



Politechnika Białostocka
Białystok University of Technology
<https://bazawiedzy.pb.edu.pl>

Publikacja / Publication	Transformaty dla inżynierów : skrypt dla studentów kierunków automatyka i robotyka, matematyka stosowana, mechatronika, elektrotechnika, informatyka i innych, pokrewnych kierunków
Autorzy / Authors	Pawłuszewicz Ewa, Piekarski Krzysztof
DOI wersji wydawcy / Published version DOI	http://dx.doi.org/10.24427/978-83-68077-40-7
Adres publikacji w Repozytorium URL / Publication address in Repository	https://bazawiedzy.pb.edu.pl/info/book/BUT7832c556301d49db89d731c5d40ca47c/
Data opublikowania w Repozytorium / Deposited in Repository on	2024-11-13
Rodzaj licencji / Type of licence	Uznanie Autorstwa - Użycie Niekomercyjne - Bez utworów zależnych (CC-BY-NC-ND) / Uznanie Autorstwa - Użycie Niekomercyjne - Bez utworów zależnych (CC-BY-NC-ND)
Wersja dokumentu / Document version	wersja wydawcy / publisher version
Cytuj tę wersję / Cite this version	Pawłuszewicz E., and Piekarski K., Transformaty dla inżynierów : skrypt dla studentów kierunków automatyka i robotyka, matematyka stosowana, mechatronika, elektrotechnika, informatyka i innych, pokrewnych kierunków, BUT Publishing House 2024, p. 109, https://pb.edu.pl/oficyna-wydawnicza/publikacje/publikacje-2024/#publikacja-25 .

Ewa Pawłuszewicz
Krzysztof Piekarski

TRANSFORMATY DLA INŻYNIERÓW



Ewa Pawłuszewicz • Krzysztof Piekarski

TRANSFORMATY DLA INŻYNIERÓW

**Skrypt dla studentów kierunków automatyka i robotyka,
matematyka stosowana, mechatronika, elektrotechnika,
informatyka i innych, pokrewnych kierunków**



**Politechnika
Białostocka**

**OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI BIAŁOSTOCKIEJ
BIAŁYSTOK 2024**

Recenzent:
dr hab. Ewa Schmeidel, prof. UwB

Redaktor naukowy dyscypliny matematyka:
prof. dr hab. inż. Zbigniew Bartosiewicz

Korekta językowa:
Edyta Chrzanowska

Okładka:
Marcin Dominów

© Copyright by Białystok University of Technology, Białystok 2024

ISBN 978-83-68077-44-5
ISBN 978-83-68077-40-7 (e-Book)
DOI: 10.24427/978-83-68077-40-7



Publikacja jest udostępniona na licencji
Creative Commons Uznanie autorstwa-Użycie niekomercyjne-Bez utworów zależnych 4.0
(CC BY-NC-ND 4.0).

Pełną treść licencji udostępniono na stronie
creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/legalcode.pl.
Publikacja jest dostępna w Internecie na stronie Oficyny Wydawniczej PB.

Druk: Print Profit sp. z o.o.

Oficyna Wydawnicza Politechniki Białostockiej
ul. Wiejska 45C, 15-351 Białystok
e-mail: oficyna.wydawnicza@pb.edu.pl
www.pb.edu.pl

Spis treści

Wstęp	4
1. Transformata Laplace’a	5
1.1. Oryginał. Funkcja Heaviside’a	5
1.2. Definicja transformaty Laplace’a	8
1.3. Własności transformaty Laplace’a	9
1.4. Związki między oryginałami a transformatami	19
1.5. Splot	23
1.6. Uwagi o pseudofunkcji δ -Diraca	25
1.7. Odwrotna transformata Laplace’a	27
1.8. Operatorowa metoda rozwiązywania równań różniczkowych	38
1.9. Uwagi bibliograficzne	46
2. Transformata $\mathcal{L}$	47
2.1. Wprowadzenie	47
2.2. Delta Kroneckera. Dyskretna funkcja Heaviside’a	48
2.3. Definicja $\mathcal{L}$ -transformaty	50
2.4. Własności $\mathcal{L}$ -transformaty	53
2.5. Związki między funkcją dyskretną a jej $\mathcal{L}$ -transformatą	58
2.6. Splot dyskretny	58
2.7. Odwrotna $\mathcal{L}$ -transformata	62
2.8. Operatorowa metoda rozwiązywania równań różnicowych	74
2.9. Uwagi bibliograficzne	79
3. Transformata Fouriera	80
3.1. Wzór całkowy Fouriera	80
3.2. Definicja transformaty Fouriera	86
3.3. Kosinusowa i sinusowa transformata Fouriera	88
3.4. Analiza widmowa funkcji	89
3.5. Własności transformaty Fouriera	96
3.6. Uwagi bibliograficzne	102
Dodatek	103
Bibliografia	109

Wstęp

Tematyka niniejszego skryptu obejmuje podstawowe wiadomości z zakresu szeroko rozumianego rachunku operatorowego niezbędnego dla studentów między innymi kierunków takich jak automatyka i robotyka (i kierunki pokrewne), elektrotechnika, mechatronika, matematyka stosowana, ale także i kierunków informatycznych lub mechanicznych. W rozdziale pierwszym omawiamy własności transformaty Laplace'a, jej wykorzystywanie do rozwiązywania równań różniczkowych i podajemy przykłady jej zastosowań w analizie układów mechanicznych i elektrycznych. Omawiamy też pojęcie spłotu funkcji. Rozdział drugi skupia się na $\mathcal{Z}$ -transformacji, nie pomijając też spłotu dyskretnego, i wybranych jej zastosowań. W rozdziale trzecim wprowadzamy pojęcie transformaty Fouriera, przy czym nie tylko omawiamy jej własności, lecz także wykorzystanie w analizie spektralnej funkcji, która z kolei jest wykorzystywana między innymi w analizie sygnałów i drgań. Omawiamy też transformatę sinusową i transformatę cosinusową Fouriera.

Przy wyborze tych zagadnień korzystaliśmy z doświadczeń zdobytych w trakcie prowadzenia zajęć dydaktycznych z zakresu matematyki, automatyki, teorii sterowania. Ze względu na to, że naszym celem było zaprezentowanie wyżej wymienionych transformat jako narzędzia wykorzystywanego w praktyce inżynierskiej, pominęliśmy dowody prezentowanych twierdzeń i własności, a główny nacisk położyliśmy na sposób ich zastosowań. Tak postawiony cel sprawił, że w skrypcie zamieściliśmy dużo przykładów z pełnymi rozwiązaniami, ale też zadań do samodzielnego rozwiązania, w większości opatrzonych odpowiedziami. Co więcej, każdy z rozdziałów Czytelnik może studiować niezależnie od pozostałych.

Bibliografia obejmuje pozycje, z których, poza własnymi notatkami powstałymi w ciągu kilkunastu lat prowadzenia zajęć dydaktycznych, korzystaliśmy w trakcie przygotowywania skryptu. Są to pozycje warte polecenia Czytelnikowi szerzej zainteresowanemu prezentowaną tematyką.

Korzystając z okazji, składamy serdeczne podziękowania naszym studentom, którzy swoimi uwagami, pytaniami, a także swoją postawą przyczynili się do odpowiedniego doboru przykładów i sposobu opisu ich rozwiązań. Chcemy też podziękować naszym Koleżankom i Kolegom, którzy nas wspierali i wspierają w naszej pracy dydaktycznej.

Autorzy

Rozdział 1

Transformata Laplace'a

Zanim przejdziemy do zdefiniowania transformaty Laplace'a, najpierw wprowadzimy niezbędne pojęcia oraz notację, ułatwiającą jej zrozumienie.

1.1. Oryginał. Funkcja Heaviside'a

Definicja 1.1. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zmiennej rzeczywistej t spełnia na przedziale $(a; b)$ warunki Dirichleta wtedy i tylko wtedy, gdy:

1. f jest funkcją przedziałami monotoniczną, tzn. przedział $(a; b)$ można podzielić na skończoną liczbę podprzedziałów takich, że wewnątrz każdego z nich f jest monotoniczna;
2. f jest funkcją ciągłą na przedziale $(a; b)$ z wyjątkiem skończonej liczby punktów nieciągłości pierwszego rodzaju, przy czym jeżeli t_0 jest takim punktem, to

$$f(t_0) = \frac{1}{2} (f(t_0^+) + f(t_0^-)); \quad (1.1)$$

3.

$$f(a) = f(b) = \frac{1}{2} (f(a^+) - f(b^-)). \quad (1.2)$$

Przykład 1.1.

a) Funkcją, która spełnia warunki Dirichleta w całej swojej dziedzinie, jest funkcja

$$\operatorname{sgn} t = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0, \\ 0 & \text{dla } t = 0, \\ -1 & \text{dla } t < 0. \end{cases}$$

Jak łatwo zauważyć, funkcja $\operatorname{sgn} t$ jest stała w przedziałach $(-\infty; 0)$ oraz $(0; +\infty)$. Punkt $t = 0$ jest punktem nieciągłości pierwszego rodzaju tej funkcji, gdyż $\lim_{t \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} t = -1 \neq \lim_{t \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} t = 1$.

b) Funkcją, która nie spełnia warunków Dirichleta, jest funkcja $f(t) = \operatorname{tg} t$, gdyż nie tylko nie jest funkcją ciągłą w punktach $t_k = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, ale też punkty te są punktami nieciągłości drugiego rodzaju.

Definicja 1.2. Oryginałem nazywamy funkcję $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zmiennej rzeczywistej t taką, że:

1. $f(t) \equiv 0$ dla $t < 0$;
2. funkcja f spełnia pierwszy i drugi warunek Dirichleta na każdym przedziale otwartym $(0; T)$ dla dowolnego $T > 0$, przy czym równość (1.1) nie jest istotna;
3. istnieją stałe M i ρ takie, że

$$|f(t)| \leq M e^{\rho t} \quad \text{dla każdego } t \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Definicja 1.3. Funkcją Heaviside'a (jedynką Heaviside'a, funkcją skoku jednostkowego) nazywamy funkcję zmiennej rzeczywistej t postaci:

$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ 1 & \text{dla } t \geq 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Przykład 1.2.

1. Funkcja Heaviside'a jest oryginałem. W warunku 3. definicji 1.2 możemy przyjąć $M = 1$ i $\rho = 0$.
2. Funkcja $f(t) = \cos t$ nie jest oryginałem, gdyż nie jest spełniony warunek 1. definicji 1.2, ale funkcja $g(t) = \cos t \mathbf{1}(t)$ jest już oryginałem. W warunku 3. definicji 1.2 możemy dla funkcji g przyjąć $M = 1$ i $\rho = 0$.
3. Funkcja $f(t) = e^{5t} \mathbf{1}(t)$ jest oryginałem (możemy przyjąć $M = 1$ i $\rho = 5$).

Z powyższych przykładów, ale i też z definicji 1.3 wynika, że funkcja f , która nie jest oryginałem, po pomnożeniu przez funkcję Heaviside'a staje się nim.

Uwaga 1.1. W dalszym ciągu będziemy pisać $f(t)$ zamiast $f(t)\mathbf{1}(t)$, o ile nie doprowadzi to do nieporozumień.

Zadania

Zadanie 1.1.

Zbadać, czy dana funkcja jest oryginałem:

- | | | |
|---|--|--|
| a) $f(t) = \sin 3t$; | b) $f(t) = \sin 3t \mathbf{1}(t)$; | c) $f(t) = e^{\sqrt{t}} \mathbf{1}(t)$; |
| d) $f(t) = \frac{1}{t^2} \mathbf{1}(t)$; | e) $f(t) = \ln(2t + 5) \mathbf{1}(t)$; | f) $f(t) = t \cos 5t \mathbf{1}(t)$; |
| g) $f(t) = t^3 e^{4t+1}$; | h) $f(t) = t^3 e^{4t+1} \mathbf{1}(t)$; | i) $f(t) = t^2 e^{t^3} \mathbf{1}(t)$. |

Jeżeli tak, podać wartości stałych M i ρ , dla których zachodzi nierówność (1.3).

Zadanie 1.2.

Narysować wykres funkcji:

a) $f(t) = \mathbf{1}(t - 2);$

c) $f(t) = \mathbf{1}(t - 2) - \mathbf{1}(t - 3) + 3\mathbf{1}(t - 5);$

e) $f(t) = (t - 1)(\mathbf{1}(t - 2) - \mathbf{1}(t - 3));$

g) $f(t) = (t - 3)^2 \mathbf{1}(t - 2);$

i) $f(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{1}\left(t - \frac{\pi}{2}\right).$

b) $f(t) = \mathbf{1}(t - 1) - 2\mathbf{1}(t - 3);$

d) $f(t) = (t - 1)\mathbf{1}(t - 1);$

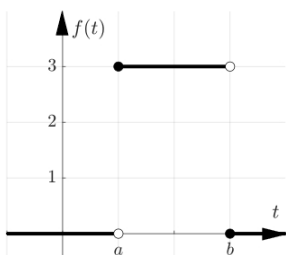
f) $f(t) = t^2 \mathbf{1}(t);$

h) $f(t) = \sin t \mathbf{1}\left(t - \frac{\pi}{2}\right);$

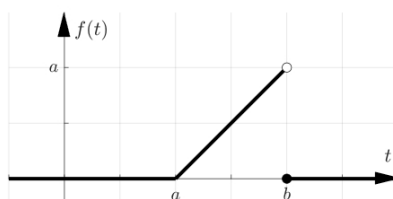
Zadanie 1.3.

Wykorzystując funkcję Heaviside'a, podać wzór analityczny funkcji przedstawionej na rysunku:

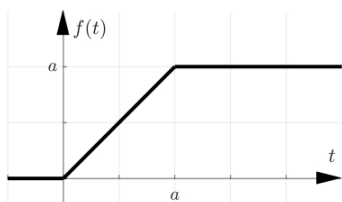
a)



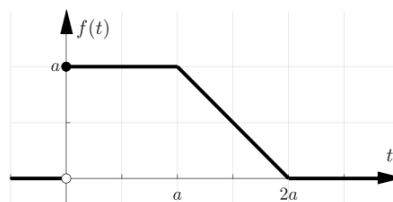
b)



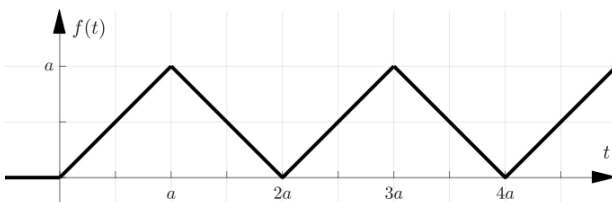
c)



d)



e)



Rysunek 1.1: Wykresy funkcji do zadania 1.3

Odpowiedzi:

1.1 a), d), g), i) – nie; pozostałe – tak.

- 1.3 a) $f(t) = \mathbf{1}(t-a) - \mathbf{1}(t-b)$; b) $f(t) = \left(\frac{a}{b-a}t - \frac{a^2}{b-a}\right) [\mathbf{1}(t-a) - \mathbf{1}(t-b)]$;
c) $f(t) = t\mathbf{1}(t) - (t-a)\mathbf{1}(t-a)$;
d) $f(t) = \mathbf{1}(t) + (-1-t+2a)\mathbf{1}(t-a) + (t-2a)\mathbf{1}(t-2a)$;
e) $f(t) = t\mathbf{1}(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (t-na)\mathbf{1}(t-na)$.

1.2. Definicja transformaty Laplace’a

Transformacja Laplace’a jest jednym z podstawowych odwzorowań, które możemy spotkać na przykład w elektrotechnice, automatyce, teorii sterowania. Umożliwia ona przekształcenie funkcji zmiennej rzeczywistej t w funkcję zmiennej zespolonej s , czyli w praktyce przekształcenie funkcji z dziedziny czasu w funkcję w dziedzinie częstotliwości. Transformata Laplace’a również znacznie upraszcza sposób rozwiązywania równań różniczkowych n -tego rzędu.

Definicja 1.4. Transformatą Laplace’a ($\mathcal{L}$ -transformatą) funkcji f zmiennej rzeczywistej t nazywamy funkcję zespoloną $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zmiennej zespolonej s postaci:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (1.5)$$

Przykład 1.3.

Korzystając z definicji 1.4, wyznaczyć $\mathcal{L}$ -transformatę funkcji $f(t) = \mathbf{1}(t)$.

Rozwiązanie:

Bezpośrednio z definicji 1.4 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\alpha} e^{-st} dt \right) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^{\alpha} \right) = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{s} (e^{-\alpha s} - 1) \right). \end{aligned}$$

Ponieważ s jest zmienną zespoloną, więc możemy przedstawić ją w postaci $s = x + jy$, gdzie $x = \operatorname{Re} s$, $y = \operatorname{Im} s$. Wówczas

$$e^{-\alpha s} = e^{-\alpha x} e^{-j\alpha y} = e^{-\alpha x} (\cos \alpha y + j \sin \alpha y).$$

Jeżeli $x > 0$, to $\lim_{a \rightarrow +\infty} |e^{-as}| = \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-ax} = 0$, więc wtedy także $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} e^{-\alpha s} = 0$. Wynika stąd, że

$$\mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \frac{1}{s} \quad \text{dla } \operatorname{Re} s > 0.$$

□

Przykład 1.4.

Korzystając z definicji 1.4, wyznaczyć $\mathcal{L}$ -transformatę funkcji $f(t) = e^{\omega t} \mathbf{1}(t)$, $\omega > 0$.

Rozwiązanie:

Bezpośrednio z definicji 1.4 otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] &= \int_0^{+\infty} e^{\omega t} e^{-st} dt = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\int_0^{\alpha} e^{(\omega-s)t} dt \right) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\left[\frac{1}{\omega-s} e^{(\omega-s)t} \right]_0^{\alpha} \right) = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\omega-s} (e^{(s-\omega)\alpha} - 1) \right). \end{aligned}$$

Stosując podobne rozumowanie jak w poprzednim przykładzie, otrzymujemy:

$$\mathcal{L}[e^{\omega t} \mathbf{1}(t)] = \frac{1}{s-\omega} \quad \text{dla } \operatorname{Re}(s-\omega) > 0.$$

□

Wyznaczanie transformaty Laplace'a na podstawie definicji jest stosowane przede wszystkim wtedy, gdy nie potrafimy jej obliczyć w żaden inny sposób. Transformaty funkcji, których transformaty Laplace'a wykorzystuje się najczęściej, są stabilizowane (patrz tabela B.1).

1.3. Własności transformaty Laplace'a

Poniżej podamy podstawowe, przydatne w praktyce inżynierskiej własności transformacji Laplace'a.

Twierdzenie 1.1 (o liniowości). *Jeżeli istnieją $\mathcal{L}[f(t)]$ i $\mathcal{L}[g(t)]$, to dla dowolnych stałych $a, b \in \mathbb{C}$*

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]. \quad (1.6)$$

Przykład 1.5.

Wyznaczyć $\mathcal{L}$ -transformatę funkcji:

a) $f(t) = 3e^{4t} + 5 \sin 2t - 6t^4$; b) $f(t) = \sin^2 \omega t$.

Rozwiązanie:

a) Korzystając z twierdzenia 1.1 o liniowości $\mathcal{L}$ -transformaty, otrzymujemy:

$$\mathcal{L}[f(t)] = 3\mathcal{L}[e^{4t}] + 5\mathcal{L}[\sin 2t] - 6\mathcal{L}[t^4],$$

następnie ze wzorów podstawowych (tabela B.1):

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{3}{s-4} + \frac{10}{s^2+4} - \frac{144}{s^5}.$$

b) I sposób

Zauważmy najpierw, że ze wzoru Eulera $\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$ wynika, że

$$\begin{aligned} \sin^2 \omega t &= \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j} \right)^2 = -\frac{1}{4} (e^{2j\omega t} - 2 + e^{-2j\omega t}) = \\ &= -\frac{1}{4} e^{2j\omega t} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{-2j\omega t}. \end{aligned}$$

Na podstawie twierdzenia 1.1 otrzymujemy:

$$\mathcal{L}[f(t)] = -\frac{1}{4} \mathcal{L}[e^{2j\omega t}] + \frac{1}{2} \mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] - \frac{1}{4} \mathcal{L}[e^{-2j\omega t}],$$

a następnie, stosując wzory podstawowe, mamy:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s-2j\omega} + \frac{1}{2s} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+2j\omega} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{2s}{s^2+4\omega^2} + \frac{1}{2s} = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+4\omega^2} + \frac{1}{2s} = \frac{2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}. \end{aligned}$$

II sposób

Ze wzoru trygonometrycznego $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ otrzymujemy:

$$\sin^2 \omega t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\omega t,$$

zatem

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{2} \mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] - \frac{1}{2} \mathcal{L}[\cos 2\omega t] = \frac{1}{2s} - \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s^2+4\omega^2} = \frac{2\omega^2}{s(s^2+4\omega^2)}.$$

□

Twierdzenie 1.2 (o skalowaniu). Jeżeli istnieje $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, to dla dowolnego $a > 0$

$$\mathcal{L}[f(at)\mathbf{1}(t)] = \frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right). \quad (1.7)$$

Twierdzenie 1.3 (o przesunięciu rzeczywistym; o przesunięciu w argumentie oryginału *). Jeżeli istnieje $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, to dla dowolnego $a > 0$

$$\mathcal{L}[f(t-a)\mathbf{1}(t-a)] = e^{-as}F(s). \quad (1.8)$$

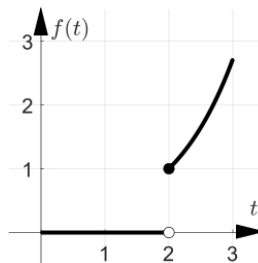
Przykład 1.6.

Wyznaczyć $\mathcal{L}$ -transformatę funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(t) &= e^{t-2}\mathbf{1}(t-2); & \text{b) } f(t) &= \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ 1 & \text{dla } 0 \leq t < 2, \\ e^{-(t-2)} & \text{dla } t \geq 2; \end{cases} \\ \text{c) } f(t) &= \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 1, \\ t-1 & \text{dla } 1 \leq t < 2, \\ 1 & \text{dla } t \geq 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Rozwiązanie:

- a) Wzór funkcji f określa przesunięcie wykresu funkcji $g(t) = e^t$ o dwie jednostki w prawo, przy czym funkcja $g(t-2) = e^{t-2}$ zostaje „włączona” przez jedynkę Heaviside’a w punkcie $t = 2$.



Rysunek 1.2: Wykres funkcji f do przykładu 1.6 a)

* W zastosowaniach inżynierskich twierdzenie to może być też nazwane *twierdzeniem o przesunięciu w dziedzinie czasu*.

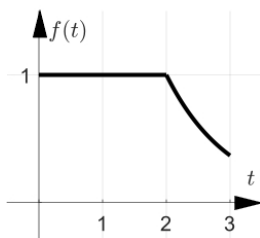
Ponieważ na mocy przykładu 1.4

$$G(s) = \mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[e^t] = \frac{1}{s-1},$$

więc z twierdzenia 1.3 mamy:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t-2)\mathbf{1}(t-2)] = e^{-2s}G(s) = \frac{e^{-2s}}{s-1}.$$

b) Niech $f_1(t) = 1$ dla $0 \leq t < 2$ oraz $f_2(t) = e^{-(t-2)}$ dla $t \geq 2$.



Rysunek 1.3: Wykres funkcji f do przykładu 1.6 b)

Funkcja f_1 zostaje „włączona” w chwili $t = 0$, a „wyłączona” w chwili $t = 2$. Możemy ten fakt zapisać za pomocą funkcji Heaviside’a, tzn.

$$f_1(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-2).$$

Podobnie

$$f_2(t) = e^{-(t-2)}\mathbf{1}(t-2).$$

Zatem

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-2) + e^{-(t-2)}\mathbf{1}(t-2).$$

Ponieważ

$$\mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \frac{1}{s}, \quad \mathcal{L}[\mathbf{1}(t-2)] = \frac{e^{-2s}}{s},$$

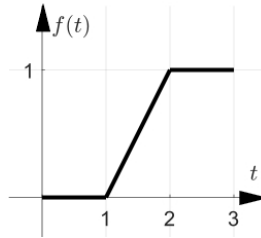
a z twierdzenia 1.3 wynika, że

$$\mathcal{L}[e^{-(t-2)}\mathbf{1}(t-2)] = \frac{e^{-2s}}{s+1},$$

więc, korzystając dodatkowo z twierdzenia 1.1, otrzymujemy:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s+1}.$$

- c) Podobnie jak w punkcie b), możemy rozpatrywać osobno funkcję $f_1(t) = t - 1$ dla $1 \leq t < 2$ oraz $f_2(t) = 1$ dla $t \geq 2$.



Rysunek 1.4: Wykres funkcji f do przykładu 1.6 c)

Możemy zapisać:

$$f_1(t) = (t - 1)\mathbf{1}(t - 1) - (t - 1)\mathbf{1}(t - 2)$$

oraz

$$f_2(t) = \mathbf{1}(t - 2).$$

Zatem

$$\begin{aligned} f(t) &= f_1(t) + f_2(t) = (t - 1)[\mathbf{1}(t - 1) - \mathbf{1}(t - 2)] + \mathbf{1}(t - 2) = \\ &= (t - 1)\mathbf{1}(t - 1) - (t - 2)\mathbf{1}(t - 2). \end{aligned}$$

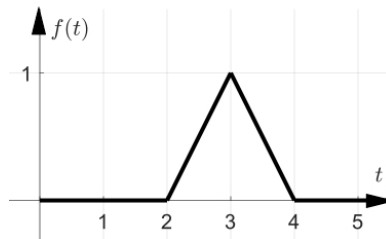
Stąd

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[(t - 1)\mathbf{1}(t - 1)] - \mathcal{L}[(t - 2)\mathbf{1}(t - 2)] = \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{e^{-2s}}{s^2}.$$

□

Przykład 1.7.

Wyznaczyć $\mathcal{L}$ -transformatę funkcji, której wykres jest przedstawiony poniżej.



Rysunek 1.5: Wykres funkcji f do przykładu 1.7

Rozwiązanie:

Na podstawie wykresu oraz znajomości funkcji liniowej możemy stwierdzić, że:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 2, \\ t-2 & \text{dla } 2 \leq t < 3, \\ -t+4 & \text{dla } 3 \leq t < 4, \\ 0 & \text{dla } t \geq 4. \end{cases}$$

Korzystając z własności funkcji Heaviside'a (1.3), funkcję f możemy zapisać jako:

$$f(t) = (t-2)[\mathbf{1}(t-2) - \mathbf{1}(t-3)] + (-t+4)[\mathbf{1}(t-3) - \mathbf{1}(t-4)].$$

Ponieważ

$$(t-2)\mathbf{1}(t-3) = (t-3+1)\mathbf{1}(t-3) = (t-3)\mathbf{1}(t-3) + \mathbf{1}(t-3)$$

i podobnie

$$(-t+4)\mathbf{1}(t-3) = -(t-4)\mathbf{1}(t-3) = -(t-3)\mathbf{1}(t-3) + \mathbf{1}(t-3)$$

oraz

$$(-t+4)\mathbf{1}(t-4) = -(t-4)\mathbf{1}(t-4),$$

więc

$$f(t) = (t-2)\mathbf{1}(t-2) - 2(t-3)\mathbf{1}(t-3) + (t-4)\mathbf{1}(t-4).$$

Mamy zatem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[(t-2)\mathbf{1}(t-2)] - 2\mathcal{L}[(t-3)\mathbf{1}(t-3)] + \mathcal{L}[(t-4)\mathbf{1}(t-4)] = \\ &= \frac{e^{-2s}}{s^2} - 2\frac{e^{-3s}}{s^2} + \frac{e^{-4s}}{s^2}. \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 1.4 (o przesunięciu zespolonym, o przesunięciu w argumencie obrazu[†]). Jeżeli istnieje $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, to dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}f(t)] = F(s+\alpha). \quad (1.9)$$

[†] W zastosowaniach inżynierskich twierdzenie to jest też nazwane *twierdzeniem o tłumieniu*.

Przykład 1.8.

Wyznaczyć $\mathcal{L}$ -transformatę funkcji:

a) $f(t) = e^{5t} \cos 4t$; b) $e^{2(t-1)} \sin 3(t-1) \mathbf{1}(t-1)$.

Rozwiązanie:

a) Niech $g(t) = \cos 4t$. Wtedy $G(s) = \frac{s}{s^2+16}$. Z twierdzenia 1.4 wynika, że

$$\mathcal{L} [e^{5t} \cos 4t] = G(s-5) = \frac{s-5}{(s-5)^2+16}.$$

b) Zastosujemy najpierw twierdzenie 1.3 (twierdzenie o przesunięciu rzeczywistym). Niech

$$g(t) = e^{2t} \sin 3t.$$

Wówczas

$$\mathcal{L} [f(t)] = \mathcal{L} [g(t-1) \mathbf{1}(t-1)] = e^{-s} G(s).$$

Ponieważ $\mathcal{L} [\sin 3t] = \frac{3}{s^2+9}$, a z twierdzenia 1.4

$$G(s) = \frac{3}{(s-2)^2+9},$$

zatem

$$\mathcal{L} [f(t)] = \frac{3e^{-s}}{(s-2)^2+9}.$$

□

Twierdzenie 1.5 (o transformacie funkcji okresowej). *Jeżeli funkcja f jest oryginałem i dla $t \in [0; \infty)$ jest funkcją okresową o okresie podstawowym $T > 0$, to*

$$\mathcal{L} [f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt. \quad (1.10)$$

Przykład 1.9.

