deutige“ Verwandtschaft ist durch entsprechende $(m + 1)(n + 1) - 1$ Punktepaare bestimmt.

So ist z. B. eine „1- und 2-deutige“ Verwandtschaft durch 5, eine „4- und 6-deutige“ durch 34 entsprechende Punktepaare bestimmt. Um die gemeinsamen Punkte der beiden verwandten Punktreihen zu bestimmen, setzen wir $\alpha = \beta$, und erhalten dann eine Gleichung vom $(m + n)^{\text{ten}}$ Grade. Wir haben also den Satz:

Zwei „ m - und n -deutig“ verwandte Punktreihen haben $m + n$ gemeinsame Punkte.

Wenden wir uns nun zur Betrachtung der Leitcurven. Eine Curve n^{ter} Ordnung hat die Gleichung:

$$e_0 \xi^n + e_1 \xi^{n-1} + e_2 \xi^{n-2} + \dots + e_{n-1} \xi + e_n = 0,$$

in der die Coëfficienten e Functionen von η sind, deren Grad durch den Index bestimmt wird. Sie enthält $1 + 2 + 3 + \dots + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}$ Constanten. Die Curve wird daher durch $\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} - 1 = \frac{n(n+3)}{1 \cdot 2}$ Punkte bestimmt. Setzen wir $\eta = \eta_1$, so ergiebt die obige Gleichung n Werthe für ξ , d. h. jede Gerade, die durch den Centralpunkt Q geht, schneidet die Curve in n Punkten. Ist aber $e_0 = 0$, so ergiebt sich für ξ eine Gleichung vom $(n - 1)^{\text{ten}}$ Grade; eine von den obigen n Wurzeln ξ ist $= \infty$ geworden. Die Gerade $\eta = \eta_1$ schneidet also die Curve in $n - 1$ Punkten und ausserdem in dem Punkte $\xi = \infty, \eta = \eta_1$. Also:

Fehlt in der Gleichung der Curve die n^{te} Potenz von ξ , so ist der Centralpunkt Q selbst ein Punkt der Curve; und ebenso, fehlt in der Gleichung der Curve die n^{te} Potenz von η , so ist der Centralpunkt P ein Punkt der Curve.

Ist nicht bloß $e_0 = 0$, sondern auch identisch $e_1 = 0$, so werden für jeden Werth von η zwei Werthe von $\xi = \infty$, und ausserdem ergeben sich $n - 2$ endliche Werthe für ξ . In diesem Falle schneidet also jede Gerade, die durch den Centralpunkt Q geht, die Curve in $n - 2$ Punkten, und ausserdem in 2 Punkten, die in Q zusammenfallen. Q ist also in diesem Falle ein Doppelpunkt der Curve. Setzen wir diese Betrachtungen fort, so erhalten wir den Satz:

Sind in der Gleichung der Curve e_0, e_1, \dots, e_{m-1} sämmtlich identisch $= 0$, so ist der Centralpunkt Q ein m -facher Punkt der Curve. Ist umgekehrt ein m -facher Punkt einer Curve gegeben, und wählt man diesen Punkt zu einem der Centralpunkte, so muss die Gleichung der Curve eine Form annehmen, in der die Coëfficienten $e_0, e_1 \dots e_{m-1}$ identisch verschwinden.

Soll also ein gegebener Punkt ein einfacher Punkt einer Curve sein, so ergiebt dies

eine Bedingung; soll er ein Doppelpunkt sein, so ergeben sich $1 + 2$ Bedingungen; soll er allgemein ein m -facher Punkt sein, so ergeben sich $1 + 2 + \dots + m = \frac{m(m+1)}{2}$ Bedingungen.