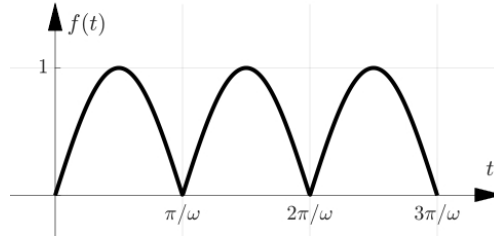
Wyznaczyć $\mathcal{L}$ -transformatę funkcji:

a) $f(t) = |\sin \omega t|$, gdzie ω jest ustaloną liczbą dodatnią;

b) $f(t) = \begin{cases} t - n & \text{dla } n \leq t < n+1, \ n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$

Rozwiązanie:

- a) Wykres funkcji $f(t) = |\sin \omega t|$ jest przedstawiony na poniższym rysunku. Jak łatwo zauważyć, funkcja f jest funkcją okresową o okresie podstawowym $T = \frac{\pi}{\omega}$.



Rysunek 1.6: Wykres funkcji f do przykładu 1.9 a)

Zatem mamy:

$$\int_0^T e^{-st} f(t) dt = \int_0^{\pi/\omega} e^{-st} \sin \omega t dt.$$

Po dwukrotnym całkowaniu przez części otrzymujemy:

$$\int e^{-st} \sin \omega t dt = -\frac{e^{-st} (\omega \cos \omega t + s \sin \omega t)}{\omega^2 + s^2}. \quad (1.11)$$

Podstawiając granice całkowania w całce 1.11, otrzymujemy:

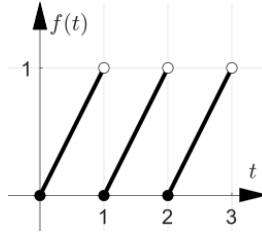
$$\int_0^{\pi/\omega} e^{-st} \sin \omega t dt = \left[-\frac{e^{-st} (\omega \cos \omega t + s \sin \omega t)}{\omega^2 + s^2} \right]_{t=0}^{\pi/\omega} = \frac{\omega (1 + e^{-\pi s/\omega})}{\omega^2 + s^2}.$$

Zatem z twierdzenia 1.5 wynika, że

$$\mathcal{L}[|\sin \omega t|] = \frac{1 + e^{-\pi s/\omega}}{1 - e^{-\pi s/\omega}} \cdot \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}.$$

- b) Ponieważ funkcja dana f jest funkcją okresową o okresie podstawowym $T = 1$, więc

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-st} f(t) dt &= \int_0^1 t e^{-st} dt = \left[-\frac{1}{s} t e^{-st} \right]_{t=0}^1 + \frac{1}{s} \int_0^1 e^{-st} dt = \\ &= -\frac{1}{s} e^{-s} - \frac{1}{s^2} (e^{-s} - 1). \end{aligned}$$



Rysunek 1.7: Wykres funkcji f do przykładu 1.9 b)

Zatem

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{1 - e^{-s}} \left(-\frac{1}{s} e^{-s} - \frac{1}{s^2} (e^{-s} - 1) \right).$$

□

Twierdzenie 1.6 (o pochodnej oryginału). Jeżeli:

1. istnieje $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$,
2. funkcje $f', f'', \dots, f^{(k-1)}$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ są oryginałami,
3. funkcja $f^{(k)}$ jest ciągła dla $t > 0$,

to istnieje transformata Laplace'a funkcji pochodnej $f^{(k)}$ oraz

$$\mathcal{L}[f^{(k)}(t)] = s^k F(s) - \sum_{j=1}^k s^{k-j} f^{(j-1)}(0+), \quad (1.12)$$

przy czym $f^{(k-j)}(0+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(k-j)}(t)$, a $f^{(i)} = \frac{d^i f}{dt^i}$, $i = 0, 1, \dots, k$.

Z twierdzenia 1.6 wynika, że jeżeli $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, to

1. $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0+)$,
2. $\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 F(s) - sf(0+) - f'(0+)$.

Jak można zauważyć, z (1.12) wynika

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \frac{\mathcal{L}[f^{(k)}(t)]}{s^k} + \sum_{j=1}^k s^{-j} f^{(j-1)}(0+). \quad (1.13)$$

Zależność (1.13) jest wykorzystywana do wyznaczania przybliżonych wartości transformaty Laplace'a. Przykłady zastosowań twierdzenia 1.6 szerzej zostaną omówione w rozdziale 1.8.

Twierdzenie 1.7 (o różniczkowaniu obrazu). Jeżeli istnieje $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, to dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$ zachodzi

$$\mathcal{L}\left[t^k f(t)\right] = (-1)^k \frac{d^k F(s)}{ds^k}. \quad (1.14)$$

Przykład 1.10.

Wyznaczyć $\mathcal{L}$ -transformatę funkcji $f(t) = t^2 \sin t$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $F(s) = \mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{s^2+1}$, więc

$$\mathcal{L}\left[t^2 \sin t\right] = (-1)^2 \frac{d^2 F(s)}{ds^2} = \frac{d^2}{ds^2} \left(\frac{1}{s^2+1} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{-2s}{(s^2+1)^2} \right) = 2 \frac{3s^2-1}{(s^2+1)^3}. \quad (1.15)$$

□

Twierdzenie 1.8 (o całkowaniu oryginału). Jeżeli istnieje $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, to

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}.$$

Przykład 1.11.

Wyznaczyć $\mathcal{L}$ -transformatę funkcji:

$$\text{a) } f(t) = \int_0^t \cos \tau d\tau; \quad \text{b) } f(t) = \int_0^t \tau^2 \sin \tau d\tau.$$

Rozwiązanie:

a) Korzystając bezpośrednio z twierdzenia 1.8, otrzymujemy:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \cos \tau d\tau\right] = \frac{\mathcal{L}[\cos t]}{s} = \frac{s}{(s^2+1)s}.$$

b) Z twierdzenia 1.8 oraz przykładu (1.10) wynika, że

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \tau^2 \sin \tau d\tau\right] = \frac{\mathcal{L}\left[t^2 \sin t\right]}{s} = 2 \frac{3s^2-1}{s(s^2+1)^3}.$$

□

Twierdzenie 1.9 (o całkowaniu obrazu). Jeżeli:

1. istnieje $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$,

2. istnieje granica $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t)}{t}$,

to

$$\mathcal{L} \left[\frac{f(t)}{t} \right] = \int_s^\infty \mathcal{L} [f(t)] ds.$$

Przykład 1.12.

Wyznaczyć $\mathcal{L}$ -transformatę funkcji:

a) $f(t) = \frac{\sin t}{t}$; b) $f(t) = \frac{e^{-t} \sin t}{t}$.

Rozwiązanie:

a) Korzystając bezpośrednio z twierdzenia 1.9 oraz definicji całki niewłaściwej pierwszego rodzaju, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{\sin t}{t} \right] &= \int_s^\infty \mathcal{L} [\sin t] ds = \int_s^\infty \frac{1}{s^2 + 1} ds = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_s^\alpha \frac{1}{s^2 + 1} ds = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} [\arctg s]_s^\alpha = \frac{\pi}{2} - \arctg s = \arctg \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

b) Ponieważ na mocy twierdzenia 1.4 mamy:

$$\mathcal{L} [e^{-t} \sin t] = \frac{1}{(s+1)^2 + 1},$$

więc

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[\frac{e^{-t} \sin t}{t} \right] &= \int_s^\infty \mathcal{L} [e^{-t} \sin t] ds = \int_s^\infty \frac{1}{(s+1)^2 + 1} ds = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_s^\alpha \frac{1}{(s+1)^2 + 1} ds = \frac{\pi}{2} - \arctg(s+1). \end{aligned}$$

□

1.4. Związki między oryginałami a transformatami

Związki między oryginałami a transformatami, zwane też twierdzeniami granicznymi, pozwalają na obliczanie wartości granicznych oryginałów i transformat. Między innymi z tego względu są często wykorzystywane w praktyce inżynierskiej.

Twierdzenie 1.10. Jeżeli:

1. funkcje f i f' są oryginałami,
2. $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$,
3. istnieje granica $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0+)$,

to

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0+).$$

Twierdzenie 1.11. Jeżeli:

1. funkcje f i f' są oryginałami,
2. $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$,
3. istnieje granica $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$,

to

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t).$$

Na podstawie twierdzenia 1.10 można wyznaczyć wartości początkowe oryginału f i jego pochodnych, tylko znając jego transformatę Laplace'a (czyli bez znajomości samego oryginału f).

Przykład 1.13.

Wiedząc, że transformatą Laplace'a oryginału $f(t)$ jest funkcja $G(s) = \frac{s(s-5)}{s^2-10s+41}$, wyznaczyć wartości początkowe $f(0+)$ i $f'(0+)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $G(s) = \frac{s(s-5)}{s^2-10s+41} = \frac{s(s-5)}{(s-5)^2+16}$, więc na podstawie twierdzenia o przesunięciu zespolonym (twierdzenie 1.4) oryginałem odpowiadającym funkcji $F(s) = \frac{s-5}{(s-5)^2+16}$ jest $f(t) = e^{5t} \cos 4t$ (patrz przykład 1.8 a)). Korzystając teraz z twierdzenia 1.10, otrzymujemy:

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty} \frac{s(s-5)}{s^2-10s+41} = \lim_{t \rightarrow 0^+} e^{5t} \cos 4t = 1 = f(0+).$$

Z twierdzenia 1.6 wiemy, że $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0+)$. Czyli

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \frac{s(s-5)}{s^2-10s+41} - 1 = \frac{5s-41}{s^2-10s+41}.$$

Oznaczmy $G_1(s) = \mathcal{L}[f'(t)]$ i przez $g_1(t)$ oryginał, którego $G_1(s)$ jest transformatą Laplace'a. Teraz

$$\lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty} sG_1(s) = \lim_{\operatorname{Re} s \rightarrow \infty} \frac{5s^2-41s}{s^2-10s+41} = 5 = g_1(0+),$$

a stąd

$$f'(0+) = g_1(0+) = 5.$$

□

Zadania

Zadanie 1.4.

Korzystając z twierdzenia o liniowości, wyznaczyć $\mathcal{L}$ -transformatę funkcji:

- | | |
|--|---|
| a) $f(t) = t^3 - 5 \sin 4t + 2e^{3t}$; | b) $f(t) = -3 + 2 \cos 5t + \sinh 2t$; |
| c) $f(t) = \mathbf{1}(t-2) - \cosh 4t$; | d) $f(t) = \sin^5 t$; |
| e) $f(t) = \cos^3 t$; | f) $f(t) = \sin 2t \cos 3t$; |
| g) $f(t) = \sin t \sin 5t$; | h) $f(t) = \cos 4t \cos 2t$; |
| i) $f(t) = \sinh^3 t$; | j) $f(t) = \cosh^4 t$; |
| k) $f(t) = \sinh 2t \cosh 5t$; | l) $f(t) = e^{3t} \sinh t$. |

Wskazówka: w podpunktach d) – h) należy zastosować odpowiednie wzory trygonometryczne lub wzory Eulera. W podpunktach i) – l) należy wykorzystać definicje funkcji hiperbolicznych.

Zadanie 1.5.

Korzystając z twierdzeń o przesunięciu rzeczywistym lub zespolonym, wyznaczyć $\mathcal{L}$ -transformatę funkcji:

- | | |
|---|--|
| a) $f(t) = (t-1)\mathbf{1}(t-1) - 3(t-2)\mathbf{1}(t-2)$; | b) $f(t) = t^2\mathbf{1}(t-1)$; |
| c) $f(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)\mathbf{1}\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$; | d) $f(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{3}\right)\mathbf{1}\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$; |
| e) $f(t) = e^{2t}\mathbf{1}(t-3)$; | f) $f(t) = \sinh(2t-3)\mathbf{1}(t-1)$; |
| g) $f(t) = e^{3t} \sin 2t$; | h) $f(t) = e^{-4t} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\mathbf{1}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$; |
| i) $f(t) = te^{-t}\mathbf{1}(t-1)$; | j) $f(t) = (t-2)^3 e^{t-2}\mathbf{1}(t-2)$; |
| k) $f(t) = (t-4)^2\mathbf{1}(t-3)$; | l) $f(t) = \sin\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)\mathbf{1}\left(t - \frac{\pi}{8}\right)$; |
| m) $f(t) = t^2 e^{-4t} \sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)\mathbf{1}\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$; | n) $f(t) = e^{-t} \cos\left(2t - \frac{\pi}{4}\right)\mathbf{1}\left(t - \frac{\pi}{8}\right)$. |

Zadanie 1.6.

Korzystając z twierdzenia o transformacji funkcji okresowej, wyznaczyć $\mathcal{L}$ -transformatę funkcji:

$$\text{a) } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n < t \leq n+1 \\ -1 & \text{dla } n+1 < t \leq n+2 \text{ lub } t < 0 \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{b) } f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{dla } 2n\pi < t \leq 2(n+1)\pi \\ 0 & \text{dla } 2(n+1)\pi < t \leq (2n+2)\pi \text{ lub } t < 0 \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{c) } f(t) = \begin{cases} A \sin \omega t & \text{dla } 0 < t \leq \frac{\pi}{\omega} \\ 0 & \text{dla } \frac{\pi}{\omega} < t \leq \frac{2\pi}{\omega} \text{ lub } t < 0 \end{cases}, \quad f(t) = f\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right), A > 0, \omega > 0.$$

Odpowiedzi:

$$\begin{aligned} \text{1.4 a) } & \frac{6}{s^4} - \frac{20}{s^2+16} + \frac{2}{s-3}; \text{ b) } -\frac{3}{s} + \frac{2s}{s^2+25} + \frac{2}{s^2-4}; \text{ c) } \frac{e^{-2s}}{s} - \frac{s}{s^2-16}; \text{ d) } \frac{120}{(s^2+1)(s^2+9)(s^2+25)}; \\ \text{e) } & \frac{s^3+7s}{(s^2+1)(s^2+9)}; \text{ f) } \frac{5}{2(s^2+25)} - \frac{1}{2(s^2+1)}; \text{ g) } \frac{s}{2(s^2+16)} - \frac{s}{2(s^2+36)}; \text{ h) } \frac{s}{2(s^2+4)} + \frac{s}{2(s^2+36)}; \\ \text{i) } & \frac{6}{(s^2-1)(s^2-9)}; \text{ j) } \frac{s^4-16s^2+24}{s(s^2-4)(s^2-16)}; \text{ k) } \frac{s-2}{2((s-2)^2-25)} - \frac{s+2}{2((s+2)^2-25)}; \text{ l) } \frac{1}{(s-3)^2-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{1.5 a) } & \frac{e^{-s}-3e^{-2s}}{s^2}; \text{ b) } \frac{e^{-s}(s^2+2s+2)}{s^3}; \text{ c) } \frac{e^{-\pi s/6}}{s^2+1}; \text{ d) } \frac{e^{-\pi s/6}(\sqrt{3}s+1)}{2(s^2+1)}; \text{ e) } \frac{e^{-3(s-2)}}{s-2}; \\ \text{f) } & \frac{e^{-(s+1)}}{s^2-4} + \frac{e^{-(s-1)}}{s^2-4} + \frac{se^{-(s+1)}}{2(s^2-4)} - \frac{se^{-(s-1)}}{2(s^2-4)}; \text{ g) } \frac{2}{s^2-6s+13}; \text{ h) } \frac{e^{-\pi(s+4)/4}(s+4)}{s^2+8s+17}; \text{ i) } \frac{e^{-(s+1)}(s+2)}{(s+1)^2}; \\ \text{j) } & \frac{6e^{-2s}}{(s-1)^4}; \text{ k) } \frac{e^{-3s}(s^2-2s+2)}{s^3}; \text{ l) } \frac{2e^{-\pi s/8}}{s^2+4}; \\ \text{m) } & \frac{e^{-\pi(s+4)/4}(96s+160\pi+104\pi s+40s\pi^2+24\pi s^2+2\pi s^3+50\pi^2+12s^2+13s^2\pi^2+2s^3\pi^2+1/8s^4\pi^2+176)}{(s^2+8s+20)^3}; \\ \text{n) } & \frac{e^{-\pi(s+1)/8}(s+1)}{s^2+2s+5}. \end{aligned}$$

$$\text{1.6 a) } \frac{e^s-1}{s(e^s+1)}; \text{ b) } \frac{e^{\pi s}}{(s^2+1)(e^{\pi s}-1)}; \text{ c) } \frac{A\omega e^{\pi s/\omega}}{(s^2+\omega^2)(e^{\pi s/\omega}-1)}.$$

1.5. Splot

Operacja splotu (mnożenia splotowego) funkcji jest pojęciem szeroko stosowanym w praktyce. W zależności od analizowanego problemu można spotkać splot jednostronny (omawiany poniżej) i splot dwustronny (omawiany w rozdziale 3).

Definicja 1.5. Niech f i g będą funkcjami określonymi i całkowalnymi na przedziale $[0, +\infty)$. **Splotem (jednostronnym) funkcji f i g , oznaczanym jako $f * g$, nazywamy funkcję $h : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ określoną jako**

$$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \quad (1.16)$$

Na podstawie powyższej definicji splotu łatwo można wykazać, że jeżeli tylko funkcje f, g, h są określone i całkowalne na przedziale $[0, +\infty)$, to splot jest operacją

1. przemianą, to znaczy $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$;
2. łączną, to znaczy $(f(t) * g(t)) * h(t) = f(t) * (g(t) * h(t))$;
3. rozdzielną względem dodawania, to znaczy $f(t) * (g(t) + h(t)) = f(t) * g(t) + f(t) * h(t)$;
4. jeżeli f i g są oryginałami, to funkcja

$$h(t) = f(t) * g(t) = \begin{cases} \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau & \text{dla } t \geq 0, \\ 0 & \text{dla } t < 0, \end{cases} \quad (1.17)$$

czyli splot funkcji będących oryginałami też jest oryginałem.

Przykład 1.14.

Wyznaczyć splot funkcji:

- a) $f(t) = \mathbf{1}(t)$ i $g(t) = e^t$;
- b) $f(t) = \sin t \mathbf{1}(t)$ i $g(t) = \mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t - \pi)$;
- c) $f(t) = t$ i $g(t) = \cos t$.

Rozwiązanie:

- a) Korzystając z definicji 1.5 oraz definicji całki niewłaściwej pierwszego rodzaju, otrzymujemy:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t \mathbf{1}(\tau)e^{t-\tau}d\tau = \int_0^t 1 \cdot e^{t-\tau}d\tau = [-e^{t-\tau}]_{\tau=0}^t = e^t - 1.$$

- b) Ponieważ funkcje f i g są oryginałami, więc na mocy (1.17), korzystając z definicji funkcji Heaviside'a, otrzymujemy:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t \sin \tau [\mathbf{1}(\tau) - \mathbf{1}(\tau - \pi)] d\tau =$$

$$= \begin{cases} \int_0^t \sin \tau d\tau & \text{dla } 0 < t \leq \pi, \\ \int_0^t \sin \tau d\tau + \int_0^{t-\pi} \sin \tau d\tau & \text{dla } t > \pi, \\ 0 & \text{dla } t < 0. \end{cases}$$

Zatem

$$f(t) * g(t) = \int_0^t \sin \tau [\mathbf{1}(\tau) - \mathbf{1}(\tau - \pi)] d\tau = \begin{cases} 1 - \cos t & \text{dla } 0 < t \leq \pi, \\ 2 & \text{dla } t > \pi, \\ 0 & \text{dla } t < 0. \end{cases}$$

c) Korzystając definicji 1.5 oraz ze wzoru na całkowanie przez części, otrzymujemy:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t \tau \cos(t - \tau) d\tau = [-\tau \sin(t - \tau) + \cos(t - \tau)]_{\tau=0}^t = 1 - \cos t.$$

□

Z powyższych przykładów, jak również z definicji funkcji Heaviside'a, wynika, że jeżeli tylko funkcja f jest określona i całkowalna na przedziale $[0, +\infty)$, to

$$\mathbf{1}(t) * f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau.$$

Twierdzenie 1.12 (twierdzenie Borela). *Jeżeli funkcje f i g są oryginałami, to istnieje transformata Laplace'a ich splotu, przy czym*

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \mathcal{L}[f(t)] \cdot \mathcal{L}[g(t)].$$

Przykład 1.15.

Korzystając z twierdzenia Borela, wyznaczyć transformatę Laplace'a:

a) splotu funkcji $f(t) = e^{-t} \sin t$ i $g(t) = t^2$;

b) $h(t) = \int_0^t \tau^2 \sin^2(t - \tau) d\tau$.

Rozwiązanie:

a) Na mocy twierdzenia Borela mamy:

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = \mathcal{L}[(e^{-t} \sin t) * t^2] = \mathcal{L}[e^{-t} \sin t] \cdot \mathcal{L}[t^2].$$

Ponieważ z twierdzenia 1.4 wynika, że $\mathcal{L}[e^{-t} \sin t] = \frac{1}{(s+1)^2 + 1} = \frac{1}{s^2 + 2s + 2}$, a ze wzorów podstawowych (tabela B.1), że $\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}$, więc

$$\mathcal{L}[(e^{-t} \sin t) * t^2] = \frac{2}{s^3(s^2 + 2s + 2)}.$$

b) Najpierw zauważmy, że z definicji 1.5 splotu funkcji wynika, że

$$h(t) = \int_0^t \tau^2 \sin^2(t - \tau) d\tau = t^2 * \sin^2 t.$$

Zatem z twierdzenia Borela otrzymujemy:

$$\mathcal{L}[h(t)] = \mathcal{L}\left[\int_0^t \tau^2 \sin^2(t - \tau) d\tau\right] = \mathcal{L}[t^2 * \sin^2 t] = \mathcal{L}[t^2] \cdot \mathcal{L}[\sin^2 t].$$

Ponieważ $\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}$ oraz $\mathcal{L}[\sin^2 t] = \frac{2}{s(s^2 + 4)}$ (patrz przykład 1.5 b), więc

$$\mathcal{L}[h(t)] = \frac{4}{s^4(s^2 + 4)}.$$

□

1.6. Uwagi o pseudofunkcji δ -Diraca

Ze względu zarówno na ciekawe własności, jak i na zastosowania (szczególnie w elektronice, fizyce kwantowej, mechanice, ale nie tylko), mówiąc o transformacie Laplace'a, nie można nie wspomnieć o pseudofunkcji δ -Diraca (delta Diraca). Tutaj skupimy się tylko na jej intuicyjnym pojęciu i podstawowych własnościach, więcej szczegółów można znaleźć na przykład w [12, 22].

Pseudofunkcję δ -Diraca można określić w następujący sposób:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } t \neq 0, \\ +\infty, & \text{gdy } t = 0 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (1.18)$$

Pseudofunkcja δ -Diraca jest modelem nieskończenie wąskiego impulsu występującego w chwili $t = 0$ o nieskończenie dużej amplitudzie i polu jednostkowym. Może to być na przykład bardzo krótki impuls przenoszący jednostkowy ładunek elektryczny.

Bezpośrednio z (1.18) wynika, że

1. $\delta(-t) = \delta(t)$;
2. $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$;

3. $\int_{-t}^t k\delta(\tau) d\tau = k$;
4. $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$;
5. $f(t)*\delta(t) = f(t)$ dla dowolnej funkcji ciągłej f .

Z definicji funkcji Heaviside'a oraz z określenia pseudofunkcji δ -Diraca wynika

$$\frac{d}{dt}\mathbf{1}(t) = \delta(t) \quad \text{oraz} \quad \int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \mathbf{1}(t).$$

Ponadto

1. $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$;
2. $\mathcal{L}[\delta(t-t_0)] = e^{-st_0}$ dla $t_0 \geq 0$;
3. $\mathcal{L}\left[\int_{-t}^t \delta(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s}$.

Twierdzenie 1.13 (o filtrowaniu). *Jeżeli $f(t)$ jest funkcją ciągłą w zbiorze $\mathbb{R}$, to dla każdego $t_0 \in \mathbb{R}$ zachodzi*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0) dt = f(t_0).$$

Zadania

Zadanie 1.7.

Wyznaczyć spłot funkcji:

$$\text{a) } f(t) = \mathbf{1}(t) \text{ i } g(t) = \mathbf{1}(t); \quad \text{b) } f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \text{ i } g(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}; \quad \text{c) } f(t) = t \text{ i } g(t) = \delta(t).$$

Zadanie 1.8.

Na podstawie twierdzenia Borela wyznaczyć transformatę Laplace'a spłotu funkcji:

- a) $f(t) = \mathbf{1}(t-1)$, $g(t) = \delta(t+1)$, $h(t) = e^{t-1}$;
- b) $f(t) = e^{-2t}$, $g(t) = t^2 + t$, $h(t) = -t^2$;
- c) $f(t) = e^{-t}$, $g(t) = t$, $h(t) = e^{-t}t^2$;
- d) $f(t) = e^{-t} \sin t$, $g(t) = te^{-3t}$.

Odpowiedzi:

1.7 a) t ; b) π ; c) t .

1.8 a) $\frac{1}{e} \frac{1}{s^2 - s}$; b) $-\frac{2}{s^6}$; c) $\frac{2}{s^2(s+1)^4}$; d) $\frac{1}{(s^2+2s+2)(s+3)^2}$.

1.7. Odwrotna transformata Laplace'a

W wielu zagadnieniach praktycznych, zwłaszcza związanych z koniecznością rozwiązywania równań różniczkowych, istnieje potrzeba wyznaczenia oryginału na podstawie znajomości jego transformaty Laplace'a $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$. Mamy wtedy do czynienia z zagadnieniem odwrotnym do problemu rozważanego dotychczas, czyli z koniecznością rozwiązania równania

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s),$$

tzn. równania

$$\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = F(s), \quad (1.19)$$

gdzie $s \in \mathbb{C}$. Funkcję f zmiennej rzeczywistej t , dla której istnieje rozwiązanie równania (1.19), nazywamy odwrotną transformatą Laplace'a ($\mathcal{L}^{-1}$ -transformatą).

Przyjmujemy oznaczenie

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t). \quad (1.20)$$

Najczęściej do wyznaczenia $\mathcal{L}^{-1}$ -transformaty można wykorzystać metody, które przedstawimy w następnym podrozdziale. Niektóre z tych metod wykorzystują pojęcia z zakresu analizy zespolonej, takie jak: funkcja holomorficzna, bieguny funkcji, residuum. Odpowiednie wyjaśnienia dotyczące tych pojęć zamieszczamy w Dodatku na końcu skryptu.

Zauważmy, że z twierdzeń (1.1), (1.3), (1.4) wynikają następujące własności.

Jeżeli f i g są oryginałami, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, $\mathcal{L}[g(t)] = G(s)$, a i b są dowolnymi stałymi, to:

$$\mathcal{L}^{-1}[aF(s) + bG(s)] = a\mathcal{L}^{-1}[F(s)] + b\mathcal{L}^{-1}[G(s)], \quad (1.21)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] = f(t-a)\mathbf{1}(t-a), \quad (1.22)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s+a)] = e^{-at}f(t). \quad (1.23)$$

1.7.1. Metody wyznaczania transformaty odwrotnej

A. Rozkład na ułamki proste

Jeżeli obraz funkcji f jest funkcją wymierną właściwą, tzn.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)},$$

gdzie P i Q są wielomianami zmiennej s , przy czym stopień P jest mniejszy od stopnia Q , to możemy przedstawić funkcję F jako sumę ułamków prostych. Ze wzorów zamieszczonych w tabeli B.1 i ze wzoru (1.21) wynika sposób wyznaczania transformaty odwrotnej w takim przypadku.

Przykład 1.16.

Wyznaczyć odwrotną transformatę Laplace'a funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a) } F(s) &= \frac{5s-7}{(s-3)(s+1)}; & \text{b) } F(s) &= \frac{1}{(2s+3)^3(s+1)}; & \text{c) } F(s) &= \frac{2s^2-s+11}{(s-1)(s^2+5)}; \\ \text{d) } F(s) &= \frac{3s+2}{s^2+2s+10}; & \text{e) } F(s) &= \frac{1}{(s^2+4)^2}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie:

a) Rozkładamy funkcję F na ułamki proste:

$$F(s) = \frac{5s-7}{(s-3)(s+1)} = \frac{2}{s-3} + \frac{3}{s+1}.$$

Stąd

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] + 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = 2e^{3t} + 3e^{-t}.$$

b) Po rozkładzie funkcji F na ułamki proste otrzymujemy:

$$F(s) = \frac{1}{(2s+3)^3(s+1)} = -\frac{2}{2s+3} - \frac{2}{(2s+3)^2} - \frac{2}{(2s+3)^3} + \frac{1}{s+1},$$

zatem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+3/2}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3/2)^2}\right] - \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3/2)^3}\right] + \\ &+ \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] = -e^{-\frac{3}{2}t} - \frac{1}{2}te^{-\frac{3}{2}t} - \frac{1}{8}t^2e^{-\frac{3}{2}t} + e^{-t}. \end{aligned}$$

c) Otrzymujemy:

$$F(s) = \frac{2s^2 - s + 11}{(s-1)(s^2+5)} = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{s^2+5},$$

czyli

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+5}\right] = \\ &= 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \frac{\sqrt{5}}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{5}}{s^2+5}\right] = 2e^t - \frac{\sqrt{5}}{5}\sin\sqrt{5}t.\end{aligned}$$

d) Mamy w tym przypadku do czynienia z ułamkiem prostym drugiego rodzaju. Przedstawiamy trójmian kwadratowy w mianowniku funkcji F w postaci kanonicznej, zatem:

$$F(s) = \frac{3s+2}{s^2+2s+10} = \frac{3(s+1)}{(s+1)^2+9} - \frac{1}{3} \frac{3}{(s+1)^2+9}.$$

Korzystając ze wzoru (1.23), obliczamy:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+1}{(s+1)^2+9}\right] - \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s+1)^2+9}\right] = \\ &= e^{-t}\cos 3t - \frac{1}{3}e^{-t}\sin 3t.\end{aligned}$$

e) Dotychczas rozkład funkcji wymiernej przeprowadzaliśmy w dziedzinie rzeczywistej. Teraz dokonamy rozkładu funkcji F w dziedzinie zespolonej, co wprawdzie jest bardziej pracochłonne, ale pozwala na wyznaczenie transformaty odwrotnej w łatwy sposób w przypadku, gdy w mianowniku funkcji F występuje nierozkładalny w dziedzinie rzeczywistej trójmian kwadratowy. Ponieważ $s^2+4 = (s+2j)(s-2j)$, zatem

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+4)^2} = \frac{j}{32} \frac{1}{s+2j} - \frac{1}{16} \frac{1}{(s+2j)^2} - \frac{j}{32} \frac{1}{s-2j} - \frac{1}{16} \frac{1}{(s-2j)^2}.$$

Otrzymujemy więc:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \frac{j}{32}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2j}\right] - \frac{1}{16}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2j)^2}\right] - \\ &\quad - \frac{j}{32}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2j}\right] - \frac{1}{16}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-2j)^2}\right] =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{j}{32} (e^{-2jt} - e^{2jt}) - \frac{1}{16} (te^{-2jt} + te^{2jt}) = \\
&= \frac{1}{16} \frac{e^{2jt} - e^{-2jt}}{2j} - \frac{1}{8} t \frac{e^{2jt} + e^{-2jt}}{2}.
\end{aligned}$$

Ostatecznie ze wzorów Eulera:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{16} \sin 2t - \frac{1}{8} t \cos 2t.$$

□

B. Twierdzenie Heaviside'a o rozkładzie

W szczególnym przypadku można przy wyznaczaniu transformaty odwrotnej skorzystać z poniższego twierdzenia.

Twierdzenie 1.14 (Heaviside'a o rozkładzie). *Jeżeli jednocześnie:*

1. *F jest funkcją wymierną właściwą, tzn. $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$, gdzie P i Q są wielomianami zmiennej zespolonej, przy czym stopień wielomianu P jest mniejszy od stopnia Q ,*
2. *F ma tylko bieguny jednokrotne[‡] $s_1, \dots, s_n$,*
3. *wielomiany P i Q są nieskracalne,*

to

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^n \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k t}.$$

Przykład 1.17.

Wyznaczyć odwrotną transformatę Laplace'a funkcji:

$$\begin{aligned}
\text{a) } F(s) &= \frac{5s-7}{(s-3)(s+1)}; & \text{b) } F(s) &= \frac{s^2+2s-3}{(s-1)^2(s-2)}; & \text{c) } F(s) &= \frac{s^2-4}{s^3-s}; \\
\text{d) } F(s) &= \frac{s}{(s^2+1)(s^2+4)}.
\end{aligned}$$

Rozwiązanie:

- a) Zauważmy, że funkcja F ma identyczną postać, jak w przykładzie 1.16 a). Spełnione są założenia twierdzenia Heaviside'a. Ponieważ $Q(s) = s^2 - 2s - 3$, więc $Q'(s) = 2s - 2$. Pierwiastki mianownika to $s_1 = -1$ i $s_2 = 3$, zatem

$$P(s_1) = P(-1) = -12 \quad \text{oraz} \quad P(s_2) = P(3) = 8,$$

[‡] Patrz Dodatek.

$$Q'(s_1) = Q'(-1) = -4 \quad \text{oraz} \quad Q'(s_2) = Q'(3) = 4,$$

a stąd

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{P(s_1)}{Q'(s_1)}e^{s_1 t} + \frac{P(s_2)}{Q'(s_2)}e^{s_2 t} = 3e^{-t} + 2e^{3t}.$$

- b) Mianownik funkcji F ma dwukrotny pierwiastek $s_1 = 1$, ale jest jednocześnie pierwiastek licznika, zatem po skróceniu przez $s - 1$ otrzymamy:

$$F(s) = \frac{s+3}{(s-1)(s-2)}.$$

Teraz możemy już zastosować twierdzenie Heaviside'a. Przyjmiemy oznaczenia $P(s) = s+3$ i $Q(s) = (s-1)(s-2) = s^2 - 3s + 2$. Wtedy oczywiście $Q'(s) = 2s - 3$, zatem

$$\begin{aligned} P(s_1) &= P(1) = 4 & \text{oraz} & & P(s_2) &= P(2) = 5, \\ Q'(s_1) &= Q'(1) = -1 & \text{oraz} & & Q'(s_2) &= Q'(3) = 1. \end{aligned}$$

Stąd

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{P(s_1)}{Q'(s_1)}e^{s_1 t} + \frac{P(s_2)}{Q'(s_2)}e^{s_2 t} = -4e^t + 5e^{2t}.$$

- c) Mamy $P(s) = s^2 - 4$, $Q(s) = s(s-1)(s+1) = s^3 - s$, $Q'(s) = 3s^2 - 1$. Pierwiastki mianownika to $s_1 = -1, s_2 = 0, s_3 = 1$, więc

$$\begin{aligned} P(s_1) &= P(s_3) = P(\pm 1) = -3 & \text{oraz} & & P(s_2) &= P(0) = -4, \\ Q'(s_1) &= Q'(s_3) = Q'(\pm 1) = 2 & \text{oraz} & & Q'(s_2) &= Q'(0) = -1. \end{aligned}$$

Otrzymujemy:

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{P(s_1)}{Q'(s_1)}e^{s_1 t} + \frac{P(s_2)}{Q'(s_2)}e^{s_2 t} + \frac{P(s_3)}{Q'(s_3)}e^{s_3 t} = -\frac{3}{2}e^{-t} + 4 - \frac{3}{2}e^t.$$

- d) W tym przypadku mianownik ma wyłącznie jednokrotne pierwiastki zespolone $s_1 = -j, s_2 = j, s_3 = -2j$ i $s_4 = 2j$, bo $Q(s) = (s+j)(s-j)(s+2j)(s-2j)$. Ponieważ $P(s) = s$, $Q(s) = (s^2+1)(s^2+4) = s^4+5s^2+4$, $Q'(s) = 4s^3+10s$, więc:

$$\begin{aligned} Q'(s_1) &= Q'(-j) = -6j, & Q'(s_2) &= Q'(j) = 6j, \\ Q'(s_3) &= Q'(-2j) = 12j, & Q'(s_4) &= Q'(2j) = -12j. \end{aligned}$$

Stąd

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{k=1}^4 \frac{P(s_k)}{Q'(s_k)} e^{s_k t} = \frac{1}{6} e^{-jt} + \frac{1}{6} e^{jt} - \frac{1}{6} e^{-2jt} - \frac{1}{6} e^{2jt}.$$

Ze wzoru Eulera

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{3} \cos t - \frac{1}{3} \cos 2t.$$

□

C. Zastosowanie twierdzenia Borela o splocie

Jeżeli funkcja F może być przedstawiona jako iloczyn pewnych funkcji G i H , tzn. $F(s) = G(s)H(s)$, przy czym potrafimy wyznaczyć $\mathcal{L}^{-1}[G(s)]$ i $\mathcal{L}^{-1}[H(s)]$, to do wyznaczenia odwrotnej transformaty Laplace'a funkcji F możemy zastosować twierdzenie Borela 1.12, z którego wynika, że

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)H(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] * \mathcal{L}^{-1}[H(s)]. \quad (1.24)$$

Przykład 1.18.

Wyznaczyć odwrotną transformatę Laplace'a funkcji:

$$\text{a) } F(s) = \frac{1}{(s+5)^2}; \quad \text{b) } F(s) = \frac{2s+3}{(s^2+3)(s-1)}; \quad \text{c) } F(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)(s^2+4)}.$$

Rozwiązanie:

a) Możemy przyjąć $G(s) = H(s) = \frac{1}{s+5}$, zatem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+5} \cdot \frac{1}{s+5}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+5}\right] * \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+5}\right] = \\ &= e^{-5t} * e^{-5t} = \int_0^t e^{-5\tau} e^{-5(t-\tau)} d\tau = \int_0^t e^{-5t} d\tau = \\ &= e^{-5t} \int_0^t d\tau = te^{-5t}. \end{aligned}$$

W tym przykładzie można też skorzystać bezpośrednio z odpowiedniego wzoru w tabeli B.1.

b) Przyjmiemy $G(s) = \frac{2s+3}{s^2+3}$ i $H(s) = \frac{1}{s-1}$. Ponieważ

$$G(s) = 2 \frac{s}{s^2+3} + \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{s^2+3},$$

więc

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s)] = 2 \cos \sqrt{3}t + \sqrt{3} \sin \sqrt{3}t,$$

zatem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= [2 \cos \sqrt{3}t + \sqrt{3} \sin \sqrt{3}t] * e^t = \\ &= \int_0^t e^{t-\tau} [2 \cos \sqrt{3}\tau + \sqrt{3} \sin \sqrt{3}\tau] d\tau = \\ &= e^t \int_0^t e^{-\tau} [2 \cos \sqrt{3}\tau + \sqrt{3} \sin \sqrt{3}\tau] d\tau = \\ &= e^t \left[2 \int_0^t e^{-\tau} \cos \sqrt{3}\tau d\tau + \sqrt{3} \int_0^t e^{-\tau} \sin \sqrt{3}\tau d\tau \right]. \end{aligned}$$

Całkując dwukrotnie przez części, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\tau} \cos \sqrt{3}\tau d\tau &= \frac{1}{4} \left[e^{-\tau} (-\cos \sqrt{3}\tau + \sqrt{3} \sin \sqrt{3}\tau) \right]_0^t = \\ &= \frac{1}{4} \left(e^{-t} (-\cos \sqrt{3}t + \sqrt{3} \sin \sqrt{3}t) + 1 \right) \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\tau} \sin \sqrt{3}\tau d\tau &= \frac{1}{4} \left[e^{-\tau} (-\sqrt{3} \cos \sqrt{3}\tau - \sin \sqrt{3}\tau) \right]_0^t = \\ &= \frac{1}{4} \left(e^{-t} (-\sqrt{3} \cos \sqrt{3}t - \sin \sqrt{3}t) + \sqrt{3} \right). \end{aligned}$$

Stąd

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{4} (-5 \cos \sqrt{3}t + \sqrt{3} \sin \sqrt{3}t + 5e^t).$$

c) Weźmy $G(s) = \frac{s}{s^2+1}$ i $H(s) = \frac{s}{s^2+4}$. Mamy:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2+1} \right] * \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2+4} \right] = \\ &= \cos t * \cos 2t = \int_0^t \cos \tau \cos 2(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ze wzoru trygonometrycznego $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \frac{1}{2} \int_0^t (\cos(2t - \tau) + \cos(3\tau - 2t)) d\tau = \\ &= \left[-\frac{1}{2} \sin(2t - \tau) + \frac{1}{6} \sin(3\tau - 2t) \right]_0^t = \frac{2}{3} \sin 2t - \frac{1}{3} \sin t. \quad \square \end{aligned}$$

D. Zastosowanie twierdzenia Cauchy'ego o residuach

Z twierdzenia Cauchy'ego o residuach [10, 22] wynika ogólniejszy sposób wyznaczania odwrotnej transformaty Laplace'a. Odpowiednie twierdzenie ma w tym przypadku postać:

Twierdzenie 1.15. *Jeżeli funkcja F jest holomorficzna[§] na całej płaszczyźnie zespolonej z wyjątkiem punktów $s_1, \dots, s_n$, które są biegunami[§] tej funkcji, to oryginał f funkcji F dany jest wzorem*

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{s=s_k} [F(s)e^{st}] \quad \text{dla } t > 0, \quad (1.25)$$

gdzie $\operatorname{res}_{s=s_k} G(s)$ jest residuum[§] funkcji $G(s) = F(s)e^{st}$.

Uwaga 1.2.

1. Jeżeli s_k jest biegunem[§] jednokrotnym funkcji G , to

$$\operatorname{res}_{s=s_k} G(s) = \lim_{s \rightarrow s_k} [(s - s_k)G(s)].$$

2. Jeżeli s_k jest biegunem[§] p -krotnym funkcji G , to

$$\operatorname{res}_{s=s_k} G(s) = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{s \rightarrow s_k} \frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}} [(s - s_k)^p G(s)].$$

3. Jeżeli F jest funkcją wymierną właściwą o współczynnikach rzeczywistych i s_k jest jej biegunem, to $\bar{s}_k$ jest także jej biegunem. Ponadto

$$\operatorname{res}_{s=s_k} [F(s)e^{st}] + \operatorname{res}_{s=\bar{s}_k} [F(s)e^{st}] = 2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{res}_{s=s_k} [F(s)e^{st}] \right].$$

W zastosowaniach praktycznych często funkcja F spełnia założenia ostatniego punktu powyższej uwagi. Wówczas ostatni wzór pozwala na uproszczenie rachunków.

Przykład 1.19.

Wyznaczyć odwrotną transformatę Laplace'a funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a) } F(s) &= \frac{5s-7}{(s-3)(s+1)}; & \text{b) } F(s) &= \frac{s^2}{(s^2+1)(s^2+4)}; & \text{c) } F(s) &= \frac{3s+2}{s^2+2s+10}; \\ \text{d) } F(s) &= \frac{s^5}{(s^2+1)^3}. \end{aligned}$$

[§] Patrz Dodatek.

Rozwiązanie:

Odwrotna transformata Laplace'a z punktu a) została już obliczona na podstawie twierdzenia Heaviside'a, transformata z punktu b) – przy wykorzystaniu twierdzenia Borela, a transformata z punktu c) – za pomocą rozkładu funkcji F na ułamki proste. Wyznamy je ponownie, stosując twierdzenie Cauchy'ego. Dzięki temu będziemy mogli porównać efektywność poszczególnych metod.

a) Funkcja F ma dwa bieguny jednokrotne $s_1 = -1$ i $s_2 = 3$, zatem

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F(s)] &= \operatorname{res}_{s=-1} [F(s)e^{st}] + \operatorname{res}_{s=3} [F(s)e^{st}] = \\&= \lim_{s \rightarrow -1} [(s+1)F(s)e^{st}] + \lim_{s \rightarrow 3} [(s-3)F(s)e^{st}] = \\&= \lim_{s \rightarrow -1} \left[\frac{5s-7}{s-3} e^{st} \right] + \lim_{s \rightarrow 3} \left[\frac{5s-7}{s+1} e^{st} \right] = \\&= 3e^{-t} + 2e^{3t}.\end{aligned}$$

b) Funkcja F ma bieguny jednokrotne wzajemnie sprzężone $s_1 = -j, s_2 = j$ oraz $s_3 = -2j, s_4 = 2j$, więc

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2\operatorname{Re} \left[\operatorname{res}_{s=j} [F(s)e^{st}] \right] + 2\operatorname{Re} \left[\operatorname{res}_{s=2j} [F(s)e^{st}] \right].$$

Ponieważ

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{s=j} [F(s)e^{st}] &= \lim_{s \rightarrow j} (s-j)F(s)e^{st} = \lim_{s \rightarrow j} \frac{s^2}{(s+j)(s^2+4)} e^{st} = \\&= -\frac{1}{6j} e^{jt} = \frac{j}{6} (\cos t + j \sin t) = -\frac{1}{6} \sin t + \frac{j}{6} \cos t\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{s=2j} [F(s)e^{st}] &= \lim_{s \rightarrow 2j} (s-2j)F(s)e^{st} = \lim_{s \rightarrow 2j} \frac{s^2}{(s^2+1)(s+2j)} e^{st} = \\&= \frac{4}{12j} e^{2jt} = -\frac{j}{3} (\cos 2t + j \sin 2t) = \frac{1}{3} \sin 2t - \frac{j}{3} \cos 2t,\end{aligned}$$

zatem

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = -\frac{1}{3} \sin t + \frac{2}{3} \sin 2t.$$

c) Funkcja F ma bieguny jednokrotne wzajemnie sprzężone $s_1 = -1-3j$ i $s_2 = -1+3j$, więc

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2\operatorname{Re} \left[\operatorname{res}_{s=-1+3j} [F(s)e^{st}] \right].$$

Ponieważ

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{s=-1+3j} [F(s)e^{st}] &= \lim_{s \rightarrow -1+3j} (s+1-3j)F(s)e^{st} = \lim_{s \rightarrow -1+3j} \frac{3s+2}{s+1+3j} e^{st} = \\ &= \frac{-1+9j}{6j} e^{(-1+3j)t} = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{6}j\right) e^{-t} (\cos 3t + j \sin 3t) = \\ &= \left(\frac{3}{2} \cos 3t - \frac{1}{6} \sin 3t\right) e^{-t} + j \left(\frac{1}{6} \cos 3t + \frac{3}{2} \sin 3t\right) e^{-t},\end{aligned}$$

zatem

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \left(3 \cos 3t - \frac{1}{3} \sin 3t\right) e^{-t}.$$

d) Funkcja F ma bieguny trzykrotne wzajemnie sprzężone $s_1 = -j$ i $s_2 = j$, więc

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = 2 \operatorname{Re} \left[\operatorname{res}_{s=j} [F(s)e^{st}] \right].$$

Ponieważ

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{s=j} [F(s)e^{st}] &= \frac{1}{2!} \lim_{s \rightarrow j} \frac{d^2}{ds^2} [(s-j)^3 F(s)e^{st}] = \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow j} \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{s^5}{(s+j)^3} e^{st} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow j} \frac{d}{ds} \left[\left(\frac{-3s^5}{(s+j)^4} + \frac{s^5 t + 5s^4}{(s+j)^3} \right) e^{st} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{s \rightarrow j} \left[\left(\frac{12s^5}{(s+j)^5} - \frac{6s^5 t + 30s^4}{(s+j)^4} + t^2 \frac{s^5 t^2 + 10s^4 t + 20s^3}{(s+j)^3} \right) e^{st} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{7}{8}jt - \frac{1}{8}t^2 \right) e^{jt} = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{8}t^2 \right) \cos t - \frac{7}{8}t \sin t + j \left(\frac{7}{8}t \cos t + \left(1 - \frac{1}{8}t^2 \right) \sin t \right) \right],\end{aligned}$$

zatem

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \left(1 - \frac{1}{8}t^2 \right) \cos t - \frac{7}{8}t \sin t.$$

□

Zadania

Zadanie 1.9.

Stosując rozkład na ułamki proste, wyznaczyć odwrotną transformatę Laplace'a funkcji:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } F(s) = \frac{s-10}{(s-3)(s+4)}; & \text{b) } F(s) = \frac{7s-2}{s^2-s-2}; & \text{c) } F(s) = \frac{3s}{(2s+1)^2}; \\ \text{d) } F(s) = \frac{s}{(s+4)^3}; & \text{e) } F(s) = \frac{1}{s(s^2+3)}; & \text{f) } F(s) = \frac{5s^2-3s+2}{(s+1)(s^2+1)}; \\ \text{g) } F(s) = \frac{s^2+3s+7}{(s+2)^2(s-3)}; & \text{h) } F(s) = \frac{s^3+4s+6}{(s^2+1)(s^2+4)}; & \text{i) } F(s) = \frac{s^2-2}{(s+1)^2(s-3)^2}. \end{array}$$

Zadanie 1.10.

Stosując twierdzenie Heaviside'a o rozkładzie, wyznaczyć odwrotną transformatę Laplace'a funkcji:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } F(s) = \frac{3s+2}{(s+4)(s-5)}; & \text{b) } F(s) = \frac{2s+5}{s^2-5s+6}; & \text{c) } F(s) = \frac{s^2-s+1}{s(s-1)(s-2)}; \\ \text{d) } F(s) = \frac{s+1}{s^3+2s^2}; & \text{e) } F(s) = \frac{s-3}{s(s^2+1)}; & \text{f) } F(s) = \frac{s}{s^4-1}. \end{array}$$

Zadanie 1.11.

Stosując twierdzenie Borela o splocie, wyznaczyć odwrotną transformatę Laplace'a funkcji:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } F(s) = \frac{1}{(s+2)(s+3)}; & \text{b) } F(s) = \frac{1}{s^2+3s-4}; & \text{c) } F(s) = \frac{s}{(s-2)(s^2+2)}; \\ \text{d) } F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+2s+2)}; & \text{e) } F(s) = \frac{s^2}{(s^2+1)^2}; & \text{f) } F(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+9)}. \end{array}$$

Zadanie 1.12.

Stosując twierdzenie Cauchy'ego o residuach, wyznaczyć odwrotną transformatę Laplace'a funkcji:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } F(s) = \frac{2s-1}{(s-2)(s+5)}; & \text{b) } F(s) = \frac{1}{s^2+s-2}; & \text{c) } F(s) = \frac{s}{(s-1)^2}; \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \text{d) } F(s) = \frac{s^2}{(s+2)^3}; & \text{e) } F(s) = \frac{2s^2+3}{(s^2+1)^2}; & \text{f) } F(s) = \frac{1}{s^4(s+1)}; \\ \text{g) } F(s) = \frac{1}{s^3-s^2}; & \text{h) } F(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+4)}; & \text{i) } F(s) = \frac{s^3}{s^4-1}. \end{array}$$

Odpowiedzi:

1.9 a) $2e^{-4t} - e^{3t}$; b) $3e^{-t} + 4e^{2t}$; c) $\frac{3}{4}e^{-t/2} - \frac{3}{8}te^{-t/2}$; d) $te^{-4t} - 2t^2e^{-4t}$;
e) $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cos\sqrt{3}t$; f) $5e^{-t} - 3\sin t$; g) $e^{3t} - te^{-2t}$; h) $\cos t + 2\sin t - \sin 2t$;
i) $-\frac{5}{32}e^{-t} + \frac{5}{32}e^{3t} - \frac{1}{16}te^{-t} + \frac{7}{16}te^{3t}$.

1.10 a) $\frac{10}{9}e^{-4t} + \frac{17}{9}e^{5t}$; b) $11e^{3t} - 9e^{2t}$; c) $\frac{3}{2}e^{2t} - e^t + \frac{1}{2}$; d) $-\frac{1}{4}e^{-2t} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$;
e) $3\cos t + \sin t - 3$; f) $\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{2}\cos t$.

1.11 a) $e^{-2t} - e^{-3t}$; b) $\frac{1}{5}e^t - \frac{1}{5}e^{-4t}$; c) $\frac{1}{3}e^{2t} - \frac{1}{3}\cos\sqrt{2}t + \frac{\sqrt{2}}{6}\sin\sqrt{2}t$;
d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-t}(\cos t - \sin t)$; e) $\frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{2}t\cos t$; f) $\frac{1}{8}\sin t - \frac{1}{24}\sin 3t$.

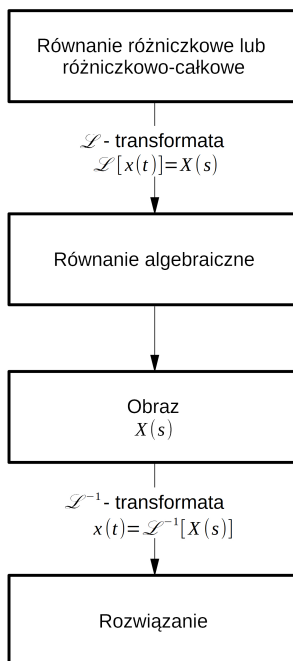
1.12 a) $\frac{3}{7}e^{2t} + \frac{11}{7}e^{-5t}$; b) $\frac{1}{3}e^t - \frac{1}{3}e^{-2t}$; c) $e^t + te^t$; d) $e^{-2t} - 4te^{-2t} + 2t^2e^{-2t}$;
e) $\frac{5}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cos t$; f) $e^{-t} + \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - 1$; g) $e^t - t - 1$;
h) $-\frac{1}{5}e^{-t} + \frac{1}{5}\cos 2t + \frac{2}{5}\sin 2t$; i) $\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^t + \frac{1}{2}\cos t$.

1.8. Operatorowa metoda rozwiązywania równań różniczkowych

Ojciec działu, który dziś nazywamy rachunkiem operatorowym, inżynier brytyjski Olivier Heaviside, autor pierwotnej postaci transformaty Laplace'a, stworzył ją jako narzędzie do rozwiązywania pewnych typów równań różniczkowych opisujących przepływ prądu w obwodach elektrycznych [13]. Do dziś jednym z ważniejszych zastosowań transformaty Laplace'a jest rozwiązywanie równań różniczkowych, czyli tak zwana *operatorowa metoda rozwiązywania równań różniczkowych* (lub różniczkowo-całkowych).

Idea tej metody jest prosta i opiera się na trzech krokach (patrz schemat 1.8):

- Krok I. dane równanie różniczkowe przy zadanych warunkach początkowych w zerze przekształcamy za pomocą transformaty Laplace'a do równania algebraicznego;
- Krok II. rozwiązujemy równanie algebraiczne;
- Krok III. za pomocą odwrotnej transformaty Laplace'a wyznaczamy szukane rozwiązanie pierwotnego problemu.



Rysunek 1.8: Schemat operatorowej metody rozwiązywania równań różniczkowych

Należy przy tym pamiętać, że chociaż sama metoda operatorowa rozwiązywania równań różniczkowych jest prostsza niż metody klasyczne, to:

1. rozwiązanie, które otrzymujemy, jest oryginałem, a zatem dla $t < 0$ jest tożsamościowo równe zero;
2. metodę operatorową możemy stosować tylko dla równań różniczkowych przy zadanych warunkach początkowych w zerze;
3. metodę operatorową możemy stosować do rozwiązywania równań i układów równań różniczkowych liniowych o stałych współczynnikach oraz do wybranych typów równań różniczkowo-całkowych (tzw. równania Volterra).

Przykład 1.20.

Metodą operatorową rozwiązać podane równanie różniczkowe:

- a) $x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = e^{3t}$ przy zerowych warunkach początkowych;
- b) $x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = e^{3t}$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$;
- c) $x''(t) + x(t) = f(t)$ przy zerowych warunkach początkowych,

$$\text{gdzie } f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ 1 & \text{dla } 0 \leq t < 2, \\ 3 & \text{dla } t \geq 2; \end{cases}$$

d) $x''(t) + 4x(t) = \delta(t)$ przy zerowych warunkach początkowych;

e) $x''(t) + 4x(t) = \delta(t - 1)$ przy zerowych warunkach początkowych.

Rozwiązanie:

a) W celu rozwiązania danego równania stosujemy podany powyżej algorytm:

Krok I. Niech $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$. Pamiętając, że na podstawie twierdzenia 1.6, przy zadanych zerowych warunkach początkowych, tzn. przy $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$, mamy $\mathcal{L}[x''(t)] = s^2X(s)$ i $\mathcal{L}[x'(t)] = sX(s)$. Równanie

$$x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = e^{3t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

przekształcamy za pomocą transformaty Laplace'a do równania

$$s^2X(s) + 5sX(s) + 6X(s) = \frac{1}{s-3}. \quad (1.26)$$

Jak łatwo zauważyć, równanie (1.26) jest równaniem algebraicznym.