Hieran lassen sich einige Betrachtungen über das Zerfallen von Curven knüpfen. Wir wählen als ein bestimmtes Beispiel die Curve dritten Grades:

$$a_0 \xi^3 + a_1 \xi^2 \eta + a_2 \xi \eta^2 + a_3 \eta^3 + a_4 \xi^2 + a_5 \xi \eta + a_6 \eta^2 + a_7 \xi + a_8 \eta + a_9 = 0.$$

Soll der Centralpunkt Q ein Doppelpunkt sein, so müssen nach dem Obigen a_0, a_1 und a_4 verschwinden. Soll ferner zu gleicher Zeit auch der Centralpunkt P ein Doppelpunkt der Curve sein, so müssen ausserdem a_2, a_3 und a_6 verschwinden. Die Gleichung der Curve dritten Grades, welche die Centralpunkte P und Q zu Doppelpunkten hat, wäre mithin:

$$a_5 \xi \eta + a_7 \xi + a_8 \eta + a_9 = 0,$$

also bloss die Gleichung einer Curve zweiten Grades, von der die Centralpunkte einfache Punkte sind. Es erklärt sich dies aus folgender Betrachtung, die in der Theorie der Gleichungen sowohl, wie in der der Curven von Wichtigkeit ist.

Jede Gleichung n^{ten} Grades mit einer Unbekannten kann als eine Gleichung von beliebig höherem Grade angesehen werden, in der die Coëfficienten der höheren Potenzen, als x^n , verschwindend klein geworden sind. Statt also zu sagen, eine Gleichung n^{ten} Grades habe n Wurzeln, müsste man eigentlich sagen: eine Gleichung n^{ten} Grades hat n endliche, und ausserdem noch beliebig viele unendliche Wurzeln. Man lässt aber gewöhnlich die unendlichen Wurzeln ausser Acht, und berücksichtigt sie nur dann, wenn eine Gleichung $(n + p)^{\text{ten}}$ Grades durch Variation der Coëfficienten in eine Gleichung n^{ten} Grades degenerirt; alsdann sagt man, die Gleichung habe n endliche und p unendliche Wurzeln.

Ein ähnliches Verhältniss findet bei Curvengleichungen statt. Jede Gleichung $f_1(x, y)$ \cdot $f_2(x, y) = 0$ stellt in gewöhnlichen Parallel-Coordinaten das System der beiden Curen $f_1(x, y) = 0$ und $f_2(x, y) = 0$ dar. Da wir jede Gleichung $f(x, y) = 0$ auch in der Form $C^p \cdot f(x, y) = 0$ schreiben können, wo C eine Constante ist; da ferner $C = 0$ die Gleichung der unendlich entfernten Geraden ist, so müssten wir eigentlich sagen: die Gleichung $f(x, y) = 0$ bedeutet nicht bloss eine Curve n^{ten} Grades, sondern auch noch die unendlich entfernte Gerade, und zwar diese als beliebig vielfache Linie genommen. Man sieht aber immer von dieser unendlich entfernten Geraden ab, und nur in dem Falle, wenn die Curvengleichung ursprünglich vom $(n + p)^{\text{ten}}$ Grade ist, und in eine Gleichung vom n^{ten} Grade durch Verschwinden der Coëfficienten degenerirt, sagt man, die Gleichung stelle eine Curve n^{ter} Ordnung und ausserdem die unendlich entfernte Gerade, als p fache Linie gedacht, dar.

Bei unsern Verwandtschafts-Coordinaten ist $C = 0$ nicht die Gleichung der unendlich entfernten Geraden, sondern die der Centrallinie. Wenn also eine Gleichung $(n + p)^{\text{ten}}$ Grades in Verwandtschafts-Coordinaten in eine Gleichung n^{ten} Grades degenerirt, so werden wir sagen, die Gleichung stelle eine Curve n^{ten} Grades und ausserdem die Centrallinie, als p fache Linie gedacht, dar.

In unserm obigen Beispiele degenerirte eine Curve dritter Ordnung in eine Curve zweiter Ordnung. Wir erhalten also den Satz:

Wenn eine Curve dritter Ordnung 2 Doppelpunkte haben soll, so degenerirt sie in einen Kegelschnitt und die Verbindungslinie der beiden Doppelpunkte.

(Die Fortsetzung folgt in einem der nächsten Programme.)