Krok II. Rozwiązujemy równanie algebraiczne (1.26), wyznaczając z niego $X(s)$ (czyli równanie obrazu):

$$X(s) = \frac{1}{(s-3)(s^2+5s+6)} = \frac{1}{(s-3)(s+3)(s+2)}. \quad (1.27)$$

Krok III. Korzystając z twierdzenia Heaviside'a o rozkładzie (twierdzenie 1.14), otrzymujemy:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{30}e^{3t} + \frac{1}{6}e^{-3t} - \frac{1}{5}e^{-2t}.$$

b) Jak łatwo zauważyć, przykłady a) i b) różnią się tylko warunkami początkowymi. Ponieważ rozwiązując dane równanie, wykonujemy takie same kroki jak poprzednio, nie będziemy ich wyszczególniać. Podobnie jak poprzednio, niech $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$. Przy zadanych warunkach początkowych, tzn. przy $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$, mamy $\mathcal{L}[x''(t)] = s^2X(s) - s - 1$ i $\mathcal{L}[x'(t)] = sX(s) - 1$. Zatem równanie

$$x''(t) + 5x'(t) + 6x(t) = e^{3t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1$$

przekształcamy za pomocą transformaty Laplace'a do równania

$$s^2X(s) - s - 1 + 5sX(s) - 5 + 6X(s) = \frac{1}{s-3}, \quad (1.28)$$

a stąd

$$X(s) = \frac{s^2 + 3s - 17}{(s-3)(s+3)(s+2)}.$$

Korzystając z twierdzenia Heaviside'a o rozkładzie (twierdzenie 1.14), otrzymujemy:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{30}e^{3t} - \frac{17}{6}e^{-3t} + \frac{19}{5}e^{-2t}.$$

c) Daną funkcję f za pomocą funkcji Heaviside'a można przedstawić w postaci

$$f(t) = \mathbf{1}(t) + 2\mathbf{1}(t-2).$$

Ponieważ

$$\mathcal{L}[\mathbf{1}(t) + 2\mathbf{1}(t-2)] = \frac{1}{s} + \frac{2}{s}e^{-2s},$$

więc przekształcając za pomocą transformaty Laplace'a równanie $x''(t) + x(t) = f(t)$ przy zadanych zerowych warunkach początkowych, otrzymujemy:

$$s^2X(s) + X(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s}e^{-2s},$$

a stąd

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2+1)} + 2\frac{1}{s(s^2+1)}e^{-2s}.$$

Z rozkładu na ułamki proste otrzymujemy $\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$. Zatem

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}\right] = 1 - \cos t$$

oraz na podstawie twierdzenia o przesunięciu w argumencie oryginału (twierdzenie 1.3)

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s^2+1)}e^{-2s}\right] = [1 - \cos(t-2)]\mathbf{1}(t-2).$$

Zatem szukanym rozwiązaniem danego równania jest

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = 1 - \cos t + 2[1 - \cos(t-2)]\mathbf{1}(t-2).$$

d) Rozwiązanie równania $x''(t) + 4x(t) = \delta(t)$ przy zerowych warunkach początkowych otrzymujemy bardzo prosto. Mianowicie, należy zauważyć, że jeżeli obie jego strony przekształcimy za pomocą transformaty Laplace'a, to przy danych warunkach początkowych otrzymamy równanie algebraiczne postaci:

$$s^2 X(s) + 4X(s) = 1,$$

a stąd

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 4}.$$

Zatem

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 4} \right] = \frac{1}{2} \sin 2t.$$

e) Równanie $x''(t) + 4x(t) = \delta(t - 1)$ przy zerowych warunkach początkowych na pierwszy rzut oka jest podobne do równania z przykładu d). Podobnie jak poprzednio, przy danych warunkach początkowych, obie jego strony przekształcamy za pomocą transformaty Laplace'a i otrzymujemy:

$$s^2 X(s) + 4X(s) = e^{-s},$$

a stąd

$$X(s) = \frac{e^{-s}}{s^2 + 4}.$$

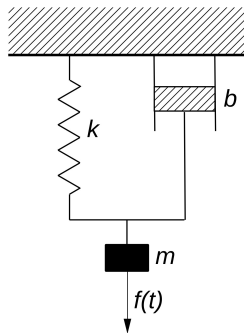
Teraz, korzystając z własności (1.22), otrzymujemy:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-s}}{s^2 + 4} \right] = \frac{1}{2} \sin 2(t - 1) \mathbf{1}(t - 1).$$

□

Przykład 1.21. [1]

Rozważmy układ mechaniczny składający się z prostokątnego bloczka o masie m i sprężyny o sprężystości k , które są przymocowane do sztywnej belki tak jak na rysunku 1.9. Na ten układ działa siła wymuszająca $f = f(t)$. Współczynnik tłumienia wynosi b . Wyznaczyć wychylenie układu z położenia równowagi.



Rysunek 1.9: Układ mechaniczny: bloczek zawieszony na sprężynie

Rozwiązanie:

Oznaczmy przez $x(t)$ wychylenie bloczka z położenia równowagi w chwili t . Zgodnie z pierwszym prawem Newtona wypadkowa siła $\vec{F}_w(t)$ działająca na bloczek może być zapisana jako

$$\vec{F}_w(t) = m\vec{a}(t),$$

gdzie $a(t) = x''(t)$ jest przyspieszeniem układu.

Ponieważ siła $\vec{F}_w$ jest wypadkową siły $\vec{F}_k$, z jaką działa sprężyna na bloczek, siły tłumienia $\vec{F}_b$ i siły wymuszającej $\vec{f}$, to korzystając z drugiego prawa Newtona, otrzymujemy równanie opisujące ruch układu:

$$\vec{F}_w(t) = \vec{F}_k(t) + \vec{F}_b(t) + \vec{f}(t).$$

Siła $\vec{F}_k$ jest wprost proporcjonalna do wychylenia bloczka z położenia równowagi, czyli

$$\vec{F}_k(t) = k\vec{x}(t),$$

a siła $\vec{F}_b$ jest wprost proporcjonalna do prędkości $\vec{v}$, z jaką porusza się bloczek, zatem

$$\vec{F}_b(t) = b\vec{v}(t) = b\vec{x}'(t).$$

Ponieważ wszystkie siły działające na bloczek mają ten sam kierunek, ale zwrot wektorów $\vec{F}_k$ i $\vec{F}_b$ jest przeciwny do pozostałych, możemy zapisać następujące równanie skalarnie:

$$F_w(t) = -F_k(t) - F_b(t) + f(t).$$

Stąd wynika bezpośrednio poniższe równanie różniczkowe opisujące ruch układu:

$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = f(t).$$

Założmy, że w chwili $t = 0$ są spełnione poniższe warunki początkowe:

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0.$$

Wyznaczając transformatę Laplace'a obu stron powyższego równania różniczkowego z uwzględnieniem warunków początkowych, otrzymujemy:

$$ms^2X(s) - msx_0 - mv_0 + bsX(s) - bx_0 + kX(s) = F(s). \quad (1.29)$$

Przyjmujemy oznaczenia: $p = \frac{b}{2m}$, $q = \frac{k}{m}$. Wówczas z (1.29) otrzymujemy:

$$X(s) = \frac{s+2p}{s^2+2ps+q}x_0 + \frac{1}{s^2+2ps+q}v_0 + \frac{F(s)}{s^2+2ps+q} \frac{1}{m}. \quad (1.30)$$

Aby wyznaczyć na podstawie powyższego równania postać funkcji x opisującej ruch układu w zależności od czasu, musimy przyjąć konkretną postać siły wymusza-

jącej taki ruch. W dalszym ciągu będziemy zakładać, że układ jest poddany działaniu siły o stałej wartości, tzn.

$$f(t) = f_0 \mathbf{1}(t)$$

dla pewnego $f_0 \in \mathbb{R}$.

W zależności od znaku wyróżnika $\Delta = 4(p^2 - q)$ trójmianu kwadratowego $s^2 + 2ps + q$ odwrotną transformatę Laplace'a poszczególnych składowych równania (1.30) będziemy obliczać, korzystając z różnych wzorów. W szczególności, jeżeli $\Delta < 0$, mamy do czynienia z układem drgającym. Wówczas

$$s^2 + 2ps + q = (s + p)^2 + \left(\sqrt{q - p^2}\right)^2 = (s + p)^2 + \omega^2,$$

gdzie $\omega = \sqrt{q - p^2}$. Wówczas

$$X(s) = \frac{s + 2p}{(s + p)^2 + \omega^2} x_0 + \frac{1}{(s + p)^2 + \omega^2} v_0 + \frac{1}{s[(s + p)^2 + \omega^2]} \frac{f_0}{m}.$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\frac{1}{s[(s + p)^2 + \omega^2]} = \frac{1}{p^2 + \omega^2} \left[\frac{1}{s} - \frac{s + 2p}{(s + p)^2 + \omega^2} \right]$$

oraz

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + 2p}{(s + p)^2 + \omega^2} \right] &= e^{-pt} \cos \omega t + \frac{p}{\omega} e^{-pt} \sin \omega t, \\ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s + p)^2 + \omega^2} \right] &= \frac{1}{\omega} e^{-pt} \sin \omega t, \end{aligned}$$

otrzymujemy:

$$\begin{aligned} x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] &= \left(e^{-pt} \cos \omega t + \frac{p}{\omega} e^{-pt} \sin \omega t \right) x_0 + \left(\frac{1}{\omega} e^{-pt} \sin \omega t \right) v_0 + \\ &+ \left(1 - e^{-pt} \cos \omega t + \frac{p}{\omega} e^{-pt} \sin \omega t \right) \frac{f_0}{m(p^2 + \omega^2)}. \end{aligned}$$

Czyli wychylenie z położenia równowagi układu przedstawionego na rysunku 1.9 można opisać wzorem:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-pt} \left[\left(x_0 - \frac{f_0}{m(p^2 + \omega^2)} \right) \cos \omega t + \left(\frac{px_0 + v_0}{\omega} + \frac{p}{\omega(p^2 + \omega^2)} \frac{f_0}{m} \right) \sin \omega t \right] + \\ &+ \frac{f_0}{m(p^2 + \omega^2)}. \end{aligned}$$

Zadania

Zadanie 1.13.

Metodą operatorową rozwiązać podane równania różniczkowe:

a) $x'(t) + x(t) = 3 \sin 2t$, $x(0) = 1$;

b) $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = \sin 3t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$;

c) $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = \sin 3t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$;

d) $x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$, gdzie

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ 3 & \text{dla } t \geq 0; \end{cases}$$

e) $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$, gdzie

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq 0 \text{ lub } t \geq 2, \\ 2 & \text{dla } 0 < t \leq 1, \\ -2 & \text{dla } 1 < t < 2; \end{cases}$$

f) $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 1$, gdzie

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t \leq 0 \text{ lub } t \geq 2, \\ 2 & \text{dla } 0 < t \leq 1, \\ -2 & \text{dla } 1 < t < 2; \end{cases}$$

g) $x''(t) + x(t) = f(t)$, $x(0) = x'(0) = 0$, gdzie

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{dla } 0 \leq t \leq \pi, \\ 0 & \text{dla } t < 0 \text{ lub } t > \pi; \end{cases}$$

h) $x'''(t) - x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = t^3$, $x(0) = x'(0) = x''(0) = 0$.

Odpowiedzi:

1.13 a) $x(t) = \frac{11e^{-t}}{5} - \frac{6\cos 2t}{5} + \frac{3\sin 2t}{5}$; b) $x(t) = \frac{3e^{-t}}{50} - \frac{3\cos 3t}{50} - \frac{2\sin 3t}{25} + \frac{13te^{-t}}{10}$;

c) $x(t) = \frac{53e^{-t}}{50} - \frac{3\cos 3t}{50} - \frac{2\sin 3t}{25} + \frac{13te^{-t}}{10}$; d) $x(t) = te^{3t} - \frac{e^{3t}}{3} + \frac{1}{3}$;

e) $x(t) = 2te^t - 2e^t - 4\mathbf{1}(t-1)(e^{t-1}(t-2)+1) + 2\mathbf{1}(t-2)(e^{t-2}(t-3)+1) + 2$;

f) $x(t) = \frac{e^{2t}}{2} - \mathbf{1}(t-1)(e^{2t-2}(2t-3)+1) + \mathbf{1}(t-2)\frac{e^{2t-4}(2t-5)+1}{2} + \frac{1}{2}$;

$$\text{g)} x(t) = \frac{t \sin t}{2} - \frac{\sin t \mathbf{1}(t-\pi)(t-\pi)}{2}; \text{ h)} x(t) = \frac{e^{-2t}}{32} + \frac{3e^{2t}}{32} - 2e^t + \frac{t^3}{4} + \frac{3t^2}{4} + \frac{15t}{8} + \frac{15}{8}.$$

1.9. Uwagi bibliograficzne

Pisząc powyższy rozdział, korzystaliśmy głównie z naszych notatek do zajęć oraz wieloletniego doświadczenia dydaktycznego. Należy jednak mieć na uwadze, że pojęcie i własności transformaty Laplace’a są opisane w wielu podręcznikach i innych materiałach źródłowych. Poza własnymi notatkami sięgaliśmy przede wszystkim do klasycznych podręczników, takich jak [22, 11] czy też [13] oraz [6] (w szczególności podrozdziały 1.1, 1.2, 1.3, 1.7), ale też sięgaliśmy (głównie przy wyborze zadań) do skryptu [14] i podręczników profesora Janusza Kowala [7, 8], które faktycznie, szczególnie w zakresie doboru przykładów, były inspiracją do powstania tej części książki. Przy podrozdziałach 1.4, 1.5, 1.8, oprócz wymienionych już pozycji, korzystaliśmy również z monografii [12], sięgaliśmy do podręcznika [4] czy też skryptu [1], którego treści, mimo upływu czasu, są aktualne, a także do [20, 2].

Rozdział 2

Transformata $\mathcal{Z}$

2.1. Wprowadzenie

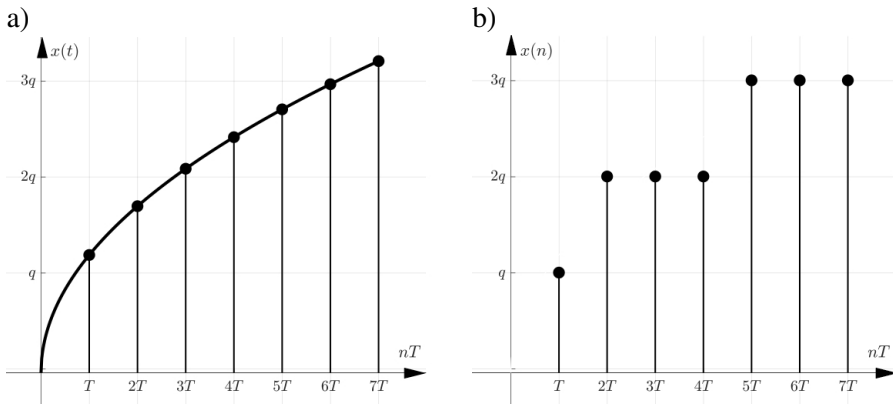
Jak powszechnie wiadomo, zdecydowana większość procesów rzeczywistych to procesy ciągłe w czasie, a urządzenia rejestrujące je (karty pomiarowe) w naturalny sposób pobierają z otoczenia zewnętrznego sygnały dyskretne. Zatem powstaje pytanie: *Jak na podstawie sygnału rzeczywistego otrzymać sygnał dyskretny?*

Definicja 2.1. *Sygnałem dyskretnym w czasie nazywamy funkcję, której dziedziną jest zbiór liczb całkowitych.*

Czyli sygnał dyskretny otrzymany z funkcji $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłej jest funkcją dyskretną (ciągłym) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$. Można uzyskać go w wyniku próbkowania sygnału ciągłego f w chwilach $t_n = nT$ co okres T , gdzie T jest stałą dodatnią. Wtedy przyjmujemy:

$$f(n) := f(t_n) = f(nT)$$

i w ten sposób otrzymujemy ciąg $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Z takim postępowaniem spotykamy się na przykład w elektronice, elektrotechnice czy automatyce [7, 19].

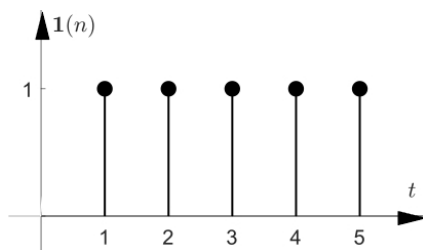


Rysunek 2.1: a) Sygnał ciągły $x(t)$ i sygnał dyskretny $x(n)$ uzyskany w wyniku próbkowania sygnału $x(t)$, b) sygnał cyfrowy uzyskany w wyniku kwantyzacji sygnału dyskretnego $x(n)$

2.2. Delta Kroneckera. Dyskretna funkcja Heaviside'a

Jak pamiętamy, jednym z kluczowych pojęć przy definicji przekształcenia Laplace'a była funkcja Heaviside'a (1.3). Jej dyskretnym odpowiednikiem jest funkcja (rys. 2.2)

$$\mathbf{1}(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0, 1, 2, 3, \dots \\ 0 & \text{dla } n < 0. \end{cases}$$



Rysunek 2.2: Dyskretna funkcja Heaviside'a

Drugą z istotnych funkcji była pseudofunkcja delta Diraca (1.18). Jej dyskretnym odpowiednikiem jest delta Kroneckera

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = 0, \\ 0 & \text{dla } n \neq 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Jak można zauważyć, z (2.1) wynika, że

$$\delta(n-i) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n = i, \\ 0 & \text{dla } n \neq i. \end{cases} \quad (2.2)$$

Zadania

Zadanie 2.1.

Zapisać poniższe funkcje dyskretne, wykorzystując funkcję $\mathbf{1}(n)$, pamiętając przy tym, że $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{a) } f(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n < 0, \\ 1 & \text{dla } n \in [1; 5], \\ 2 & \text{dla } n \geq 6; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n < 0 \text{ lub } n > 6, \\ n & \text{dla } n \in [1; 5], \\ -n+6 & \text{dla } n \geq 6; \end{cases}$$

$$\text{c) } f(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n < 0, \\ n & \text{dla } n \in [1; 5], \\ 5 & \text{dla } n \in [6; 10]; \\ -n+11 & \text{dla } n \geq 11 \end{cases}$$

$$\text{d) } f(n) = \begin{cases} 0 & \text{dla } n < 0 \text{ lub } n > 7, \\ \frac{4}{3}n - \frac{4}{3} & \text{dla } n \in [1; 4], \\ \frac{4}{3}n - \frac{28}{3} & \text{dla } n \in [6; 10]. \end{cases}$$

Zadanie 2.2.

Narysować wykres funkcji dyskretnej:

$$\text{a) } f(n) = \mathbf{1}(n-1) - \mathbf{1}(n-3);$$

$$\text{b) } f(n) = \mathbf{1}(n-2) - n\mathbf{1}(n-3);$$

$$\text{c) } f(n) = n(\mathbf{1}(n-2) - \mathbf{1}(n-3));$$

$$\text{d) } f(n) = (n-1)(\mathbf{1}(n-2) + \mathbf{1}(n-3));$$

$$\text{e) } f(n) = n(\mathbf{1}(n) - \mathbf{1}(n-3)) + (-n+1)(\mathbf{1}(n-1) - \mathbf{1}(n-3));$$

$$\text{f) } f(n) = (n-3)^2\mathbf{1}(n-2) + \mathbf{1}(n-1);$$

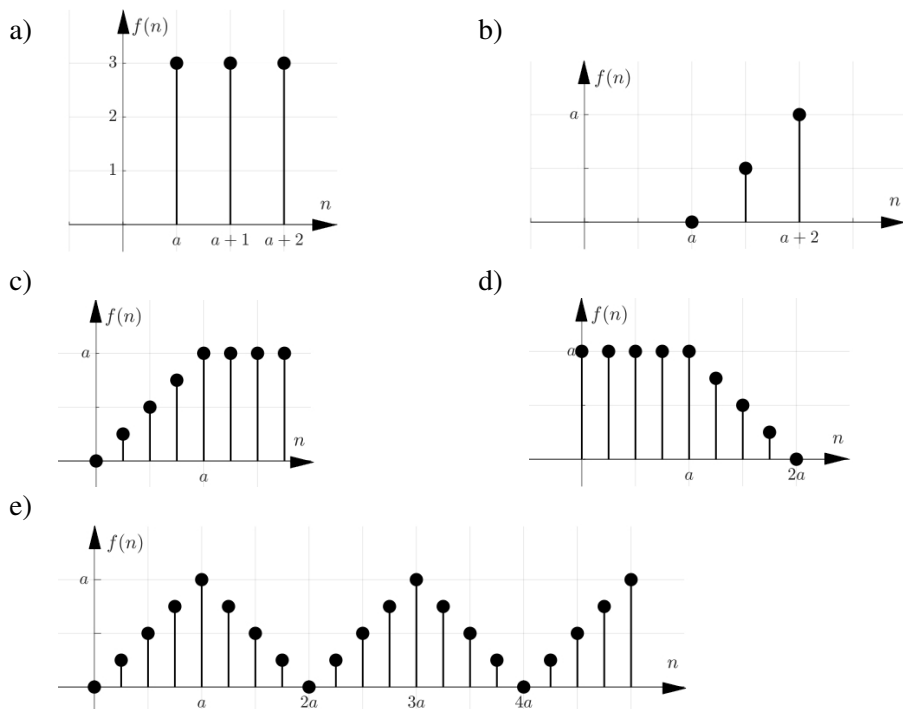
$$\text{g) } f(n) = \sin n \mathbf{1}\left(n - \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\text{h) } f(n) = \sin\left(n - \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{1}\left(n - \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\text{i) } f(n) = \cos\left(n - \frac{\pi}{4}\right) \mathbf{1}\left(n - \frac{\pi}{2}\right).$$

Zadanie 2.3.

Wykorzystując funkcję Heaviside'a, podać wzór analityczny funkcji przedstawionej na rysunku:



Rysunek 2.3: Wykresy funkcji do zadania 2.3

2.3. Definicja $\mathcal{Z}$ -transformaty

Transformacja $\mathcal{Z}$ jest jednym z podstawowych odwzorowań, które jest stosowane w analizie sygnałów dyskretnych. Z jednej strony umożliwia ona przekształcenie funkcji zmiennej dyskretnej n w funkcję zmiennej zespolonej, zwyczajowo oznaczanej w analizie procesów dyskretnych jako z , z drugiej strony transformata $\mathcal{Z}$ upraszcza sposób rozwiązywania równań różnicowych n -tego rzędu.

Definicja 2.2. Transformatą $\mathcal{Z}$ ($\mathcal{Z}$ -transformatą) funkcji dyskretnej $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ nazywamy funkcję zespoloną $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ zmiennej zespolonej z postaci:

$$F(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f(k)z^{-k}, \quad (2.3)$$

o ile szereg $\sum_{k=0}^{+\infty} f(k)z^{-k}$ jest zbieżny.

Transformacja $\mathcal{Z}$ jest przekształceniem, dla której szereg po prawej stronie równości (2.3) jest zbieżny w zbiór funkcji zespolonych zmiennej zespolonej. Transformata $\mathcal{Z}$ jest obrazem pewnej funkcji dyskretnej $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ otrzymanym w wyniku transformacji $\mathcal{Z}$. Ten obraz w dalszej części będziemy oznaczać jako $F(z)$, czyli $\mathcal{Z}[f(n)] = F(z)$.

Przykład 2.1. Korzystając z definicji 2.2, wyznaczyć $\mathcal{Z}$ -transformatę funkcji $f(n) = \mathbf{1}(n)$.

Rozwiązanie:

Bezpośrednio z definicji 2.2 otrzymujemy:

$$\mathcal{Z}[\mathbf{1}(n)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{z^k} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \dots$$

Jak łatwo można zauważyć, szereg $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{z^k}$ jest szeregiem geometrycznym. Szereg ten jest zbieżny dla $|\frac{1}{z}| < 1$, czyli dla $|z| > 1$. Ponieważ

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{z^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{z}{z-1},$$

zatem

$$\mathcal{Z}[\mathbf{1}(n)] = \frac{z}{z-1}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $|z| > 1$. □

Przykład 2.2. Korzystając z definicji 2.2, wyznaczyć $\mathcal{Z}$ -transformatę funkcji dyskretnej $f(n) = e^{an}\mathbf{1}(n)$, $a > 0$.

Rozwiązanie:

Bezpośrednio z definicji 2.2 otrzymujemy:

$$\mathcal{Z}[e^{an}\mathbf{1}(n)] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{ak}\mathbf{1}(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{ak}}{z^k} = 1 + \frac{e^a}{z} + \frac{(e^a)^2}{z^2} + \frac{(e^a)^3}{z^3} + \dots$$

Jak łatwo można zauważyć, szereg $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{ak}}{z^k}$ jest szeregiem geometrycznym. Szereg ten jest zbieżny dla $\left| \frac{e^a}{z} \right| < 1$, czyli dla $|z| > e^a$. Ponieważ

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{ak}}{z^k} = \frac{1}{1 - \frac{e^a}{z}} = \frac{z}{z - e^a},$$

zatem

$$\mathcal{Z}[e^{an}\mathbf{1}(n)] = \frac{z}{z - e^a}$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $|z| > e^a$. □

Przykład 2.3. Korzystając z definicji 2.2, wyznaczyć $\mathcal{Z}$ -transformatę:

- a) delty Kroneckera $\delta(n)$;
- b) $\delta(n - i)$.

Rozwiązanie:

- a) Bezpośrednio z definicji $\mathcal{Z}$ -transformaty oraz z definicji delty Kroneckera (wzór (2.1)) otrzymujemy:

$$\mathcal{Z}[\delta(n)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(n)z^{-k} = 1 + 0 + 0 + \dots = 1$$

dla dowolnego z .

- b) Podobnie jak w przykładzie a), bezpośrednio z definicji $\mathcal{Z}$ -transformaty oraz ze wzoru (2.2) otrzymujemy:

$$\mathcal{Z}[\delta(n)] = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta(n)z^{-k} = \underbrace{0 + 0 + \dots}_{i-1} + 1 + 0 + 0 + \dots = z^{-i}$$

dla dowolnego z . □

Podobnie jak w przypadku transformaty Laplace'a, wyznaczanie $\mathcal{Z}$ -transformaty na podstawie definicji stosuje się przede wszystkim wtedy, gdy nie potrafimy jej obliczyć w żaden inny sposób. Transformaty funkcji dyskretnych wykorzystywanych najczęściej są tablicowane (patrz tabela B.2).

Zadania

Zadanie 2.4.

Wyznaczyć $\mathcal{Z}$ -transformatę i obszar jej zbieżności dla funkcji:

- a) $f(n) = \begin{cases} 3, & \text{jeśli } n \text{ jest nieparzystą liczbą naturalną,} \\ 0, & \text{jeśli } n \text{ jest parzystą liczbą naturalną;} \end{cases}$
- b) $f(n) = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } n \text{ jest nieparzystą liczbą naturalną,} \\ -1, & \text{jeśli } n \text{ jest parzystą liczbą naturalną.} \end{cases}$

Zadanie 2.5.

Na podstawie definicji wyznaczyć $\mathcal{Z}$ -transformatę funkcji/ciągu:

- a) $f(n) = (-1)^n$; b) $f(n) = n$; c) $a, a^2, a^3, a^4, \dots$;
d) $1, a, a^2, a^3, a^4, \dots$; e) $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$; f) $0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots$

Odpowiedzi:

2.4 a) $\frac{3z}{z^2-1}$ dla $|z| > 1$; b) $-\frac{z}{z+1}$ dla $|z| > 1$.

2.5 a) $\frac{z}{z+1}$; b) $\frac{z}{(z-1)^2}$; c) $\frac{z}{z-a}$; d) $\frac{z}{a(z-a)}$; e) $\frac{z}{z^2-1}$; f) $\frac{z^2}{z^2-1}$.

2.4. Własności $\mathcal{Z}$ -transformaty

Podstawowe własności $\mathcal{Z}$ -transformaty są zbliżone do własności transformaty Laplace'a. Poniżej przyjmujemy, że $\mathcal{Z}[f(n)] = F(z)$ dla $|z| > \frac{1}{R}$.

Twierdzenie 2.1 (o liniowości). *Jeżeli istnieją $\mathcal{Z}[f(n)]$ i $\mathcal{Z}[g(n)]$, to dla dowolnych stałych $a, b \in \mathbb{C}$ zachodzi*

$$\mathcal{Z}[af(n) + bg(n)] = a\mathcal{Z}[f(n)] + b\mathcal{Z}[g(n)]. \quad (2.4)$$

Przykład 2.4.

Wyznaczyć $\mathcal{Z}$ -transformatę funkcji:

- a) $f(n) = e^{2n} + 4n^2 - \mathbf{1}(n)$; b) $f(n) = \cos \omega n$.

Rozwiązanie:

a) Korzystając z twierdzenia 2.1 o liniowości $\mathcal{Z}$ -transformaty, otrzymujemy:

$$\mathcal{Z}[f(n)] = \mathcal{Z}[e^{2n} + 4n^2 - \mathbf{1}(n)] = \mathcal{Z}[e^{2n}] + 4\mathcal{Z}[n^2] - \mathcal{Z}[\mathbf{1}(n)].$$

Z przykładu 2.1 wiemy, że $\mathcal{Z}[\mathbf{1}(n)] = \frac{z}{z-1}$, z przykładu 2.2 wynika, że $\mathcal{Z}[e^{2n}] = \frac{z}{z-e^2}$, a ze wzorów podstawowych (tabela B.2) mamy też $\mathcal{Z}[n^2] = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$. Zatem

$$\mathcal{Z}[f(n)] = \frac{z}{z-e^2} + 4\frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{z}{z-1}.$$

b) Ponieważ na mocy wzoru Eulera $\cos \omega n = \frac{e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}}{2}$, więc korzystając z twierdzenia 2.1, otrzymujemy:

$$\mathcal{Z}[\cos \omega n] = \mathcal{Z}\left[\frac{e^{j\omega n} + e^{-j\omega n}}{2}\right] = \frac{1}{2}\mathcal{Z}[e^{j\omega n}] + \frac{1}{2}\mathcal{Z}[e^{-j\omega n}].$$

Ponieważ $\mathcal{Z}[e^{j\omega n}] = \frac{z}{z-e^{j\omega}}$ oraz $\mathcal{Z}[e^{-j\omega n}] = \frac{z}{z-e^{-j\omega}}$ (patrz przykład 2.2), zatem

$$\mathcal{Z}[\cos \omega n] = -\frac{1}{2}\left(\frac{z}{z-e^{j\omega}} + \frac{z}{z-e^{-j\omega}}\right) = \frac{z}{2} \cdot \frac{2z - (e^{-j\omega} + e^{j\omega})}{z^2 + z(e^{-j\omega} + e^{j\omega}) + 1}.$$

Ponieważ $e^{-j\omega} + e^{j\omega} = 2\frac{e^{-j\omega} + e^{j\omega}}{2} = 2\cos \omega n$, więc przekształcając ostatnią równość, otrzymujemy:

$$\mathcal{Z}[\cos \omega n] = \frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2z\cos \omega + 1}.$$

□

Twierdzenie 2.2 (o podobieństwie/zmianie skali). Jeżeli istnieje $\mathcal{Z}[f(n)] = F(z)$, to dla dowolnego $a \neq 0$ zespolonego i $|z| > \frac{|a|}{R}$ zachodzi

$$\mathcal{Z}[a^n f(n)] = F\left(\frac{z}{a}\right). \quad (2.5)$$

Przykład 2.5.

Wyznaczyć $\mathcal{Z}$ -transformatę funkcji: $f(n) = 3^n \cos(\frac{\pi}{3}n)$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $\mathcal{Z}[\cos \frac{\pi}{3}n] = \frac{z(z - \cos \frac{\pi}{3})}{z^2 - 2z\cos \frac{\pi}{3} + 1} = \frac{1}{2} \frac{z(2z-1)}{z^2 - z + 1}$ (przykład 2.4 b), więc na mocy twierdzenia 2.2 otrzymujemy:

$$\mathcal{Z} \left[3^n \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) \right] = \frac{1}{2} \frac{\frac{z}{3}(2\frac{z}{3}-1)}{(\frac{z}{3})^2 - \frac{z}{3} + 1} = \frac{1}{2} \frac{z(2z-3)}{z^2-3z+1}.$$

□

Twierdzenie 2.3 (przesunięcie sygnału w czasie/pierwsze prawo przesunięć). *Jeżeli $\mathcal{Z}[f(n)] = F(z)$, to*

$$\mathcal{Z}[f(n-k)] = z^{-k}F(z)$$

dla $k = 0, 1, 2, \dots$

Przykład 2.6.

Wyznaczyć $\mathcal{Z}$ -transformatę funkcji:

$$f(n) = \begin{cases} 5, & \text{jeśli } n = 0, 1, 2, 3, \dots, 100, \\ 3, & \text{jeśli } n = 101, 102, 103, \dots \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zauważmy, że w rozważanym przypadku $\mathcal{Z}[f(n)] = \mathcal{Z}[5\mathbf{1}(n) - 2\mathbf{1}(n-101)]$. Zatem, mając na uwadze, że $\mathcal{Z}[\mathbf{1}(n)] = \frac{z}{z-1}$ i korzystając z twierdzenia o opóźnieniu sygnału w czasie, czyli z twierdzenia 2.3, otrzymujemy

$$\mathcal{Z}[f(n)] = 5\mathcal{Z}[\mathbf{1}(n)] - 2\mathcal{Z}[\mathbf{1}(n-101)] = 5\frac{z}{z-1} - 2\frac{z^{-101}}{z-1}.$$

□

Poza operacją przesunięcia sygnału można też rozważać opóźnienie czasowe (bądź wyprzedzenie czasowe) sygnału.

Twierdzenie 2.4 (o wyprzedzeniu czasowym/drugie prawo przesunięć). *Niech*

1. n_0 będzie dowolną liczbą całkowitą (liczbą próbek, o którą następuje przesunięcie czasowe sygnału);
2. $\mathcal{Z}[f(n)] = F(z)$.

Wtedy

$$\mathcal{Z}[f(n+n_0)] = z^{n_0} \left(F(z) - \sum_{i=0}^{n_0-1} f(i)z^{-i} \right).$$

Twierdzenie 2.5. *Jeżeli $\mathcal{Z}[f(n)] = F(z)$, to*

$$\mathcal{Z}[nf(n)] = -z \frac{dF(z)}{dz}. \quad (2.6)$$

Przykład 2.7.

Wyznaczyć $\mathcal{Z}$ -transformatę funkcji:

a) $f(n) = n2^{-n}$;

b) $f(n) = n^2$;

c) $f(n) = n^2 2^{-n} + n$.

Rozwiązanie:

a) Ponieważ $F(z) = \mathcal{Z}[2^{-n}] = \frac{z}{z+2}$, zatem, korzystając z twierdzenia 2.5, otrzymujemy:

$$\mathcal{Z}[n2^n] = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-2} \right) = \frac{-2z}{(z+2)^2}.$$

b) Zauważmy, że

$$\mathcal{Z}[n^2] = \mathcal{Z}[n \cdot n] = -z \frac{d}{dz} \mathcal{Z}[n].$$

Ponieważ

$$\mathcal{Z}[n] = \mathcal{Z}[n \cdot \mathbf{1}(n)] = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) = \frac{z}{(z-1)^2},$$

zatem

$$\mathcal{Z}[n^2] = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{(z-1)^2} \right) - z \frac{(z-1)^2 - 2z(z-1)}{(z-1)^4} = \frac{z^2 + z}{(z-1)^3}.$$

c) Na podstawie twierdzenia 2.1 otrzymujemy:

$$\mathcal{Z}[n^2 2^{-n} + n] = \mathcal{Z}[n^2 2^{-n}] + \mathcal{Z}[n].$$

Korzystając z twierdzenia 2.5 oraz z punktu a), otrzymujemy:

$$\mathcal{Z}[n^2 2^{-n}] = \mathcal{Z}[n(n2^{-n})] = -z \mathcal{Z} \left[\frac{d}{dz} (n2^{-n}) \right] = \frac{4z - 2z^2}{(z+2)^3},$$

a ponieważ $\mathcal{Z}[n] = \mathcal{Z}[n \cdot \mathbf{1}(n)] = -z \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-1} \right) = \frac{z}{(z-1)^2}$, więc

$$\mathcal{Z}[n^2 2^{-n} + n] = \frac{4z - 2z^2}{(z+2)^3} + \frac{z}{(z-1)^2} = z \frac{z^4 + 12z^2 + 2z + 4}{(z+2)^3(z-1)^2}.$$

□

Jak można zauważyć na podstawie punktu b) powyższego przykładu, wzór (2.6) można łatwo uogólnić. Mianowicie

$$\mathcal{Z}[n^k f(n)] = -z \frac{d}{dz} \left(-z \frac{d}{dz} \left(\dots \left(-z \frac{d}{dz} \right) F(z) \dots \right) \right) \quad (2.7)$$

lub zapisując krócej

$$\mathcal{Z} \left[n^k f(n) \right] = \left(-z \frac{d}{dz} \right)^k \mathcal{Z} [f(n)]. \quad (2.8)$$

Twierdzenie 2.6. Jeżeli $\mathcal{Z} [f(n)] = F(z)$ i $|z| > \max \left(1, \frac{1}{R} \right)$, to

$$\mathcal{Z} \left[\sum_{i=0}^n f(i) \right] = \frac{z}{z-1} \mathcal{Z} [f(n)].$$

Przykład 2.8.

Wyznaczyć $\mathcal{Z}$ -transformatę sumy $\sum_{i=0}^n e^i$.

Rozwiązanie:

Bezpośrednio na podstawie twierdzenia 2.6 otrzymujemy:

$$\mathcal{Z} \left[\sum_{i=0}^n e^i \right] = \frac{z}{z-1} \mathcal{Z} [e^n] = \frac{z^2}{(z-1)(z-e)}.$$

□

Zadania

Zadanie 2.6.

Wyznaczyć $\mathcal{Z}$ -transformaty funkcji:

- a) $f(n) = \sin \omega n$; b) $f(n) = (n-1)3^{n-4}$; c) $f(n) = \sum_{i=0}^n \cos \frac{\pi}{4}(n-i)$;
d) $f(n) = \sum_{i=0}^n 2^{n-i} \sin \frac{\pi}{4} n$; e) $f(n) = (n+1)^3$; f) $f(n) = ne^{n-3}$;
g) $f(n) = (n-3)e^n \cos \frac{\pi}{3} n$; h) $f(n) = 4^n \sin 5n$; i) $f(n) = \sin \frac{\pi}{2}(n-3)$;
j) $f(n) = \sin \frac{\pi}{2}(n+3)$.

Odpowiedzi:

- 2.6** a) $\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$; b) $-\frac{z(z-6)}{81(z-3)^2}$; c) $\frac{z^2(2z-\sqrt{2})}{2(z-1)(z^2-\sqrt{2}z+1)}$; d) $\frac{\sqrt{2}z}{2\left(\frac{z^2}{4}-\frac{\sqrt{2}z}{2}+1\right)} - \frac{\sqrt{2}z}{2(z^2-\sqrt{2}z+1)}$;
e) $\frac{z^2(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$; f) $\frac{ze^{-2}}{(z-e)^2}$; g) $\frac{z(-6z^3+10ez^2-13e^2z+4e^3)}{2(z^2-ez+e^2)^2}$; h) $\frac{4z(z^2-1)\sin 5}{(z^2-2z\cos 5+1)^2}$; i) $\frac{z^2}{z^2+1}$;
j) $-\frac{z^2}{z^2+1}$.

2.5. Związki między funkcją dyskretną a jej $\mathcal{Z}$ -transformatą

Związki między funkcjami dyskretnymi a ich $\mathcal{Z}$ -transformatami, podobnie jak w przypadku transformaty Laplace'a zwane też twierdzeniami granicznymi, pozwalają na obliczanie wartości granicznych tych funkcji oraz transformat.

Twierdzenie 2.7 (twierdzenie o wartości początkowej). *Jeżeli*

1. $\mathcal{Z}[f(n)] = F(z)$,
2. *istnieje granica* $\lim_{n \rightarrow 0} f(n)$,

to

$$\lim_{n \rightarrow 0} f(n) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z).$$

Twierdzenie 2.8 (twierdzenie o wartości końcowej). *Jeżeli*

1. $\mathcal{Z}[f(n)] = F(z)$,
2. *istnieje granica* $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)$,

to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z).$$

Twierdzenie odwrotne do twierdzenia 2.8 nie jest prawdziwe. Wystarczy rozważyć funkcję $f(n) = (-1)^n$. Ponieważ $\mathcal{Z}[(-1)^n] = \frac{z}{z+1}$, więc

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z(z-1)}{z+1} = 0,$$

ale jak łatwo zauważyć, granica $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ nie istnieje.

Podobnie jak w przypadku transformaty Laplace'a, na podstawie twierdzenia 2.7 można wyznaczyć wartości początkowe ciągu $f(n)$, znając tylko jego $\mathcal{Z}$ -transformatę (patrz podrozdział 1.4).

2.6. Splot dyskretny

Idea operacji splotu dyskretnego (mnożenia splotowego) jest podobna do idei operacji splotu w przypadku ciągłym (patrz rozdział 1).

Definicja 2.3. *Niech f i g będą funkcjami dyskretnymi określonymi dla $n \in \mathbb{N}_0$. Splotem (jednostronnym) funkcji f i g , oznaczanym jako $f * g$, nazywamy funkcję dyskretną $h : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ określoną jako*

$$\sum_{i=0}^n f(i)g(n-i). \quad (2.9)$$

Na podstawie powyższej definicji splotu łatwo można wykazać, że spłot jest operacją:

1. przemianą, to znaczy $f(n) * g(n) = g(n) * f(n)$,
2. łączną, to znaczy $(f(n) * g(n)) * h(n) = f(n) * (g(n) * h(n))$,
3. rozdzielną względem dodawania, to znaczy $f(n) * (g(n) + h(n)) = f(n) * g(n) + f(n) * h(n)$.

Przykład 2.9.

Wyznaczyć spłot funkcji dyskretnych:

- a) $f(n) = \mathbf{1}(n)$ i $g(n) = \mathbf{1}(n)$; b) $f(n) = \mathbf{1}(n)$ i $g(n) = n$; c) $f(n) = n$ i $g(n) = n$.

Rozwiązanie:

- a) Korzystając z definicji 2.3, otrzymujemy:

$$f(n) * g(n) = \sum_{i=0}^n \mathbf{1}(i) \cdot \mathbf{1}(n-i) = \underbrace{1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \dots + 1 \cdot 1}_{n+1} = n+1.$$

- b) Podobnie jak wyżej, korzystając z definicji 2.3, ale i z tego, że operacja splotu jest operacją przemianą, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} f(n) * g(n) &= \sum_{i=0}^n \mathbf{1}(i) \cdot (n-i) = \sum_{i=0}^n n \cdot \mathbf{1}(n-i) = \\ &= \sum_{i=0}^n n \cdot 1 = 0 + 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1+n}{2}n. \end{aligned}$$

- c) Podobnie jak wyżej, otrzymujemy:

$$f(n) * g(n) = \sum_{i=0}^n i \cdot (n-i) = n \sum_{i=0}^n i - \sum_{i=0}^n i^2.$$

Ponieważ

$$\sum_{i=0}^n i = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1+n}{2}n$$

jako suma n wyrazów ciągu arytmetycznego o różnicy 1 oraz

$$\sum_{i=0}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

co można wykazać indukcyjnie [9, 16], zatem

$$n * n = \frac{1+n}{2}n + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

□

Twierdzenie 2.9 (twierdzenie Borela dla funkcji dyskretnych). Jeżeli $\mathcal{Z}$ -transformatami funkcji dyskretnych f i g są odpowiednio $F(z)$ dla $|z| > \frac{1}{R_1}$ i $G(z)$ dla $|z| > \frac{1}{R_2}$, to

$$\mathcal{Z}[f(n) * g(n)] = \mathcal{Z}[f(n)] \cdot \mathcal{Z}[g(n)] = F(z) \cdot G(z)$$

dla $|z| > \max\left(\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}\right)$.

Przykład 2.10.

Korzystając z dyskretnej wersji twierdzenia Borela, wyznaczyć $\mathcal{Z}$ -transformatę spłotu funkcji:

a) $f(n) = n$ i $g(n) = n$; b) $f(n) = e^n$ i $g(n) = \sin 3n$; c) $f(n) = \sum_{i=0}^n 2^n \cos \frac{\pi}{6}(n-i)$.

Rozwiązanie:

a) Najpierw zauważmy, że $\mathcal{Z}[n] = \frac{z}{(z-1)^2}$. Zatem na mocy twierdzenia 2.9 mamy:

$$\mathcal{Z}[f(n) * g(n)] = \mathcal{Z}[n * n] = \mathcal{Z}[n] \cdot \mathcal{Z}[n] = \frac{z^2}{(z-1)^4}.$$

b) Ponieważ $\mathcal{Z}[e^n] = \frac{z}{z-e}$ oraz $\mathcal{Z}[\sin 3n] = \frac{z \sin 3}{z^2 - 2z \cos 3 + 1}$, więc

$$\mathcal{Z}[f(n) * g(n)] = \mathcal{Z}[e^n * \sin 3n] = \mathcal{Z}[e^n] \cdot \mathcal{Z}[\sin 3n] = \frac{z^2 \sin 3}{(z-e)(z^2 - 2z \cos 3 + 1)}.$$

c) Z definicji spłotu wynika, że

$$\sum_{i=0}^n 2^n \cos \frac{\pi}{6}(n-i) = 2^n * \cos \frac{\pi}{6} n.$$

Zatem, korzystając z dyskretnej wersji twierdzenia Borela, czyli z twierdzenia 2.9, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\left[\sum_{i=0}^n 2^n \cos \frac{\pi}{6}(n-i)\right] &= \mathcal{Z}[2^n] \cdot \mathcal{Z}\left[\cos \frac{\pi}{6} n\right] = \\ &= \frac{z}{z-2} \cdot \frac{z(z - \cos \frac{\pi}{6})}{z^2 - 2z \cos \frac{\pi}{6} + 1} = \frac{z^2(2z - \sqrt{3})}{2(z-2)(z^2 - \sqrt{3}z + 1)}. \end{aligned}$$

□

Zadania

Zadanie 2.7.

Wyznaczyć splot funkcji:

a) $f(n) = \{1, 2, 3\}$ i $g(n) = \{1, -1, 1\}$;

b) $f(n) = \{1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$ i $g(n) = \{0, 1, 0, 1, \dots\}$;

c) $f(n) = (-1)^n$ i $g(n) = \cos \frac{n\pi}{2}$;

d*) $f(n) = \cos \frac{n\pi}{2}$ i $g(n) = \sin \frac{n\pi}{2}$.

Zadanie 2.8.

Wyznaczyć $\mathcal{Z}$ -transformaty funkcji:

a) $f(n) = 7^n * 5^n$;

b) $f(n) = e^n \sin 3n * \{1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$;

c) $f(n) = \{1, -1, 1, -1, \dots\} * \{0, 0, 0, 0, 0, 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$;

d) $f(n) = \sum_{i=0}^n \cos \frac{\pi}{4} (n-i) \mathbf{1}(i)$;

e) $f(n) = \sum_{i=0}^n 2^{n-i} \sin \frac{\pi}{4} i$;

f) $f(n) = \cos \frac{\pi}{2} i * \sin \frac{\pi}{6} (n-i)$;

g) $f(n) = \sum_{i=0}^n 2^i \cos \frac{\pi}{6} (n-i)$;

h) $f(n) = \sum_{i=0}^n i^2 2^i \sin \frac{\pi}{6} (n-i)$.

Odpowiedzi:

2.7 a) $\{1, 1, 2, -1, 3\}$; b) $\frac{1}{2} [(-1)^{n+1} n - 1]$; c) $\{1, -1, 0, 0, 1, -1, 0, 0, \dots\}$;
d*) $\frac{1}{2} (n+1) \sin \frac{n\pi}{2}$.

2.8 a) $\frac{z^2}{(z-5)(z-7)}$; b) $\frac{ez^3 \sin 3}{(z^2-1)(z^2-2ez \cos 3 + e^2)}$; c) $\frac{1}{z^3(z+1)^2}$; d) $\frac{z^2(z-\frac{\sqrt{2}}{2})}{(z-1)(z^2-\sqrt{2}z+1)}$;
e) $\frac{\sqrt{2}z^2}{2(z-2)(z^2-\sqrt{2}z+1)}$; f) $\frac{z^3}{2(z^2+1)(z^2-\sqrt{3}z+1)}$; g) $\frac{z^2(z-\frac{\sqrt{3}}{2})}{(z-2)(z^2-\sqrt{3}z+1)}$; h) $\frac{z^2(z+2)}{(z-2)^3(z^2-\sqrt{3}z+1)}$.

2.7. Odwrotna $\mathcal{Z}$ -transformata

Podobnie jak w przypadku transformaty Laplace'a, w wielu zagadnieniach praktycznych istnieje potrzeba wyznaczenia odwrotnej $\mathcal{Z}$ -transformaty, oznaczanej jako $\mathcal{Z}^{-1}$, na podstawie znajomości transformaty prostej $\mathcal{Z}$. Formalnie zatem możemy zapisać

$$\mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = f(n).$$

Należy pamiętać, że odwrotna $\mathcal{Z}$ -transformata daje informacje tylko o dyskretnych wartościach funkcji/ciągu $f(n)$. Innymi słowy, transformata $\mathcal{Z}$ zachowuje informacje o funkcji f tylko w chwilach próbkowania $t_n = nT$ co okres T , gdzie T jest stałą dodatnią.

Odwrotną $\mathcal{Z}$ -transformatę można wyznaczyć, stosując jedną z poniższych metod:

- A. metodę rozkładu funkcji $F(z)$ na ułamki proste,
- B. metodę szeregów potęgowych,
- C. metodę całki odwrotnej (metodę residuów),
- D. wykorzystanie własności granicznych.

Poniżej każda z tych metod zostanie omówiona szczegółowo. Należy jednak zaznaczyć, że w dalszym ciągu przyjmujemy, że dla każdej funkcji dyskretnej $f(n)$ zachodzi $f(n) = 0$ dla $n = -1, -2, -3, \dots$

2.7.1. Metody wyznaczania odwrotnej $\mathcal{Z}$ -transformaty

A. Metoda rozkładu na ułamki proste

Podobnie jak w przypadku odwrotnej transformaty Laplace'a, zwykle $F(z)$ jest funkcją wymierną, tzn.

$$F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0}{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}, \quad (2.10)$$

gdzie $P(z) = b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_1 z + b_0$ i $Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ są wielomianami zmiennej zespolonej z . Ponieważ $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(k)}{z^k}$, zatem $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = f(0)$, a to oznacza, że stopień wielomianu P jest nie mniejszy niż stopień wielomianu Q (czyli $m \geq n$). Możemy przedstawić funkcję F jako sumę ułamków prostych, a następnie skorzystać z tablic $\mathcal{Z}$ -transformaty (Tablica B.2).

Uwaga 2.1. Ponieważ funkcja $F(z)$ dana wzorem (2.10) nie jest funkcją wymierną właściwą, w praktyce na ułamki proste dokonuje się rozkładu funkcji

$$G(z) = \frac{F(z)}{z},$$

a następnie funkcję dyskretną $f(n)$ wyznacza się jako odwrotną $\mathcal{Z}$ -transformatę funkcji $zG(z)$, czyli

$$f(n) = \mathcal{Z}^{-1}[zG(z)] = \mathcal{Z}^{-1}[F(z)].$$

Sposób wyznaczania odwrotnej $\mathcal{Z}$ -transformaty przy zastosowaniu rozkładu funkcji $F(z)$ na ułamki proste jest podobny do analogicznej metody wyznaczania odwrotnej transformaty Laplace'a, szerzej omówionej w rozdziale 1.

Przykład 2.11.

Metodą rozkładu na ułamki proste wyznaczyć odwrotną $\mathcal{Z}$ -transformatę funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a) } F(z) &= \frac{z^2 - z}{z^3 - 4z^2 + z + 6}; & \text{b) } F(z) &= \frac{z}{z^3 - z^2 - 5z - 3}; & \text{c) } F(z) &= \frac{z}{(z+1)^2(z^2+1)}; \\ \text{d) } F(z) &= \frac{z-1}{(3z+4)^2(z-5)}. \end{aligned}$$

Rozwiązanie:

a) Na ułamki proste rozkładamy funkcję

$$G(z) = \frac{F(z)}{z} = \frac{z-1}{z^3 - 4z^2 + z + 6}.$$

Korzystając ze schematu Hornera, łatwo zauważyć, że

$$z^3 - 4z^2 + z + 6 = (z+1)(z-2)(z-3),$$

czyli

$$G(z) = \frac{z-1}{(z+1)(z-2)(z-3)}.$$

Ponieważ $z_1 = -1$, $z = 2$, $z = 3$ są biegunami jednokrotnymi funkcji $G(z)$, więc

$$\frac{z-1}{z^3 - 4z^2 + z + 6} = \frac{1}{6} \frac{1}{z+1} - \frac{5}{3} \frac{1}{z-2} + \frac{3}{2} \frac{1}{z-3}.$$

Zatem

$$F(z) = \frac{1}{6} \frac{z}{z+1} - \frac{5}{3} \frac{z}{z-2} + \frac{3}{2} \frac{z}{z-3},$$

a stąd, korzystając z tablic B.2, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1}[F(z)] &= \frac{1}{6}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z+1}\right] - \frac{5}{3}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-2}\right] + \frac{3}{2}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-3}\right] = \\ &= \frac{1}{6}(-1)^n - \frac{5}{3}2^n + \frac{3}{2}3^n.\end{aligned}$$

b) Na ułamki proste rozkładamy funkcję

$$G(z) = \frac{F(z)}{z} = \frac{1}{z^3 - z^2 - 5z - 3} = \frac{1}{(z+1)^2(z-3)}.$$

Ponieważ $z_1 = -1$ jest biegunem dwukrotnym, a $z = 3$ – biegunem jednokrotnym, więc schemat rozkładu funkcji $G(z)$ na ułamki proste jest następujący:

$$G(z) = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2} + \frac{C}{z-3}.$$

Po wyznaczeniu współczynników A, B, C otrzymujemy:

$$\frac{1}{(z+1)^2(z-3)} = -\frac{1}{16}\frac{1}{z+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{16}\frac{1}{z-3}.$$

Zatem

$$F(z) = -\frac{1}{16}\frac{z}{z+1} - \frac{1}{4}\frac{z}{(z+1)^2} + \frac{1}{16}\frac{z}{z-3}.$$

Korzystając z tablic B.2, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1}[F(z)] &= -\frac{1}{16}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z+1}\right] - \frac{1}{4}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z+1)^2}\right] + \frac{1}{16}\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-3}\right] = \\ &= -\frac{1}{16}(-1)^n - \frac{1}{4}n(-1)^n + \frac{1}{16}3^n.\end{aligned}$$

c) Podobnie jak wcześniej, na ułamki proste rozkładamy funkcję

$$G(z) = \frac{F(z)}{z} = \frac{1}{(z+1)^2(z^2+1)}.$$

Ponieważ schemat rozkładu funkcji $G(z)$ na ułamki proste jest następujący:

$$G(z) = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{(z+1)^2} + \frac{Cz+D}{z^2+1},$$

więc

$$G(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{2}\frac{z}{z^2+1}.$$

Zatem

$$F(z) = \frac{1}{2} \frac{z}{z+1} + \frac{1}{2} \frac{z}{(z+1)^2} - \frac{1}{2} \frac{z^2}{z^2+1}.$$

Zauważmy, że $\frac{z^2}{z^2+1} = \frac{z(z-\cos\frac{\pi}{2})}{z^2-2z\cos\frac{\pi}{2}+1}$, zatem, korzystając z tablic B.2, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1}[F(z)] &= \frac{1}{2} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z+1}\right] + \frac{1}{2} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(z+1)^2}\right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z(z-\cos\frac{\pi}{2})}{z^2-2z\cos\frac{\pi}{2}+1}\right] = \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{2}n(-1)^n - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2}n. \end{aligned}$$

d) Rozkładając funkcję $G(z) = \frac{F(z)}{z} = \frac{z-1}{(3z+4)^2 z(z-5)}$ na ułamki proste, otrzymujemy:

$$G(z) = -\frac{11}{5} \frac{1}{(3z+4)^2} + \frac{3}{5} \frac{1}{z} + \frac{6}{5} \frac{1}{z-5},$$

a stąd

$$F(z) = -\frac{11}{5} \frac{z}{(3z+4)^2} + \frac{3}{5} \cdot 1 + \frac{6}{5} \frac{z}{z-5}.$$

Zatem

$$\mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = -\frac{11}{5} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(3z+4)^2}\right] + \frac{3}{5} \cdot \mathcal{Z}^{-1}[1] + \frac{6}{5} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-5}\right].$$

Ponieważ

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{(3z+4)^2}\right] &= \frac{3}{4} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z \cdot \frac{4}{3}}{3(z+\frac{4}{3})^2}\right] = \\ &= \frac{1}{12} \mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{\frac{4}{3}z}{(z+\frac{4}{3})^2}\right] = \frac{1}{12}n\left(-\frac{4}{3}\right)^n \end{aligned}$$

oraz

$$\mathcal{Z}^{-1}[1] = \delta(n),$$

zatem

$$\mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = -\frac{11}{60}n\left(-\frac{4}{3}\right)^n + \delta(n) + \frac{6}{5}5^n.$$

□

B. Metoda szeregów potęgowych

Metoda ta opiera się bezpośrednio na definicji przekształcenia $\mathcal{Z}$ (definicja 2.2). Mianowicie, rozwijając funkcję $F(z)$ w szereg potęgowy względem z^{-1} w obszarze jego zbieżności $|z| > R$, otrzymujemy:

$$F(z) = f(0) + f(1)z^{-1} + f(2)z^{-2} + f(3)z^{-3} + \dots \quad (2.11)$$

Zakładamy, że w postaci ogólnej $\mathcal{Z}$ -transformatę można przedstawić jako

$$F(z) = a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + \dots \quad (2.12)$$

Porównując współczynniki $f(0), f(1), f(2), f(3), \dots$ szeregu (2.11) ze współczynnikami szeregu (2.12) można odczytać wartości funkcji $f(n)$ w dowolnej chwili dyskretnej $n = 0, 1, 2, \dots$, mianowicie

$$f(n) = a_n.$$

Jak widać, idea metody szeregów potęgowych jest prosta. Co więcej, metoda ta jest wygodna w przypadku obliczeń numerycznych. Można ją z powodzeniem stosować wtedy, gdy poszukuje się kilku początkowych wartości funkcji dyskretnej $f(n)$. Sporą wadą metody szeregów potęgowych jest trudność wyznaczenia zwartej postaci ciągu $f(n)$.

Uwaga 2.2. Jeżeli $F(z)$ jest funkcją wymierną, czyli jeżeli $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, gdzie $P(z)$ i $Q(z)$ są wielomianami, to w celu przedstawienia tej funkcji w postaci szeregu (2.11) wystarczy wielomian $P(z)$ podzielić przez wielomian $Q(z)$.

Zauważmy, że szereg (2.11) jest szeregiem Taylora funkcji $F(z^{-1})$ rozwiniętej wokół punktu $z^{-1} = 0$. Jak wiadomo z kursu analizy matematycznej [3, 22], współczynniki tego szeregu wyrażają się następująco:

$$f(n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n F(z^{-1})}{dz^n} \Big|_{z=0}. \quad (2.13)$$

Przykład 2.12.

Metodą szeregów potęgowych wyznaczyć odwrotną $\mathcal{Z}$ -transformatę funkcji:

$$\text{a) } F(z) = \frac{z}{z-2}; \quad \text{b) } F(z) = \frac{z^2 - z}{z^2 - 2z - 3}.$$

Rozwiązanie:

- a) Dzieląc licznik funkcji $F(z)$ przez jej mianownik, jak łatwo sprawdzić, otrzymujemy:

$$F(z) = z : (z - 2) = 1 + 2z^{-1} + 4z^{-2} + 8z^{-3} + \dots$$

Stąd

$$f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 8, \dots$$

Nietrudno zauważyć, że otrzymane wyrazy są kolejnymi potęgami liczby 2, a zatem

$$\mathcal{Z}^{-1}[F(z)] = 2^n.$$

- b) Podobnie jak w powyższym przykładzie, dzielimy licznik funkcji $F(z)$ przez jej mianownik, otrzymując:

$$F(z) = (z^2 - z) : (z^2 - 2z - 3) = 1 + z^{-1} + 5z^{-2} + 13z^{-3} + 41z^{-4} + \dots$$

Stąd

$$f(0) = 1, f(1) = 1, f(2) = 5, f(3) = 13, f(4) = 41, \dots$$

Teraz ustalenie zależności między poszczególnymi wyrazami funkcji dyskretnej/ciągu $f(n)$ nie jest tak proste i oczywiste jak to było w przykładzie a).

□

Przykład 2.13.

Wykorzystując rozwinięcie funkcji $F(z^{-1})$ w szereg Taylora, wyznaczyć odwrotną $\mathcal{Z}$ -transformatę funkcji:

$$\text{a) } F(z) = \frac{z+1}{z^2+z-2}; \quad \text{b) } F(z) = \ln \frac{z}{z-1} \text{ dla } |z| > 1.$$

Rozwiązanie:

- a) W tym przypadku, w celu łatwiejszego i szybszego wyznaczenia pochodnych funkcji $F(z^{-1})$ najpierw przedstawmy tę funkcję jako sumę ułamków prostych:

$$F(z) = \frac{2}{3} \frac{1}{z-1} + \frac{1}{3} \frac{1}{z+2}.$$

Zauważmy, że daną funkcję można przedstawić jako funkcję zależną od z^{-1} :

$$F(z) = \frac{2}{3} z^{-1} \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{3} z^{-1} \frac{1}{1+2z^{-1}}. \quad (2.14)$$

Podstawiając w (2.14) $v := z^{-1}$, otrzymujemy:

$$F(v^{-1}) = \frac{2}{3} \frac{v}{1-v} + \frac{1}{3} \frac{v}{1+2v},$$

a stąd

$$\begin{aligned}\frac{d}{dv}F(v^{-1}) &= \frac{2}{3} \frac{1}{(1-v)^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{(1+2v)^2}, \\ \frac{d^2}{dv^2}F(v^{-1}) &= -\frac{4}{3} \frac{1}{(1-v)^3} - \frac{4}{3} \frac{1}{(1+2v)^3}, \\ \frac{d^3}{dv^3}F(v^{-1}) &= \frac{4}{(1-v)^4} + \frac{8}{(1+2v)^4}, \\ &\vdots\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}f(0) &= 0, \\ f(1) &= \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} F\left(\frac{1}{z}\right) \Big|_{z=0} = 1, \\ f(2) &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} F\left(\frac{1}{z}\right) \Big|_{z=0} = -\frac{4}{3}, \\ f(3) &= \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dz^3} F\left(\frac{1}{z}\right) \Big|_{z=0} = 2, \\ &\vdots\end{aligned}$$

b) Łatwo zauważyć, że

$$F(z) = \ln \frac{z}{z-1} = \ln \frac{1}{1-z^{-1}}.$$

Podstawiając $v := z^{-1}$, otrzymujemy:

$$F(v^{-1}) = \ln \frac{1}{1-v}.$$

Zatem

$$\begin{aligned}\frac{d}{dv}F(v^{-1}) &= \frac{1}{1-v}, \quad \frac{d^2}{dv^2}F(v^{-1}) = \frac{1}{(1-v)^2}, \quad \frac{d^3}{dv^3}F(v^{-1}) = \frac{2}{(1-v)^3}, \\ \frac{d^4}{dv^4}F(v^{-1}) &= \frac{6}{(1-v)^4}, \dots\end{aligned}$$

a stąd

$$\begin{aligned}
 f(0) &= 0, \\
 f(1) &= \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} F\left(\frac{1}{z}\right) \Big|_{z=0} = 1, \\
 f(2) &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2} F\left(\frac{1}{z}\right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{2}, \\
 f(3) &= \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dz^3} F\left(\frac{1}{z}\right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{3}, \\
 f(4) &= \frac{1}{4!} \frac{d}{dz} F\left(\frac{1}{z}\right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{4}, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Na tej podstawie można wnioskować, że $f(0) = 0$ oraz $f(n) = \frac{1}{n}$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$

□

C. Metoda całki odwrotnej (metoda residuów)

Podobnie jak w przypadku transformaty Laplace'a, tak i tu metoda całki odwrotnej (metoda residuów) bazuje na twierdzeniu Cauchy'ego dla całek zespolonych [10, 4]. Można pokazać, że korzystając z twierdzenia o residuach [5]

$$\mathcal{L}^{-1}[F(z)] = \sum_{z=z_k} \operatorname{res} F(z) z^{n-1}, \quad (2.15)$$

gdzie z_k są biegunami funkcji $F(z)$. Sposób wyznaczania residuów funkcji zmiennej zespolonej, zarówno w przypadku biegunów jednokrotnych, jak i wielokrotnych, został omówiony w rozdziale 1 w uwadze 1.2.

Przykład 2.14.

Metodą residuów wyznaczyć $\mathcal{L}^{-1}$ -transformatę funkcji:

$$\text{a) } F(z) = \frac{z+3}{z^2-7z+12}; \quad \text{b) } F(z) = \frac{z+1}{(z-3)(z^2+4)}; \quad \text{c) } F(z) = \frac{3z}{(z-1)(z-2)^2}.$$

Rozwiązanie:

a) Zauważmy, że

$$F(z) = \frac{z+3}{z^2-7z+12} = \frac{z+3}{(z-3)(z-4)},$$

a $z_1 = 3$ i $z_2 = 4$ są biegunami jednokrotnymi funkcji $F(z)$. Zatem

$$\operatorname{res}_{z=3} F(z) z^{n-1} = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{z+3}{(z-3)(z-4)} (z-3) z^{n-1} = \lim_{z \rightarrow 3} \frac{(z+3) z^{n-1}}{z-4} = -6 \cdot 3^{n-1}$$

oraz

$$\operatorname{res}_{z=4} F(z) z^{n-1} = \lim_{z \rightarrow 4} \frac{z+3}{(z-3)(z-4)} (z-4) z^{n-1} = \lim_{z \rightarrow 4} \frac{(z+3) z^{n-1}}{z-3} = 7 \cdot 4^{n-1}.$$

Zatem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{z+3}{z^2-7z+12} \right] &= \operatorname{res}_{z=3} \frac{z+3}{z^2-7z+12} z^{n-1} + \operatorname{res}_{z=4} \frac{z+3}{z^2-7z+12} z^{n-1} = \\ &= -6 \cdot 3^{n-1} + 7 \cdot 4^{n-1}. \end{aligned}$$

b) Ponieważ $z_1 = 3$, $z_2 = 2j$, $z_3 = -2j$ są biegunami jednokrotnymi funkcji $F(z) = \frac{z+1}{(z-3)(z^2+4)}$, więc

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=3} F(z) z^{n-1} &= \lim_{z \rightarrow 3} \frac{z+1}{(z-3)(z^2+4)} (z-3) z^{n-1} = \frac{4}{13} 3^{n-1}, \\ \operatorname{res}_{z=2j} F(z) z^{n-1} &= \lim_{z \rightarrow 2j} \frac{z+1}{(z-3)(z+2j)(z-2j)} (z-2j) z^{n-1} = \frac{2j+1}{(2j-3)4j} (2j)^{n-1}, \\ \operatorname{res}_{z=-2j} F(z) z^{n-1} &= \lim_{z \rightarrow -2j} \frac{z+1}{(z-3)(z+2j)(z-2j)} (z+2j) z^{n-1} = \\ &= \frac{-2j+1}{(2j+3)4j} (-2j)^{n-1}. \end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{z+1}{(z-3)(z^2+4)} \right] z^{n-1} &= \operatorname{res}_{z=3} \left[\frac{z+1}{(z-3)(z^2+4)} \right] z^{n-1} + \\ &+ \operatorname{res}_{z=2j} \left[\frac{z+1}{(z-3)(z^2+4)} \right] z^{n-1} + \operatorname{res}_{z=-2j} \left[\frac{z+1}{(z-3)(z^2+4)} \right] z^{n-1} = \\ &= \frac{4}{13} 3^{n-1} + \frac{2j+1}{(2j-3)4j} (2j)^{n-1} + \frac{-2j+1}{(2j+3)4j} (-2j)^{n-1}. \end{aligned}$$

c) Najpierw zauważmy, że $z_1 = 1$ jest biegunem jednokrotnym, a $z_2 = 2$ – biegunem dwukrotnym funkcji $F(z) = \frac{3z}{(z-1)(z-2)^2}$. Korzystając z punktu 1. uwagi 1.2 (rozdział 1), otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{z=1} F(z)z^{n-1} &= \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{3z}{(z-1)(z-2)^2} (z-1)z^{n-1} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{3z^n}{(z-2)^2} = 3.\end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę, że $z_2 = 2$ jest biegunem dwukrotnym funkcji $F(z)$ i korzystając z punktu 2. uwagi 1.2 (rozdział 1) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{z=2} F(z)z^{n-1} &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \left(\frac{3z}{(z-1)(z-2)^2} (z-2)^2 z^{n-1} \right) = \\ &= \lim_{z \rightarrow 2} \frac{d}{dz} \left(\frac{3z^n}{z-1} \right) = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{3nz^n - 3nz^{n-1} - 3z^n}{(z-1)^2} = 3 \cdot 2^n (n-1).\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{3z}{(z-1)(z-2)^2} \right] &= \operatorname{res}_{z=1} \frac{3z}{(z-1)(z-2)^2} z^{n-1} + \operatorname{res}_{z=2} \frac{3z}{(z-1)(z-2)^2} z^{n-1} = \\ &= 3 + 3 \cdot 2^n (n-1).\end{aligned}$$

□

D. Wykorzystanie własności granicznych

Na podstawie twierdzenia 2.7, podobnie jak w przypadku transformaty Laplace'a, możemy wnioskować, że jeżeli $f(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$, to

$$\begin{aligned}z(F(z) - f(0)) &= f(1) + f(2)z^{-1} + f(3)z^{-2} + \dots \\ z^2(F(z) - f(0) - f(1)z^{-1}) &= f(2) + f(3)z^{-1} + f(4)z^{-2} + \dots \\ z^3(F(z) - f(0) - f(1)z^{-1} - f(2)z^{-2}) &= f(3) + f(3)z^{-1} + f(4)z^{-2} + \dots \\ &\vdots\end{aligned}$$

Zatem

$$\begin{aligned}
 f(0) &= \lim_{z \rightarrow \infty} F(z), \\
 f(1) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z(F(z) - f(0)), \\
 f(2) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^2(F(z) - f(0) - f(1)z^{-1}), \\
 f(3) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^3(F(z) - f(0) - f(1)z^{-1} - f(2)z^{-2}), \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Przykład 2.15.

Korzystając z twierdzenia o wartości początkowej, wyznaczyć $\mathcal{Z}^{-1}$ -transformatę funkcji $F(z) = \frac{z+1}{z^2+5z+7}$.

Rozwiązanie:

Jak łatwo zauważyć, z (2.16) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
 f(0) &= \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z+1}{z^2+5z+7} = 0, \\
 f(1) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z \frac{z+1}{z^2+5z+7} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{z^2+z}{z^2+5z+7} = 1, \\
 f(2) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \left(\frac{z+1}{z^2+5z+7} - \frac{1}{z} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{-4z^2-7z}{z^2+5z+7} = -4, \\
 f(3) &= \lim_{z \rightarrow \infty} z^3 \left(\frac{z+1}{z^2+5z+7} - \frac{1}{z} + \frac{4}{z^2} \right) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{13z^2+28z}{z^2+5z+7} = 13, \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

□

Zadania

Zadanie 2.9.

Stosując rozkład na ułamki proste, wyznaczyć odwrotną $\mathcal{Z}$ -transformatę funkcji:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } F(z) &= \frac{2z+3}{z(z-3)(z-2)}; & \text{b) } F(z) &= \frac{-3z+1}{z^3-4z}; & \text{c) } F(z) &= \frac{z^2+2z-3}{z(z-2)(z+1)^2}; \\
 \text{d) } F(z) &= \frac{4z-3}{(z+2)^2(z-1)}; & \text{e) } F(z) &= \frac{1}{z^3-6z^2+11z-6}; & \text{f) } F(z) &= \frac{2z+3}{z^3+z^2+z+1};
 \end{aligned}$$

$$\text{g) } F(z) = \frac{2z-1}{z^3+z}; \quad \text{h) } F(z) = \frac{-1}{(z+1)^2(z-2)^2}; \quad \text{i) } F(z) = \frac{-1}{(z^2+1)(z-2)^2}.$$

Zadanie 2.10.

Metodą szeregów potęgowych wyznaczyć odwrotną $\mathcal{Z}$ -transformatę funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a) } F(z) &= \frac{2z}{z-3}; & \text{b) } F(z) &= \frac{2z+1}{(z-2)(z-1)}; & \text{c) } F(z) &= \frac{z}{z^2+2z+3}; \\ \text{d) } F(z) &= \frac{-3z+1}{z^2+4z-1}; & \text{e) } F(z) &= \frac{z}{z^3+z+1}; & \text{f) } F(z) &= \frac{1}{z^2+1}. \end{aligned}$$

Zadanie 2.11.

Stosując metodę residuów, wyznaczyć odwrotną $\mathcal{Z}$ -transformatę funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a) } F(z) &= \frac{3z-4}{(z-3)(z+1)}; & \text{b) } F(z) &= \frac{z+1}{z(z+3)(z-2)}; & \text{c) } F(z) &= \frac{2z-1}{z^3-4z}; \\ \text{d) } F(z) &= \frac{z^2+3}{z(z-2)(z+1)^2}; & \text{e) } F(z) &= \frac{z^3}{(z^2+1)^2}; & \text{f) } F(z) &= \frac{z-2}{(z^2+1)(z+1)}; \\ \text{g) } F(z) &= \frac{z-2}{(z+1)^2(z+2)}. \end{aligned}$$

Zadanie 2.12.

Korzystając z własności granicznych, wyznaczyć odwrotną $\mathcal{Z}$ -transformatę funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a) } F(z) &= \frac{2z+1}{z+2}; & \text{b) } F(z) &= \frac{3z+4}{(z+1)(z-2)}; & \text{c) } F(z) &= \frac{z}{z^2+z+1}; \\ \text{d) } F(z) &= \frac{z+4}{z^2+3z+1}. \end{aligned}$$

Odpowiedzi:

$$\begin{aligned} \mathbf{2.9} \text{ a) } & -\frac{7}{4}2^n + 3^n + \frac{3}{4}\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1); \text{ b) } -\frac{7}{16}(-2)^n - \frac{5}{16}2^n + \frac{3}{4}\delta(n) - \frac{1}{4}\delta(n-1); \\ \text{c) } & \frac{28}{9}(-1)^n - \frac{4}{3}n(-1)^n + \frac{5}{36}2^n - \frac{13}{4}\delta(n) + \frac{3}{2}\delta(n-1); \\ \text{d) } & \frac{11}{12}n(-2)^n - \frac{31}{36}(-2)^n + \frac{3}{4}\delta(n) + \frac{1}{9}; \text{ e) } \frac{3^n}{6} - \frac{2^n}{2} - \frac{\delta(n)}{6} + \frac{1}{2}; \\ \text{f) } & -\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}n - \frac{5}{2}\cos\frac{\pi}{2}n - \frac{1}{2}(-1)^n + 3\delta(n); \text{ g) } \sin\frac{\pi}{2}n - 2\cos\frac{\pi}{2}n + 2\delta(n) - \delta(n-1); \\ \text{h) } & \frac{5}{27}(-1)^n - \frac{1}{9}n(-1)^n - \frac{1}{36}n2^n + \frac{7}{108}2^n - \frac{1}{4}\delta(n); \\ \text{i) } & -\frac{4}{25}\sin\frac{\pi}{2}n + \frac{3}{25}\cos\frac{\pi}{2}n - \frac{1}{20}n2^n + \frac{13}{100}2^n - \frac{1}{4}\delta(n). \end{aligned}$$

2.10 a) $2 \cdot 3^n$; b) $\frac{5}{2}2^n + \frac{1}{2}\delta(n) - 3$; c) $\{0, 1, -2, 1, 4, -11, 10, 13, \dots\}$;
d) $\{0, -3, 13, -55, 233, -987, 4181, -17711, \dots\}$; e) $\{0, 0, 1, 0, -1, -1, 1, 2, \dots\}$;
f) $\sin \frac{\pi}{2}(n-1) + \delta(n)$.

2.11 a) $\frac{5}{12}3^n - \frac{7}{4}(-1)^n + \frac{4}{3}\delta(n)$; b) $\frac{2}{45}(-3)^n + \frac{3}{20}2^n - \frac{7}{36}\delta(n) - \frac{1}{6}\delta(n-1)$;
c) $\frac{5}{16}(-2)^n + \frac{3}{16}2^n - \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{4}\delta(n-1)$;
d) $-\frac{22}{9}(-1)^n + \frac{4}{3}n(-1)^n + \frac{7}{36}2^n + \frac{9}{4}\delta(n) - \frac{3}{2}\delta(n-1)$;
e) $\sin \frac{\pi}{2}n - \frac{1}{2}(n-1)\cos \frac{\pi}{2}(n-1)$; f) $\frac{3}{2}\sin \frac{\pi}{2}n + \frac{1}{2}\cos \frac{\pi}{2}n + \frac{3}{2}(-1)^n - 2\delta(n)$;
g) $2(-2)^n - (-1)^n - 3n(-1)^n - \delta(n)$.

2.12 a) $\frac{3}{2}(-2)^n + \frac{1}{2}\delta(n)$; b) $\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{5}{3}2^n - 2\delta(n)$; c) $\frac{2}{\sqrt{3}}\sin \frac{2\pi}{3}n$;
d) $\left(2 + \sqrt{5}\right)\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(2 - \sqrt{5}\right)\left(-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

2.8. Operatorowa metoda rozwiązywania równań różnicowych

Podobnie jak wykorzystywaliśmy transformatę Laplace'a do rozwiązywania wybranych typów równań różniczkowych (rozdział 1), tak i $\mathcal{Z}$ -transformatę możemy wykorzystać do rozwiązywania wybranych typów równań różnicowych.

Rozważmy liniowe równanie różnicowe n -tego rzędu zmiennej dyskretnej k , o stałych współczynnikach $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$:

$$a_n x(k+n) + a_{n-1} x(k+n-1) + \dots + a_1 x(k+1) + a_0 x(k) = f(k), \quad (2.17)$$

gdzie $f(k)$ jest daną funkcją dyskretną (danym ciągiem), a $x(k)$ – funkcją dyskretną, której poszukujemy. Zakładamy, że $a_n \neq 0$ oraz że są spełnione warunki początkowe

$$x(0) = x_0, x(1) = x_1, \dots, x(n-1) = x_{n-1}.$$

Równanie (2.17) krócej można zapisać jako

$$\sum_{j=0}^n a_j x(k+j) = f(k).$$

Jeśli $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z)$, to przekształcając to równanie za pomocą $\mathcal{Z}$ -transformaty (i korzystając z twierdzenia 2.4), otrzymujemy:

$$\sum_{j=1}^n a_j z^j \left[X(z) - \sum_{i=1}^k x_i z^{-i} \right] + a_0 X(z) = \mathcal{Z}[f(n)].$$

Z powyższego równania wyznaczamy $X(z)$, a następnie $x(k) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)]$.

Jak można zauważyć, idea operatorowej metody rozwiązywania równań różnicowych jest analogiczna do idei operatorowej metody rozwiązywania równań różniczkowych.

Przykład 2.16.

Metodą operatorową rozwiązać podane równanie różnicowe:

a) $x(n+2) + x(n+1) - 12x(n) = 2^n$, $x(0) = x(1) = 0$;

b) $x(n+2) + x(n+1) - 12x(n) = 2^n$, $x(0) = -1$, $x(1) = 1$;

c) $x(n+2) + x(n+1) = 2^n \cos \frac{\pi}{2}n$, $x(0) = x(1) = 0$

d) $x(n+3) - 7x(n+2) + 16x(n+1) - 12x(n) = n(-1)^n$, $x(0) = x(1) = 0$, $x(2) = 1$;

e) $\sum_{k=0}^n 3^k x(n-k) = (n+1)2^n$.

Rozwiązanie:

- a) Zauważmy, że dane równanie jest równaniem różnicowym drugiego rzędu. W celu jego rozwiązania stosujemy podany powyżej algorytm:

Krok I. Niech $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z)$. Pamiętając, że na podstawie twierdzenia 2.4, przy zerowych warunkach początkowych, tzn. przy $x(0) = 0$, $x(1) = 0$ otrzymujemy:

$$\mathcal{Z}[x(n+2)] = z^2 X(z) \quad \text{ i } \quad \mathcal{Z}[x(n+1)] = zX(z).$$

Równanie

$$x(n+2) + x(n+1) - 12x(n) = 2^n, \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 0$$

przekształcamy za pomocą $\mathcal{Z}$ -transformaty do równania algebraicznego postaci

$$z^2 X(z) + zX(z) - 12X(z) = \frac{z}{z-2}. \quad (2.18)$$

Krok II. Rozwiązujemy równanie algebraiczne (2.18), wyznaczając z niego $X(z)$:

$$X(z) = \frac{z}{(z-2)(z^2+z-12)} = \frac{z}{(z-2)(z+4)(z-3)}. \quad (2.19)$$

Krok III. Po rozłożeniu funkcji $\frac{X(z)}{z}$ na ułamki proste otrzymujemy:

$$\frac{X(z)}{z} = -\frac{1}{6} \frac{1}{z-2} + \frac{1}{42} \frac{1}{z+4} + \frac{1}{7} \frac{1}{z-3},$$

a stąd

$$X(z) = -\frac{1}{6} \frac{z}{z-2} + \frac{1}{42} \frac{z}{z+4} + \frac{1}{7} \frac{z}{z-3}.$$

Zatem

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = -\frac{1}{6}2^n + \frac{1}{42}(-4)^n + \frac{1}{7}3^n.$$

- b) Jak łatwo zauważyć, przykłady a) i b) różnią się tylko warunkami początkowymi. Ponieważ rozwiązując dane równanie wykonujemy takie same kroki jak poprzednio, nie będziemy ich wyszczególniać. Podobnie jak poprzednio, niech $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z)$. Przy zadanych warunkach początkowych, korzystając z twierdzenia 2.4, mamy:

$$\mathcal{Z}[x(n+2)] = z^2 X(z) + z^2 - z, \quad \mathcal{Z}[x(n+1)] = zX(z) + z.$$

Zatem przekształcając równanie

$$x(n+2) + x(n+1) - 12x(n) = 2^n, \quad x(0) = -1, \quad x(1) = 1$$

za pomocą $\mathcal{Z}$ -transformaty otrzymujemy:

$$X(z) = \frac{\frac{z}{z-2} - z^2}{z^2 + z - 12}.$$

Stąd

$$\frac{X(z)}{z} = -\frac{1}{6} \frac{1}{z-2} - \frac{23}{42} \frac{1}{z+4} - \frac{2}{7} \frac{1}{z-3},$$

czyli

$$X(z) = -\frac{1}{6} \frac{z}{z-2} - \frac{23}{42} \frac{z}{z+4} - \frac{2}{7} \frac{z}{z-3}.$$

Korzystając z przykładu 2.3, otrzymujemy:

$$x(n) = -\frac{1}{6}2^n - \frac{23}{42}(-4)^n - \frac{2}{7}3^n.$$

- c) Najpierw zauważmy, że $\mathcal{Z}[\cos \frac{\pi}{2}n] = \frac{z^2}{z^2+1}$, skąd na podstawie twierdzenia 2.2 (twierdzenie o podobieństwie/zmianie skali) mamy:

$$\mathcal{Z}\left[2^n \cos \frac{\pi}{2}n\right] = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^2}{\left(\frac{z}{2}\right)^2 + 1} = \frac{z^2}{z^2 + 4}.$$

Zatem przekształcając równanie

$$x(n+2) + x(n+1) = 2^n \cos \frac{\pi}{2}n, \quad x(0) = x(1) = 0$$

za pomocą $\mathcal{Z}$ -transformaty otrzymujemy:

$$z^2 X(z) + zX(z) = \frac{z^2}{z^2 + 4},$$

a stąd

$$X(z) = \frac{z}{(z^2 + 4)(z + 1)}$$

oraz

$$\frac{X(z)}{z} = -\frac{1}{5} \frac{z}{z^2 + 4} + \frac{1}{5} \frac{1}{z^2 + 4} + \frac{1}{5} \frac{1}{z + 1}.$$

Czyli

$$X(z) = -\frac{1}{5} \frac{z^2}{z^2 + 4} + \frac{1}{5} \frac{z}{z^2 + 4} + \frac{1}{5} \frac{z}{z + 1}.$$

Ponieważ $\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z^2}{z^2 + 4} \right] = 2^n \cos \frac{\pi}{2} n$ oraz $\mathcal{Z}^{-1} \left[\frac{z}{z^2 + 4} \right] = 2^n \sin \frac{\pi}{2} n$, więc

$$x(n) = \mathcal{Z}^{-1}[X(z)] = -\frac{1}{5} 2^n \cos \frac{\pi}{2} n + \frac{1}{5} 2^n \sin \frac{\pi}{2} n + \frac{1}{5} (-1)^n.$$

d) Ponieważ przy zadanych warunkach początkowych

$$\mathcal{Z}[x(n+3)] = z^3[X(z) - x(0) - x(1)z^{-1} - x(2)z^{-2}] = z^3 X(z) - z$$

oraz

$$\mathcal{Z}[x(n+2)] = z^2[X(z) - x(0) - x(1)z^{-1}] = z^2 X(z),$$

zatem przekształcając równanie

$$x(n+3) - 7x(n+2) + 16x(n+1) - 12x(n) = n(-1)^n$$

za pomocą $\mathcal{Z}$ -transformaty otrzymujemy:

$$z^3 X(z) - z - 7z^2 X(z) + 16zX(z) - 12X(z) = \frac{-z}{(z+1)^2}.$$

Stąd

$$X(z) = \frac{z^2(z+2)}{(z+1)^2(z^3 - 7z^2 + 16z - 12)} = \frac{z^2(z+2)}{(z+1)^2(z-2)^2(z-3)}.$$

Wyznaczając odwrotną $\mathcal{Z}$ -transformatę funkcji $X(z)$ (na przykład metodą rozkładu na ułamki proste lub metodą residuów), otrzymujemy:

$$x(n) = \left(-\frac{26}{27} - \frac{4}{9}n \right) 2^n + \left(\frac{11}{432} - \frac{1}{36}n \right) (-1)^n + \frac{15}{16} 3^n.$$

e) Zauważmy, że $\sum_{k=0}^n 3^k x(n-k) = 3^n * x(n)$. Zatem równanie

$$\sum_{k=0}^n 3^k x(n-k) = (n+1)2^n$$

można równoważnie zapisać jako

$$3^n * x(n) = (n+1)2^n.$$

Transformując obie strony tego równania za pomocą $\mathcal{Z}$ -transformaty i korzystając z dyskretnej wersji twierdzenia Borela o splocie, czyli z twierdzenia 2.9, otrzymujemy:

$$\mathcal{Z}[3^n] \cdot \mathcal{Z}[x(n)] = \mathcal{Z}[n2^n] + \mathcal{Z}[2^n].$$

Zatem

$$\frac{z}{z-3}X(z) = \frac{2z}{(z-2)^2} + \frac{z}{z-2},$$

a stąd

$$X(z) = 2 \frac{(z-3)}{(z-2)^2} + \frac{z-3}{z-2} = \frac{z^2}{(z-2)^2} - 3 \frac{z}{(z-2)^2}.$$

Zatem

$$x(n) = \frac{1}{2}n2^n + 2^n.$$

□

Zadania

Zadanie 2.13.

Metodą operatorową rozwiązać podane równania różnicowe:

- a) $x(n+2) - 5x(n+1) + 4x(n) = n3^n$, $x(0) = 1$, $x(1) = 0$;
- b) $x(n+2) - x(n) = n \cos \frac{\pi}{2}n$, $x(0) = 0$, $x(1) = -1$;
- c) $x(n+2) - x(n) = n \sin \frac{\pi}{2}n$, $x(0) = 0$, $x(1) = 0$;
- d) $x(n+3) - 7x(n+2) + 16x(n+1) - 12x(n) = (-1)^n$, $x(0) = x(1) = 0$, $x(2) = 1$;
- e) $x(n+3) + 3x(n+2) + 3x(n+1) - x(n) = n2^n$, $x(0) = 2$, $x(1) = x(2) = 0$;
- f) $x(n+3) + 3x(n+2) + 3x(n+1) + 2x(n) = (n+1)3^{n-1}$, $x(0) = x(1) = x(2) = 0$;

$$g) x(n+3) + 3x(n+2) + 3x(n+1) + 2x(n) = (2n-1)3 \cos \frac{\pi}{2}n,$$

$$x(0) = x(1) = x(2) = 0;$$

$$h) 3x(n+4) - 6x(n+3) - 8x(n+2) + 8x(n+1) + 16x(n) = 13n^2 - 28n - 30$$

$$x(0) = x(1) = x(2) = x(3) = 0;$$

$$i) \sum_{k=0}^n 2^{n-k} x(k) = n(-1)^n.$$

Odpowiedzi:

$$2.13 \text{ a) } \frac{2}{3}4^n - \frac{1}{2}n3^n - \frac{3}{4}3^n + \frac{13}{12}; \text{ b) } \frac{1}{4}(-1)^n - \frac{1}{2}(n-1)\cos \frac{\pi}{2}n - \frac{3}{4};$$

$$\text{c) } -\frac{1}{2}(n-1)\cos \frac{\pi}{2}(n-1); \text{ d) } \frac{5}{4}3^n - \frac{1}{36}(-1)^n - \frac{17}{9}2^n - \frac{2}{3}(n-1)2^n;$$

$$\text{e) } \frac{1}{27}(n-1)2^n - \frac{1}{27}2^n + \frac{10}{9}(n-2)(n-1)(-1)^n + \frac{2}{27}(n-1)(-1)^n - \frac{2}{27}(-1)^n;$$

$$\text{f) } \frac{1}{195}(n-1)3^n - \frac{14}{12675}3^n - \frac{2}{225}(-2)^n + \frac{44}{1521}(-1)^n \cos \frac{\pi}{3}n + \frac{14}{1521}\sqrt{3}\sin \frac{\pi}{3}(n-1);$$

$$\text{g) } \frac{18}{25}(-2)^n - \frac{6}{5}\left[n\cos \frac{\pi}{2}n - 2(n-1)\cos \frac{\pi}{2}(n-1)\right] -$$

$$-\frac{1}{25}\left[93\cos \frac{\pi}{2}n + 114\cos \frac{\pi}{2}(n-1)\right] + (-1)^n\left[3\cos \frac{\pi}{3}n - 5\sqrt{3}\sin \frac{\pi}{3}n\right];$$

$$\text{h) } n^2 - \frac{81}{392}2^n - \frac{19}{56}n2^n + \frac{81}{392}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \cos \frac{\pi}{6}n - \frac{117}{392}\sqrt{3}\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \sin \frac{\pi}{6}n;$$

$$\text{i) } 2\delta(n) + 3n(-1)^n - 2(-1)^n.$$

2.9. Uwagi bibliograficzne

Pisząc powyższy rozdział, korzystaliśmy w dużej mierze z notatek do zajęć powstałych w trakcie wielu lat jako efekt przygotowania do prowadzenia zajęć. Należy jednak mieć na uwadze, że pojęcie i własności $\mathcal{Z}$ -transformaty opisane są w wielu internetowych materiałach źródłowych i w nielicznych podręcznikach. Poza własnymi notatkami korzystaliśmy z monografii [5], zbioru zadań [19], sięgaliśmy do *Nowoczesnego kompendium matematyki* [2], ale też i do podręczników profesora Janusza Kowala [7, 8] czy podręcznika [15]. Korzystaliśmy także z pewnych wiadomości z matematyki dyskretnej [16].

Rozdział 3

Transformata Fouriera

W przypadku, gdy sygnał f jest funkcją okresową zmiennej rzeczywistej t o okresie podstawowym $T = 2l$, $l \in \mathbb{R}_+$, można go reprezentować za pomocą odpowiadającego mu szeregu Fouriera. Zgodnie z twierdzeniem Dirichleta [21] spełnienie warunków Dirichleta określonych w definicji 1.1 gwarantuje zbieżność takiego szeregu do funkcji f dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$. Taka reprezentacja sygnału pozwala na wyznaczenie jego charakterystyki widmowej, czyli widma amplitudowego A i widma fazowego φ , które są wówczas dyskretnymi funkcjami częstości ω .

Jeżeli sygnał f jest funkcją nieokresową określoną dla $t \in \mathbb{R}$, zamiast szeregu Fouriera do reprezentacji sygnału można użyć tzw. wzoru całkowego Fouriera i charakterystykę widmową wyznaczyć na jego podstawie. Widmo amplitudowe i fazowe są w takim przypadku funkcjami ciągłymi częstości $\omega \in \mathbb{R}$.

Z pojęciem wzoru całkowego związane jest bezpośrednio pojęcie transformaty (przekształcenia) Fouriera, która podobnie jak wzór całkowy z jednej strony może być wykorzystywana do analizy widmowej. Z drugiej strony, analogicznie jak transformata Laplace'a, przekształcenie Fouriera może służyć do rozwiązywania równań różniczkowych, całkowych i różniczkowo-całkowych. Jak dalej pokażemy, transformata Fouriera jest ściśle związana z transformatą Laplace'a.

3.1. Wzór całkowy Fouriera

Odpowiednikiem twierdzenia Dirichleta dla sygnału nieokresowego f jest twierdzenie Fouriera.

Twierdzenie 3.1 (Fouriera). *Jeżeli funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$*

- spełnia pierwszy i drugi warunek Dirichleta podany w definicji 1.1 na każdym przedziale ograniczonym $(a; b)$,*
- jest bezwzględnie całkowna na przedziale $(-\infty; +\infty)$, tzn.*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty,$$

to dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$ funkcję f można przedstawić za pomocą wzoru

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega(t - \tau) d\tau d\omega. \quad (3.1)$$

Jeżeli w pewnym punkcie t_0 nie jest spełniona równość (1.1) w drugim warunku Dirichleta, to całka po prawej stronie równości (3.1) nie jest zbieżna w tym punkcie do $f(t_0)$, ale do $\frac{1}{2}(f(t_0^-) + f(t_0^+))$. Wzór (3.1) nazywamy *wzorem całkowym Fouriera* funkcji f , a całkę występującą w tym wzorze – *całką Fouriera*. Ponieważ

$$\cos \omega(t - \tau) = \cos \omega t \cos \omega \tau + \sin \omega t \sin \omega \tau,$$

zatem wzór całkowy Fouriera możemy zapisać w postaci

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\cos \omega t \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau + \sin \omega t \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right) d\omega. \quad (3.2)$$

Przyjmijmy oznaczenia:

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau. \quad (3.3)$$

Wtedy z (3.2) mamy

$$f(t) = \int_0^{+\infty} (a(\omega) \cos \omega t + b(\omega) \sin \omega t) d\omega. \quad (3.4)$$

Zauważmy, że funkcja a jest parzysta, tzn. $a(\omega) = a(-\omega)$ (wynika z parzystości funkcji kosinus), a funkcja b jest nieparzysta, tzn. $b(\omega) = -b(-\omega)$ (wynika z nieparzystości funkcji sinus). Jeżeli funkcja f jest parzysta, to

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (3.5)$$

$$b(\omega) = 0, \quad (3.6)$$

a jeżeli f jest nieparzysta, to

$$a(\omega) = 0, \quad (3.7)$$

$$b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} f(\tau) \sin \omega \tau d\tau. \quad (3.8)$$

W dalszych rozważaniach szczególnie istotna będzie tzw. *zespolona postać wzoru całkowego Fouriera*:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{j\omega(t-\tau)} d\tau d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau d\omega. \quad (3.9)$$

Przykład 3.1.

Przedstawić za pomocą wzoru całkowego Fouriera oraz wzoru całkowego Fouriera w postaci zespolonej funkcję:

$$\text{a) } f(t) = \begin{cases} t & \text{dla } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } t; \end{cases} \quad \text{b) } f(t) = \begin{cases} \sin t & \text{dla } -\pi < t < \pi, \\ 0 & \text{dla pozostałych } t; \end{cases}$$

$$\text{c) } f(t) = e^{-|t|} \text{ dla } t \in \mathbb{R}.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy przede wszystkim, że wszystkie funkcje podane w tym przykładzie spełniają założenia twierdzenia Fouriera (twierdzenie 3.1).

a) Wyznaczamy najpierw funkcje a i b ze wzorów (3.3).

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \tau \cos \omega \tau d\tau.$$

Po scałkowaniu przez części

$$\int \tau \cos \omega \tau d\tau = \frac{\omega \tau \sin(\omega \tau) + \cos(\omega \tau)}{\omega^2},$$

zatem

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\omega \tau \sin(\omega \tau) + \cos(\omega \tau)}{\omega^2} \right]_{\tau=0}^1 = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\omega \sin(\omega) + \cos(\omega) - 1}{\omega^2}.$$

Podobnie ze wzorów (3.3)

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \tau \sin \omega \tau d\tau$$

oraz

$$\int \tau \sin \omega \tau d\tau = \frac{\sin(\omega \tau) - \omega \tau \cos(\omega \tau)}{\omega^2},$$

więc

$$b(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(\omega \tau) - \omega \tau \cos(\omega \tau)}{\omega^2} \right]_{\tau=0}^1 = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\sin(\omega) - \omega \cos(\omega)}{\omega^2}.$$

Stąd

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\omega \sin(\omega) + \cos(\omega) - 1}{\omega^2} \cos \omega t + \frac{\sin(\omega) - \omega \cos(\omega)}{\omega^2} \sin \omega t \right) d\omega.$$

Przedstawimy teraz funkcję f za pomocą wzoru całkowego Fouriera w postaci zespolonej. Obliczamy wewnętrzną całkę we wzorze (3.9), całkując przez części:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_0^1 \tau e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{(j\omega + 1)e^{-j\omega} - 1}{\omega^2}.$$

Stąd

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(j\omega + 1)e^{-j\omega} - 1}{\omega^2} e^{j\omega t} d\omega.$$

b) Funkcja f jest nieparzysta, zatem zgodnie z (3.7)

$$a(\omega) = 0,$$

natomiast ze wzoru (3.8)

$$b(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \tau \sin \omega \tau d\tau.$$

Ponieważ

$$\sin \tau \sin \omega \tau = -\frac{1}{2}(\cos(\omega + 1)\tau - \cos(\omega - 1)\tau),$$

więc

$$b(\omega) = -\frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{\omega + 1} \sin(\omega + 1)\tau - \frac{1}{\omega - 1} \sin(\omega - 1)\tau \right]_{\tau=0}^{\pi} = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin \pi \omega}{\omega^2 - 1}.$$

Zatem

$$f(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \pi \omega}{\omega^2 - 1} \sin \omega t d\omega.$$

Przedstawimy teraz funkcję f za pomocą wzoru całkowego Fouriera w postaci zespolonej. Obliczamy wewnętrzną całkę we wzorze (3.9), całkując przez części:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} \sin \tau e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{e^{j\pi\omega} - e^{-j\pi\omega}}{\omega^2 - 1} = \frac{2j}{\omega^2 - 1} \sin \pi \omega.$$

Stąd

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{j}{\omega^2 - 1} \sin \pi \omega e^{j\omega t} d\omega.$$

c) Funkcja f jest parzysta, więc ze wzoru (3.6) mamy

$$b(\omega) = 0,$$

natomiast ze wzoru (3.5)

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-\tau} \cos \omega \tau d\tau.$$

Po dwukrotnym całkowaniu przez części otrzymamy:

$$\int e^{-\tau} \cos \omega \tau d\tau = \frac{e^{-\tau} (\omega \sin \omega \tau - \cos \omega \tau)}{\omega^2 + 1}.$$

Stąd

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{2}{\pi} \cdot \lim_{a \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{-\tau} (\omega \sin \omega \tau - \cos \omega \tau)}{\omega^2 + 1} \right]_0^a = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{e^{-a} (\omega \sin \omega a - \cos \omega a)}{\omega^2 + 1} + \frac{1}{\omega^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Jednocześnie

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-a} \sin \omega a = 0 \quad \text{oraz} \quad \lim_{a \rightarrow +\infty} e^{-a} \cos \omega a = 0,$$

zatem

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\omega^2 + 1}$$

i ostatecznie

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\omega^2 + 1} \cos \omega t d\omega.$$

Przedstawimy teraz funkcję f za pomocą wzoru całkowego Fouriera w postaci zespolonej. Obliczamy wewnętrzną całkę we wzorze (3.9):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|\tau|} e^{-j\omega \tau} d\tau = \int_{-\infty}^0 e^{\tau(1-j\omega)} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-\tau(1+j\omega)} d\tau = \\ &= \frac{1}{1-j\omega} \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[e^{\tau(1-j\omega)} \right]_a^0 - \frac{1}{1+j\omega} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left[e^{-\tau(1+j\omega)} \right]_0^b = \\ &= \frac{1}{1-j\omega} + \frac{1}{1+j\omega} = \frac{2}{\omega^2 + 1}. \end{aligned}$$

Stąd

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\omega^2 + 1} e^{j\omega t} d\omega.$$

□

Przykład 3.2.

Wyznaczyć zespolony wzór całkowy Fouriera dla pojedynczego, prostokątnego impulsu napięcia elektrycznego

$$u(t) = \begin{cases} U & \text{dla } |t| < T, \\ 0 & \text{dla pozostałych } t, \end{cases}$$

gdzie $U > 0, T > 0$ – stałe.

Rozwiązanie:

Obliczamy wewnętrzną całkę we wzorze (3.9):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-T}^T U e^{-j\omega\tau} d\tau = U \frac{j}{\omega} (e^{-j\omega T} - e^{j\omega T}) = 2U \frac{\sin \omega T}{\omega}.$$

Stąd zespolony wzór całkowy Fouriera ma postać

$$f(t) = \frac{U}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega T}{\omega} e^{j\omega t} d\omega.$$

□

Zadania

Zadanie 3.1.

Wyznaczyć wzór całkowy Fouriera dla poniższych funkcji:

$$\text{a) } f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \in (-2; 1), \\ 0 & \text{dla pozostałych } t; \end{cases}$$

$$\text{b) } f(t) = \begin{cases} 2 & \text{dla } t \in (-3; -1), \\ 1 & \text{dla } t \in (-1; 1), \\ 0 & \text{dla pozostałych } t; \end{cases}$$

$$\text{c) } f(t) = \begin{cases} -t + 1 & \text{dla } t \in (0; 1), \\ 0 & \text{dla pozostałych } t; \end{cases}$$

$$\text{d) } f(t) = \begin{cases} |t| & \text{dla } t \in (-1; 1), \\ 0 & \text{dla pozostałych } t; \end{cases}$$

$$\text{e) } f(t) = \begin{cases} t + \pi & \text{dla } t \in (-\pi; 0), \\ -t + \pi & \text{dla } t \in (0; \pi), \\ 0 & \text{dla pozostałych } t; \end{cases}$$

$$\text{f) } f(t) = \begin{cases} t & \text{dla } t \in (-1; 1), \\ 0 & \text{dla pozostałych } t; \end{cases}$$

$$\text{g) } f(t) = \begin{cases} |\sin t| & \text{dla } t \in (-\pi; \pi), \\ 0 & \text{dla pozostałych } t. \end{cases}$$

Odpowiedzi:

$$3.1 \text{ a) } f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin 2\omega + \sin \omega}{\omega} \cos \omega t + \frac{\cos 2\omega - \cos \omega}{\omega} \sin \omega t \right) d\omega;$$

$$\text{b) } f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin 3\omega}{\omega} \cos \omega t + \frac{\cos 3\omega - \cos \omega}{\omega} \sin \omega t \right) d\omega;$$

$$\text{c) } f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1 - \cos \omega}{\omega^2} \cos \omega t + \frac{\omega - \sin \omega}{\omega^2} \sin \omega t \right) d\omega;$$

$$\text{d) } f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\omega \sin \omega + \cos \omega - 1}{\omega^2} \cos \omega t d\omega;$$

$$\text{e) } f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \pi \omega}{\omega^2} \cos \omega t d\omega;$$

$$\text{f) } f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^2} \sin \omega t d\omega;$$

$$\text{g) } f(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \pi \omega + 1}{\omega^2 - 1} \cos \omega t d\omega.$$

3.2. Definicja transformaty Fouriera

Ze wzorem całkowym Fouriera w postaci zespolonej jest związane bezpośrednio pojęcie transformaty Fouriera. Będziemy dalej zakładać, że funkcja f spełnia założenia twierdzenia Fouriera.

Definicja 3.1. **Transformatą Fouriera ($\mathcal{F}$ -transformatą)** funkcji f zmiennej rzeczywistej t nazywamy funkcję zespoloną $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ zmiennej rzeczywistej ω postaci:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (3.10)$$

Ze wzoru (3.9) wynika od razu, że

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (3.11)$$

Przekształcenie dane wzorem (3.11) nazywamy *odwrotną transformatą Fouriera* ($\mathcal{F}^{-1}$ -transformatą) funkcji $F(j\omega)$. Zapisujemy także:

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(j\omega) \quad \text{oraz} \quad \mathcal{F}^{-1}[F(j\omega)] = f(t).$$

Łatwo zauważyć, że dla każdej funkcji bezwzględnie całkownej na przedziale $(-\infty; +\infty)$ istnieje jej $\mathcal{F}$ -transformata.

Twierdzenie 3.2. *Jeżeli funkcja f jest bezwzględnie całkowna na przedziale $(-\infty; +\infty)$, to jej $\mathcal{F}$ -transformata $F(j\omega)$ jest funkcją ciągłą zmiennej ω , przy czym*

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} F(j\omega) = 0.$$

Jeżeli funkcja f nie jest bezwzględnie całkowna, nie oznacza to jeszcze, że jej transformata Fouriera nie istnieje.

Przykład 3.3.

Korzystając z definicji 3.1, wyznaczyć $\mathcal{F}$ -transformatę funkcji

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{dla } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } t. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Biorąc pod uwagę postać funkcji f , ze wzoru (3.10) otrzymujemy:

$$F(j\omega) = \int_0^1 t e^{-j\omega t} dt,$$

a po scałkowaniu przez części

$$F(j\omega) = \left[\frac{jte^{-j\omega t}}{\omega} + \frac{e^{-j\omega t}}{\omega^2} \right]_0^1 = \frac{je^{-j\omega}}{\omega} + \frac{e^{-j\omega}}{\omega^2}.$$

Dodatkowo, wykorzystując wzory Eulera, otrzymujemy:

$$F(j\omega) = \frac{\omega \sin(\omega) + \cos(\omega) - 1}{\omega^2} - j \frac{\sin(\omega) - \omega \cos(\omega)}{\omega^2}.$$

□

Zauważmy, że ze wzoru (3.10) wynika:

$$F(j\omega) = \pi(a(\omega) - jb(\omega)), \quad (3.12)$$

gdzie a i b są funkcjami zdefiniowanymi wzorami (3.3). Zatem jeżeli dana jest funkcja f przedstawiona wzorem całkowym (3.4), to na podstawie równości (3.12) możemy zapisać postać

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(j\omega).$$

3.3. Kosinusowa i sinusowa transformata Fouriera

Założmy teraz, że funkcja f jest bezwzględnie całkowalna na przedziale $[0; +\infty)$ oraz na każdym przedziale otwartym $(a; b)$, $a \geq 0$, spełnia pierwszy i drugi warunek Dirichleta. Taką funkcję można przedstawić za pomocą wzoru

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_c(\omega) \cos \omega t d\omega \quad \text{dla } t > 0, \quad (3.13)$$

gdzie

$$F_c(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) \cos \omega t dt. \quad \text{dla } \omega > 0 \quad (3.14)$$

Można ją również przedstawić jako

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} F_s(\omega) \sin \omega t d\omega \quad \text{dla } t > 0, \quad (3.15)$$

gdzie

$$F_s(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t) \sin \omega t dt. \quad \text{dla } \omega > 0 \quad (3.16)$$

Definicja 3.2. Funkcję rzeczywistą $F_c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zmiennej rzeczywistej ω daną wzorem (3.14) nazywamy **kosinusową transformatą Fouriera** funkcji f . Przekształcenie dane wzorem (3.13) nazywamy **odwrotną kosinusową transformatą Fouriera** funkcji F_c .

Definicja 3.3. Funkcję rzeczywistą $F_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zmiennej rzeczywistej ω daną wzorem (3.16) nazywamy **sinusową transformatą Fouriera** funkcji f . Przekształcenie dane wzorem (3.15) nazywamy **odwrotną sinusową transformatą Fouriera** funkcji F_s .

Jeżeli f jest funkcją parzystą, to

$$F(j\omega) = 2F_c(\omega).$$

Jeżeli f jest funkcją nieparzystą, to

$$F(j\omega) = -2jF_s(\omega).$$

Przykład 3.4. Wyznaczyć kosinusową transformatę Fouriera funkcji

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ e^{-at} & \text{dla } t \geq 0 \ (a > 0). \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Otrzymujemy

$$F_c(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} \cos \omega t \, dt.$$

Postępując analogicznie jak w przykładzie 3.1 c), dostajemy

$$F_c(\omega) = \frac{a}{a^2 + \omega^2}.$$

□

3.4. Analiza widmowa funkcji

Jednym z ważniejszych zastosowań transformaty Fouriera jest analiza widmowa funkcji, wykorzystywana między innymi w analizie sygnałów, drgań itp.

Niech $\mathcal{F}[f(t)] = F(j\omega)$. Transformatę Fouriera $F(j\omega)$ sygnału f nazywamy także *widmem* sygnału. Funkcję $F(j\omega)$ jako funkcję zespoloną możemy przedstawić w postaci wykładniczej:

$$F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}, \quad (3.17)$$

a z drugiej strony w postaci algebraicznej:

$$F(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (3.18)$$

Definicja 3.4. Funkcję $A(\omega) = |F(j\omega)|$ nazywamy **widmem amplitudowym**, a funkcję $\varphi(\omega)$ **widmem fazowym** sygnału f . Część rzeczywistą $P(\omega)$ transformaty $F(j\omega)$ nazywamy **widmem rzeczywistym**, a część urojoną $-Q(\omega)$ **widmem urojonym** sygnału f .

Uwaga 3.1. Z twierdzenia 3.2 wynika, że

$$\lim_{\omega \rightarrow \pm\infty} A(\omega) = 0.$$

Będziemy w dalszym ciągu zakładać, że $|\varphi(\omega)| \leq \pi$.

Z definicji 3.4 wynika, że widmo amplitudowe

$$A(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)} = \pi \sqrt{a^2(\omega) + b^2(\omega)}, \quad (3.19)$$

a widmo fazowe spełnia układ równań

$$\begin{cases} \cos \varphi(\omega) = \frac{P(\omega)}{|F(j\omega)|} = \frac{a(\omega)}{\sqrt{a^2(\omega)+b^2(\omega)}}, \\ \sin \varphi(\omega) = \frac{Q(\omega)}{|F(j\omega)|} = \frac{-b(\omega)}{\sqrt{a^2(\omega)+b^2(\omega)}}. \end{cases} \quad (3.20)$$

Ze wzorów (3.20) można wyznaczyć wartość funkcji φ jednoznacznie z wyjątkiem przypadku, gdy jednocześnie $\cos \varphi(\omega) = -1$ i $\sin \varphi(\omega) = 0$. Wówczas przyjmujemy, że

$$\varphi(\omega) = \pi \cdot \operatorname{sgn} \omega = \begin{cases} -\pi, & \text{jeżeli } \omega < 0, \\ 0, & \text{jeżeli } \omega = 0, \\ \pi, & \text{jeżeli } \omega > 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

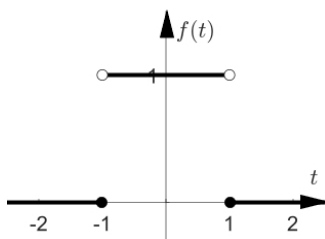
Przykład 3.5.

Wyznaczyć widmo amplitudowe i fazowe funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(t) &= \begin{cases} 1 & \text{dla } |t| < 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych } t; \end{cases} & \text{b) } f(t) &= \begin{cases} t & \text{dla } t \in (0; 1), \\ 0 & \text{dla pozostałych } t; \end{cases} \\ \text{c) } f(t) &= \begin{cases} t+a & \text{dla } t \in (-a; 0), \\ -t+a & \text{dla } t \in (0; a), \\ 0 & \text{dla pozostałych } t. \end{cases} \end{aligned}$$

Rozwiązanie:

a) Wzór funkcji f przedstawia tzw. impuls prostokątny:



Rysunek 3.1: Wykres funkcji f do przykładu 3.5 a)

Obliczamy $\mathcal{F}$ -transformatę funkcji f :

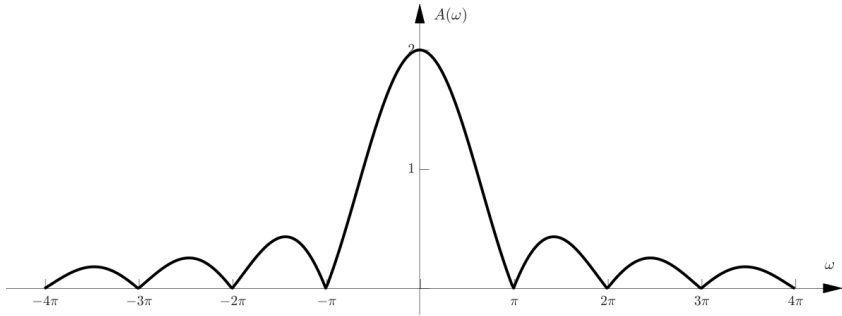
$$\mathcal{F}[f(t)] = F(j\omega) = \int_{-1}^1 e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \right]_{-1}^1 = \frac{e^{-j\omega}}{-j\omega} + \frac{e^{j\omega}}{j\omega} = \frac{2 \sin \omega}{\omega}$$

dla $\omega \neq 0$ oraz

$$F(j\omega) = \int_{-1}^1 dt = 2 \text{ dla } \omega = 0.$$

Widmo funkcji f jest rzeczywiste, zatem jej widmo amplitudowe

$$A(\omega) = |F(j\omega)| = \begin{cases} \left| \frac{2 \sin \omega}{\omega} \right| & \text{dla } \omega \neq 0, \\ 2 & \text{dla } \omega = 0. \end{cases}$$



Rysunek 3.2: Widmo amplitudowe funkcji f (przykład 3.5 a))

Stąd wynika także, że

$$\cos \varphi(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } \frac{2 \sin \omega}{\omega} > 0 \text{ lub } \omega = 0, \\ -1, & \text{jeżeli } \frac{2 \sin \omega}{\omega} < 0, \end{cases}$$

czyli

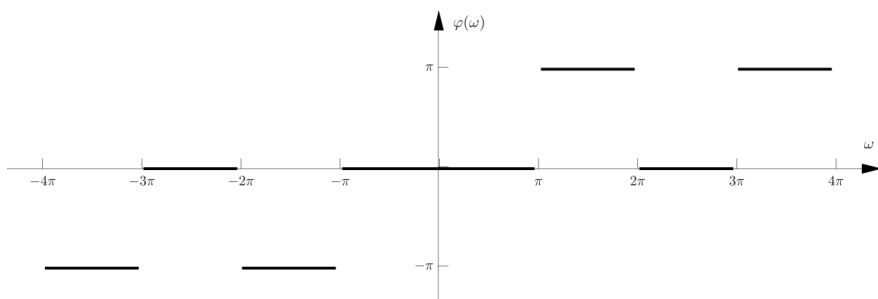
$$\cos \varphi(\omega) = \begin{cases} 1 \text{ dla } \omega \in (-(2k+1)\pi; -2k\pi) \cup (2k\pi; (2k+1)\pi), \\ \text{dla } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \text{ lub } \omega = 0, \\ -1 \text{ dla } \omega \in (-(2k+2)\pi; -(2k+1)\pi) \cup \\ \cup ((2k+1)\pi; (2k+2)\pi), \text{ dla } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$

Jednocześnie

$$\sin \varphi(\omega) = 0 \text{ dla } \omega \in \mathbb{R}.$$

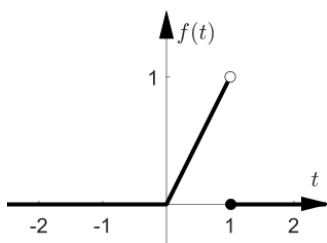
Zatem zgodnie ze wzorem (3.21) widmo fazowe funkcji f :

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ dla } \omega \in [-(2k+1)\pi; -2k\pi] \cup [2k\pi; (2k+1)\pi], \\ \text{dla } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ -\pi \text{ dla } \omega \in (-(2k+2)\pi; -(2k+1)\pi), \text{ dla } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \pi \text{ dla } \omega \in ((2k+1)\pi; (2k+2)\pi), \text{ dla } k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \end{cases}$$



Rysunek 3.3: Widmo fazowe funkcji f (przykład 3.5 a)

b) Wykres danej funkcji f jest przedstawiony na rysunku 3.4.



Rysunek 3.4: Wykres funkcji f do przykładu 3.5 b)

Obliczamy $\mathcal{F}$ -transformatę tej funkcji, całkując jednokrotnie przez części:

$$\mathcal{F}[f(t)] = F(j\omega) = \int_0^1 t e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{(j\omega t + 1) e^{-j\omega t}}{\omega^2} \right]_0^1 = \frac{j e^{-j\omega}}{\omega} + \frac{e^{-j\omega}}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2}$$

dla $\omega \neq 0$ oraz

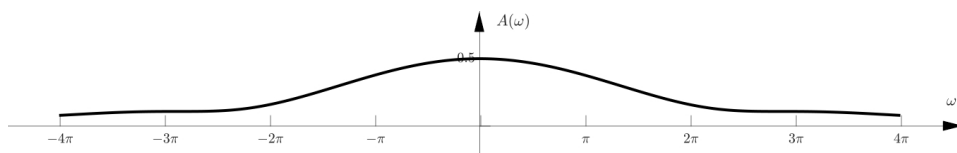
$$F(j\omega) = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2} \text{ dla } \omega = 0.$$

Możemy zapisać $\mathcal{F}$ -transformatę w postaci algebraicznej:

$$F(j\omega) = \frac{\omega \sin \omega + \cos \omega - 1}{\omega^2} - j \frac{\sin \omega - \omega \cos \omega}{\omega^2} \text{ dla } \omega \neq 0.$$

Widmo amplitudowe wyraża się zatem wzorem:

$$A(\omega) = |F(j\omega)| = \begin{cases} \frac{\sqrt{-2 \sin \omega - 2 \cos \omega + \omega^2 + 2}}{\omega^2} & \text{dla } \omega \neq 0, \\ \frac{1}{2} & \text{dla } \omega = 0. \end{cases}$$



Rysunek 3.5: Widmo amplitudowe funkcji f (przykład 3.5 b))

Wyznamy teraz widmo fazowe. Otrzymujemy:

$$\cos \varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{\omega \sin \omega + \cos \omega - 1}{\sqrt{-2\omega \sin \omega - 2\cos \omega + \omega^2 + 2}} & \text{dla } \omega \neq 0, \\ 1 & \text{dla } \omega = 0 \end{cases}$$

oraz

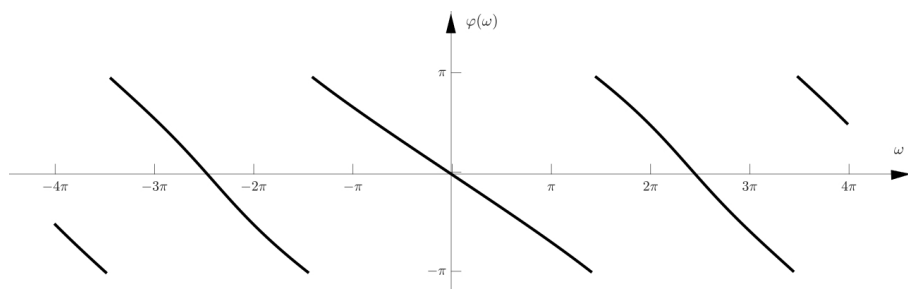
$$\sin \varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{-\sin \omega + \omega \cos \omega}{\sqrt{-2\omega \sin \omega - 2\cos \omega + \omega^2 + 2}} & \text{dla } \omega \neq 0, \\ 0 & \text{dla } \omega = 0. \end{cases}$$

Stąd

$$\operatorname{tg} \varphi(\omega) = \begin{cases} \frac{-\sin \omega + \omega \cos \omega}{\omega \sin \omega + \cos \omega - 1} & \text{dla } \omega \neq 0, \\ 0 & \text{dla } \omega = 0. \end{cases}$$

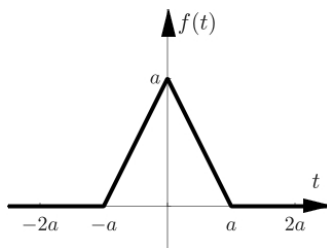
Z definicji funkcji arcus tangens wynika, że

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{-\sin \omega + \omega \cos \omega}{\omega \sin \omega + \cos \omega - 1}, & \text{jeżeli } \omega \sin \omega + \cos \omega - 1 > 0, \\ \pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{-\sin \omega + \omega \cos \omega}{\omega \sin \omega + \cos \omega - 1}, & \text{jeżeli } \omega \sin \omega + \cos \omega - 1 < 0 \wedge \\ & -\sin \omega + \omega \cos \omega > 0, \\ -\pi + \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{-\sin \omega + \omega \cos \omega}{\omega \sin \omega + \cos \omega - 1}, & \text{jeżeli } \omega \sin \omega + \cos \omega - 1 < 0 \wedge \\ & -\sin \omega + \omega \cos \omega < 0, \\ 0, & \text{jeżeli } \omega \sin \omega + \cos \omega - 1 = 0 \wedge \\ & -\sin \omega + \omega \cos \omega = 0. \end{cases}$$



Rysunek 3.6: Widmo fazowe funkcji f (przykład 3.5 b))

c) Wzór funkcji f przedstawia tzw. impuls trójkątny:



Rysunek 3.7: Wykres funkcji f do przykładu 3.5 c)

Przy obliczaniu $\mathcal{F}$ -transformaty korzystamy z faktu, że dana funkcja f jest funkcją parzystą, zatem

$$F(j\omega) = 2F_c(\omega) = 2 \int_0^a (t+a) \cos \omega t \, dt.$$

Po scałkowaniu przez części otrzymujemy:

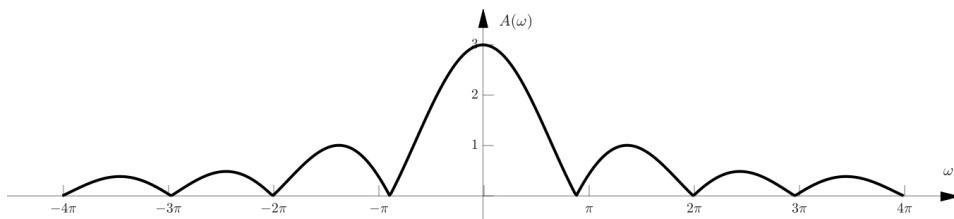
$$F(j\omega) = 2 \left[\frac{\omega(t+a) \sin \omega t + \cos \omega t}{\omega^2} \right]_0^a = 2 \cdot \frac{2\omega a \sin \omega a + \cos \omega a - 1}{\omega^2} \text{ dla } \omega \neq 0$$

i

$$F(j\omega) = 2 \int_0^a (t+a) \, dt = 3a^2 \text{ dla } \omega = 0.$$

Widmo amplitudowe funkcji f wyraża się wzorem:

$$A(\omega) = |F(j\omega)| = \begin{cases} 2 \cdot \frac{|2\omega a \sin \omega a + \cos \omega a - 1|}{\omega^2} & \text{dla } \omega \neq 0, \\ 3a^2 & \text{dla } \omega = 0. \end{cases}$$



Rysunek 3.8: Widmo amplitudowe funkcji f dla $a = 1$ (przykład 3.5 c))

Stąd wynika, że

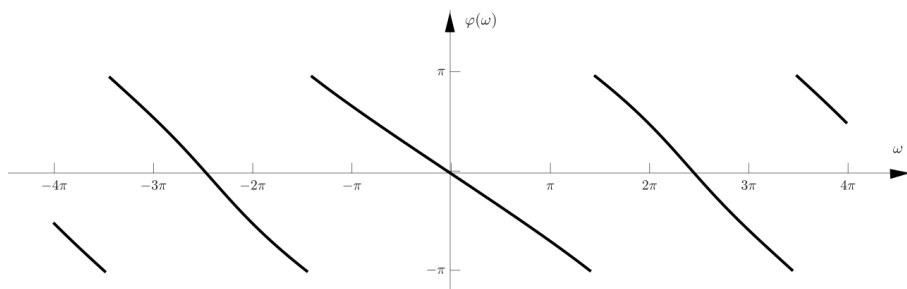
$$\cos \varphi(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{jeżeli } 2\omega a \sin \omega a + \cos \omega a - 1 > 0 \text{ lub } \omega = 0, \\ -1, & \text{jeżeli } 2\omega a \sin \omega a + \cos \omega a - 1 < 0. \end{cases}$$

Jednocześnie

$$\sin \varphi(\omega) = 0 \text{ dla } \omega \in \mathbb{R},$$

zatem zgodnie ze wzorem (3.21) widmo fazowe

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } 2\omega a \sin \omega a + \cos \omega a - 1 > 0 \text{ lub } \omega = 0, \\ -\pi, & \text{jeżeli } 2\omega a \sin \omega a + \cos \omega a - 1 < 0 \text{ i } \omega < 0, \\ \pi, & \text{jeżeli } 2\omega a \sin \omega a + \cos \omega a - 1 < 0 \text{ i } \omega > 0. \end{cases}$$



Rysunek 3.9: Widmo fazowe funkcji f dla $a = 1$ (przykład 3.5 c))

□

Zadania

Zadanie 3.2.

Wyznaczyć widmo, widmo amplitudowe i widmo fazowe funkcji:

$$\text{a) } f(t) = e^{-a|t|} \text{ dla } t \in \mathbb{R} \text{ i } a > 0; \quad \text{b) } f(t) = \begin{cases} \sin at & \text{dla } t \in (0; \frac{\pi}{a}), \\ 0 & \text{dla pozostałych } t; \end{cases} \text{ gdzie } a > 0,$$

$$\text{c) } f(t) = \begin{cases} \cos t & \text{dla } t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}), \\ 0 & \text{dla pozostałych } t. \end{cases}$$

Odpowiedzi:

$$3.2 \text{ a) } F(j\omega) = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}, A(\omega) = |F(j\omega)| = \frac{2a}{\omega^2 + a^2}, \varphi(\omega) = 0;$$

$$\text{b) } F(j\omega) = \begin{cases} -\frac{a(e^{-j\pi\omega/a} + 1)}{\omega^2 - a^2} & \text{dla } \omega \neq \pm a, \\ \mp \frac{j\pi}{2a} & \text{dla } \omega = \pm a, \end{cases}$$

$$A(\omega) = |F(j\omega)| = \begin{cases} \frac{a}{|\omega^2 - a^2|} \sqrt{2 \cos \frac{\pi\omega}{a} + 2} & \text{dla } \omega \neq \pm a, \\ \frac{\pi}{2a} & \text{dla } \omega = \pm a, \end{cases}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \arctg \left(-\frac{\sin \frac{\pi\omega}{a}}{\cos \frac{\pi\omega}{a} + 1} \right), & \text{jeżeli } \omega \in (-a; a), \\ \pi + \arctg \left(-\frac{\sin \frac{\pi\omega}{a}}{\cos \frac{\pi\omega}{a} + 1} \right), & \text{jeżeli } \omega \in (2ka; (2k+1)a) \text{ dla } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ -\pi + \arctg \left(-\frac{\sin \frac{\pi\omega}{a}}{\cos \frac{\pi\omega}{a} + 1} \right), & \text{jeżeli } \omega \in ((2k-1)a; 2ka) \text{ dla } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{jeżeli } \omega = ka \text{ dla } k \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$\text{c) } F(j\omega) = \frac{2}{1-\omega^2} \cos \frac{\pi\omega}{2}, A(\omega) = |F(j\omega)| = \frac{2}{|1-\omega^2|} \left| \cos \frac{\pi\omega}{2} \right|,$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli } \frac{\cos \frac{\pi\omega}{2}}{1-\omega^2} > 0, \\ \pi \operatorname{sgn} \omega, & \text{jeżeli } \frac{\cos \frac{\pi\omega}{2}}{1-\omega^2} < 0. \end{cases}$$

3.5. Własności transformaty Fouriera

Podobnie jak w przypadku transformaty Laplace'a, podamy podstawowe własności transformaty Fouriera. Poniższe twierdzenia często ułatwiają przeprowadzenie analizy widmowej sygnału, inne mają zastosowanie przy wyznaczaniu rozwiązań zagadnień opisywanych równaniami różniczkowymi.

Twierdzenie 3.3 (o liniowości). *Jeżeli istnieją $\mathcal{F}[f(t)]$ i $\mathcal{F}[g(t)]$, to dla dowolnych stałych $a, b \in \mathbb{C}$*

$$\mathcal{F}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{F}[f(t)] + b\mathcal{F}[g(t)]. \quad (3.22)$$

Twierdzenie 3.4 (o podobieństwie; o zmianie skali). *Jeżeli istnieje $\mathcal{F}[f(t)] = F(j\omega)$, to dla dowolnego $a \neq 0$*

$$\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{j\omega}{a}\right). \quad (3.23)$$

Twierdzenie 3.5 (o przesunięciu rzeczywistym; o przesunięciu w dziedzinie czasu). Jeżeli istnieje $\mathcal{F}[f(t)] = F(j\omega)$, to dla dowolnego $t_0 \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} F(j\omega). \quad (3.24)$$

Przesunięcie rzeczywiste nie zmienia widma amplitudowego, a widmo fazowe przesuwają o $-\omega t_0$, tzn. jeżeli widma fazowe sygnałów $f(t)$ i $g(t) = f(t - t_0)$ oznaczmy odpowiednio przez φ_f oraz φ_g , to $\varphi_g(t) = \varphi_f(t) - \omega t_0$.

Przykład 3.6.

Wyznaczyć $\mathcal{F}$ -transformatę funkcji:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(t) &= e^{-t} \mathbf{1}(t - 2); & \text{b) } f(t) &= \begin{cases} 0 & \text{dla } t < 0, \\ 1 & \text{dla } 0 \leq t < 2, \\ e^{-(t-2)} & \text{dla } t \geq 2; \end{cases} \\ \text{c) } f(t) &= \begin{cases} t - 1 & \text{dla } 1 \leq t < 2, \\ -t + 3 & \text{dla } 2 \leq t < 3, \\ 0 & \text{dla pozostałych } t. \end{cases} \end{aligned}$$

Rozwiązanie:

a) Niech $g(t) = e^{-t} \mathbf{1}(t)$ oraz $G(j\omega) = \mathcal{F}[g(t)]$. Wówczas $f(t) = e^{-2} g(t - 2)$, a z definicji transformaty Fouriera otrzymujemy:

$$G(j\omega) = \int_0^{+\infty} e^{-t(j\omega+1)} dt = \left[-\frac{e^{-t(j\omega+1)}}{j\omega+1} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{j\omega+1}.$$

Z twierdzenia 3.5 wynika, że:

$$F(j\omega) = e^{-2(j\omega+1)} \frac{1}{j\omega+1} = -\frac{e^{-2} (\omega \sin 2\omega - \cos 2\omega)}{\omega^2 + 1} - j \frac{e^{-2} (\sin 2\omega + \omega \cos 2\omega)}{\omega^2 + 1}.$$

b) Funkcję f możemy zapisać jako sumę funkcji

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } 0 \leq t < 2, \\ 0 & \text{dla pozostałych } t \end{cases} \quad \text{oraz} \quad f_2 = e^{-(t-2)} \mathbf{1}(t - 2).$$

Funkcja $f_1(t) = g(t - 1)$, gdzie g jest funkcją, której $\mathcal{F}$ -transformatę wyznaczyliśmy w przykładzie 3.5 a). Z twierdzenia 3.5 wynika zatem, że

$$\mathcal{F}[f_1(t)] = \begin{cases} \frac{2e^{-j\omega} \sin \omega}{\omega} & \text{dla } \omega \neq 0, \\ 2 & \text{dla } \omega = 0. \end{cases}$$

Na podstawie wyniku otrzymanego w punkcie a) stwierdzamy, że

$$\mathcal{F}[f_2(t)] = e^{-2j\omega} \frac{1}{j\omega + 1}.$$

Z twierdzenia 1.1 o liniowości dostajemy:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \mathcal{F}[f_1(t)] + \mathcal{F}[f_2(t)] = \\ &= \begin{cases} \frac{-\omega \sin 2\omega + \cos 2\omega}{\omega^2 + 1} + \frac{\sin 2\omega}{\omega} + j \left(\frac{-\sin 2\omega - \omega \cos 2\omega}{\omega^2 + 1} - \frac{2 \sin^2 \omega}{\omega} \right) & \text{dla } \omega \neq 0, \\ 3 & \text{dla } \omega = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

c) Funkcja f jest przesunięciem o $t_0 = 2$ funkcji z przykładu 3.5 c) dla parametru $a = 1$, zatem

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= 2e^{-2j\omega} \frac{2\omega \sin \omega + \cos \omega - 1}{\omega^2} = \\ &= 2 \frac{(2\omega \sin \omega + \cos \omega - 1) \cos 2\omega}{\omega^2} + 2j \frac{(2\omega \sin \omega + \cos \omega - 1) \sin 2\omega}{\omega^2} \\ &\quad \text{dla } \omega \neq 0 \end{aligned}$$

i

$$F(j\omega) = 3 \text{ dla } \omega = 0.$$

□

Twierdzenie 3.6 (o przesunięciu zespolonym; o przesunięciu w dziedzinie częstotliwości; o modulacji). Jeżeli istnieje $\mathcal{F}[f(t)] = F(j\omega)$, to dla dowolnego $\omega_0 \in \mathbb{R}$

$$\mathcal{F}[e^{j\omega_0 t} f(t)] = F(j(\omega - \omega_0)). \quad (3.25)$$

Ze wzoru (3.25) wynika w szczególności, że

$$\mathcal{F}[e^{-j\omega_0 t} f(t)] = F(j(\omega + \omega_0)). \quad (3.26)$$

Dodając i odejmując stronami wzory (3.25) oraz (3.26), korzystając ze wzorów Eulera oraz z twierdzenia 1.1 o liniowości, otrzymujemy:

$$\mathcal{F}[f(t) \cos \omega_0 t] = \frac{1}{2} [F(j(\omega - \omega_0)) + F(j(\omega + \omega_0))], \quad (3.27)$$

$$\mathcal{F}[f(t) \sin \omega_0 t] = \frac{1}{2j} [F(j(\omega - \omega_0)) - F(j(\omega + \omega_0))]. \quad (3.28)$$

Przykład 3.7.

Wyznaczyć $\mathcal{F}$ -transformatę funkcji:

a) $f(t) = e^{-|t|} \cos 4t$; b) $f(t) = e^{-2(t-1)} \sin 3(t-1) \mathbf{1}(t-1)$.

Rozwiązanie:

a) Niech $g(t) = e^{-|t|}$. $\mathcal{F}$ -transformata funkcji g została obliczona w przykładzie 3.5 e), zatem

$$G(j\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1}.$$

Ze wzoru (3.27) wynika, że

$$F(j\omega) = \frac{1}{2} [G(j(\omega - 4)) + G(j(\omega + 4))] = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\omega - 4)^2 + 1} + \frac{1}{(\omega + 4)^2 + 1} \right].$$

b) Niech $g(t) = e^{-2t} \mathbf{1}(t)$. Z definicji transformaty Fouriera otrzymujemy:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 2}.$$

Ze wzoru (3.28) wynika, że

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[g(t) \sin 3t] &= \mathcal{F}[e^{-2t} \sin 3t \mathbf{1}(t)] = \frac{1}{2j} [G(j(\omega - 3)) - G(j(\omega + 3))] = \\ &= \frac{1}{2j} \left[\frac{1}{j(\omega - 3) + 2} - \frac{1}{j(\omega + 3) + 2} \right]. \end{aligned}$$

Z twierdzenia 3.5 o przesunięciu rzeczywistym dostajemy:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \frac{e^{-j\omega}}{2j} \left[\frac{1}{j(\omega - 3) + 2} - \frac{1}{j(\omega + 3) + 2} \right] = \\ &= -\frac{12\omega \sin \omega + (3\omega^2 - 39) \cos \omega}{\omega^4 - 10\omega^2 + 169} + j \frac{(3\omega^2 - 39) \sin \omega - 12\omega \cos \omega}{\omega^4 - 10\omega^2 + 169}. \end{aligned}$$

□

Twierdzenie 3.7 (o $\mathcal{F}$ -transformacie pochodnej; o różniczkowaniu w dziedzinie czasu). Jeżeli funkcja f oraz jej pochodne $f', f'', \dots, f^{(k)}$ spełniają założenia twierdzenia Fouriera oraz

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$$

i dla każdego $i = 1, \dots, k-1$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f^{(i)}(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f^{(i)}(t) = 0,$$

to

$$\mathcal{F} \left[f^{(k)}(t) \right] = (j\omega)^k F(j\omega). \quad (3.29)$$

Z twierdzenia 3.7 wynika w szczególności, że

$$\mathcal{F} [f'(t)] = j\omega F(j\omega).$$

Twierdzenie 3.8 (o pochodnej $\mathcal{F}$ -transformaty; o różniczkowaniu w dziedzinie częstotliwości). Jeżeli funkcja $t^k f(t)$ spełnia założenia twierdzenia Fouriera dla pewnego $k \in \mathbb{N}$ oraz $\mathcal{F} [f(t)] = F(j\omega)$, to $\mathcal{F}$ -transformata funkcji f ma pochodne względem ω do rzędu k włącznie, przy czym

$$\frac{d^i F(j\omega)}{d\omega^i} = (-j)^i \mathcal{F} [t^i f(t)] \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, k. \quad (3.30)$$

Przykład 3.8.

Wyznaczyć $\mathcal{F}$ -transformatę funkcji $f(t) = t^2 e^{-2t} \mathbf{1}(t)$.

Rozwiązanie:

Niech $g(t) = e^{-2t} \mathbf{1}(t)$. Ze wzoru (3.30) wynika, że

$$F(j\omega) = \mathcal{F} [t^2 g(t)] = -\frac{d^2 G(j\omega)}{d\omega^2}.$$

Ponieważ $G(j\omega) = \frac{1}{j\omega+2}$, więc

$$F(j\omega) = \frac{2}{(j\omega+2)^3} = \frac{2(8-6\omega^2)}{(\omega^2+4)^3} - j \frac{2(12\omega-\omega^3)}{(\omega^2+4)^3}.$$

□

Twierdzenie 3.9 (o $\mathcal{F}$ -transformacie całki; o całkowaniu w dziedzinie czasu). Jeżeli funkcja f i jej całka $\vartheta(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ spełniają założenia twierdzenia Fouriera oraz

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \vartheta(t) = 0, \quad (3.31)$$

to

$$\mathcal{F} \left[\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{j\omega} F(j\omega). \quad (3.32)$$

Przykład 3.9.

Wyznaczyć $\mathcal{F}$ -transformatę funkcji

$$\vartheta(t) = \int_{-\infty}^t e^{-|\tau|} \sin \tau d\tau.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ funkcja $f(t) = e^{-|t|} \sin t$ jest nieparzysta, zachodzi warunek (3.31). Można łatwo wykazać, że również pozostałe założenia twierdzenia 3.9 są spełnione. Niech $g(t) = e^{-|t|}$. Na podstawie obliczeń wykonanych w przykładzie 3.5 e) stwierdzamy, że

$$G(j\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1}.$$

Ze wzoru (3.28), który jest konsekwencją twierdzenia 3.6 o przesunięciu zespolonym, wynika, że

$$\mathcal{F}[g(t) \sin t] = \frac{1}{2j} [G(j(\omega - 1)) - G(j(\omega + 1))].$$

Korzystamy następnie z powyższego twierdzenia 3.9, z którego otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\vartheta(t)] &= \frac{1}{j\omega} \cdot \frac{1}{2j} [G(j(\omega - 1)) - G(j(\omega + 1))] = \\ &= -\frac{1}{2\omega} \left[\frac{1}{(\omega - 1)^2 + 1} + \frac{1}{(\omega + 1)^2 + 1} \right]. \end{aligned}$$

□

Zadania

Zadanie 3.3.

Korzystając z odpowiednich własności transformaty Fouriera, wyznaczyć $\mathcal{F}$ -transformaty funkcji:

a) $f(t) = e^{-(t-3)} \mathbf{1}(t-3);$

b) $f(t) = \mathbf{1}(t-2) - \mathbf{1}(t-5);$

c) $f(t) = (t-1)[\mathbf{1}(t) - \mathbf{1}(t-2)];$

d) $f(t) = e^{-|t|} \sin 2t;$

e) $f(t) = e^{-3t} \cos 3(t-2) \mathbf{1}(t-2);$

f) $f(t) = t e^{-t} \mathbf{1}(t);$

g) $f(t) = t^n e^{-at} \mathbf{1}(t), a > 0;$

h) $f(t) = t^2 \sin t [\mathbf{1}(t+\pi) - \mathbf{1}(t-\pi)];$

$$\text{i) } f(t) = \int_{-\infty}^t e^{-\tau} \cos \tau \mathbf{1}(\tau) d\tau.$$

Odpowiedzi:

$$\begin{aligned} \text{3.3 a) } & \frac{e^{-3j\omega}}{1+j\omega}; \text{ b) } \frac{e^{-2j\omega}-e^{-5j\omega}}{j\omega}; \text{ c) } \frac{e^{-2j\omega}(1+j\omega)-1+j\omega}{\omega^2}; \text{ d) } -\frac{8j\omega}{\omega^4-6\omega^2+25}; \\ \text{e) } & \frac{e^{-2(3+j\omega)}(-j\omega^3+3\omega^2+54)}{\omega^4+324}; \text{ f) } \frac{1}{(1+j\omega)^2}; \text{ g) } \frac{n!}{(a+j\omega)^{n+1}}; \\ \text{h) } & \frac{j[(2\pi^2\omega^4-4(\pi^2+3)\omega^2+2\pi^2-4)\sin\pi\omega+8\pi(\omega^3-\omega)\cos\pi\omega]}{(\omega^2-1)^3}; \text{ i) } -\frac{\omega^3+j\omega^2+2j}{\omega(\omega^4+4)} + \frac{\pi}{2}\delta(\omega). \end{aligned}$$

3.6. Uwagi bibliograficzne

Pisząc powyższy rozdział, korzystaliśmy w dużej mierze z naszych notatek do zajęć, podobnie jak w przypadku wcześniejszych rozdziałów. Pojęcie i własności transformaty Fouriera opisane są między innymi w podręcznikach [22, 11]. Przy wyborze przykładów i zadań korzystaliśmy także z monografii [12] i zbioru zadań [18]. Istotną pomoc stanowiło *Nowoczesne kompendium matematyki* [2].

Dodatek

Celem tego rozdziału jest przedstawienie podstawowych pojęć z zakresu analizy zespolonej, które mogą być pomocne w zrozumieniu treści zamieszczonych w skrypcie. Ze względu na fakt, że w większości praktycznych zastosowań spotykamy zespolone funkcje wymierne, ograniczymy się w naszych rozważaniach jedynie do tego typu funkcji. Szerzej funkcje zmiennej zespolonej, nie tylko wymierne, są omówione na przykład w [10] lub [17].

A.1. Funkcja holomorficzna

Niech zatem

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (\text{A.1})$$

będzie funkcją wymierną właściwą zmiennej zespolonej s , czyli P i Q są wielomianami zmiennej zespolonej s takimi, że $\text{st}P(s) < \text{st}Q(s)$.

Definicja A.1. Funkcja zespolona f zmiennej zespolonej s jest holomorficzna w punkcie s_0 , jeżeli istnieje jej pochodna f' nie tylko w punkcie s_0 , ale także w każdym punkcie pewnego koła na płaszczyźnie zespolonej o środku w punkcie s_0 .

Zauważmy, że holomorficzność funkcji w punkcie s_0 oznacza więcej niż istnienie pochodnej tej funkcji w danym punkcie. Każda funkcja holomorficzna w danym punkcie jest różniczkowalna (czyli ma w tym punkcie pochodną), ale nie na odwrót.

Definicja A.2. Funkcja zespolona f zmiennej zespolonej s jest holomorficzna w pewnym obszarze na płaszczyźnie zespolonej, jeżeli istnieje jej pochodna f' w każdym punkcie tego obszaru.

Przykład A.1.

- Funkcja $f(s) = |s|^2$, jak można sprawdzić [4], jest różniczkowalna w punkcie $s = 0$, ale nie jest w tym punkcie holomorficzna.
- Funkcja $f(s) = e^s$ jest holomorficzna na całej płaszczyźnie zespolonej, a więc jest różniczkowalna dla dowolnego s zespolonego, [4].

□

A.2. Bieguny. Residua

Podobnie jak w powyższym podrozdziale, zakładamy, że F jest funkcją wymierną daną wzorem (A.1).

Definicja A.3. Punkt s_0 jest nazywany **zerem k -krotnym**, $k = 1, 2, 3, \dots$, funkcji $g(s)$, jeżeli funkcję tę można przedstawić w postaci $g(s) = (s - s_0)^k \varphi(s_0)$, gdzie $\varphi(s_0) \neq 0$.

Definicja A.4. Punkt s_0 jest nazywany **biegunem k -krotnym**, $k = 1, 2, 3, \dots$, funkcji zespolonej $f(s) = \frac{1}{g(s)}$, jeżeli jest zerem k -krotnym funkcji $g(s)$.

Biegun jednokrotny funkcji $f(s)$ nazywamy po prostu *biegunem* tej funkcji.

Przykład A.2.

Niech $g(s) = (s - 1)(s - 4)^5$. Jak łatwo zauważyć, $s = 1$ jest zerem jednokrotnym funkcji $g(s)$, a $s = 4$ – zerem 5-krotnym tej funkcji. Można też zauważyć, że $s = 1$ jest biegunem (jednokrotnym) funkcji $f(s) = \frac{1}{(s-1)(s-4)^5}$, a $s = 4$ – biegunem 5-krotnym tej funkcji. $\square$

Można pokazać, że jeżeli s_0 jest k -krotnym zerem funkcji $f(s) = \frac{1}{g(s)}$, to

$$f(s_0) = f'(s_0) = \dots = f^{(k-1)}(s_0) = 0, \text{ oraz } f^{(k)}(s_0) \neq 0.$$

Wtedy funkcję $g(s)$ w otoczeniu punktu s_0 można przedstawić jako

$$g(s) = \frac{a_{-k}}{(s - s_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(s - s_0)^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{s - s_0} + a_0 + a_1(s - s_0) + a_2(s - s_0)^2 + \dots \quad (\text{A.2})$$

Definicja A.5. Residuum funkcji f w punkcie s_0 , oznaczane jako $\text{res}_{s=s_0} f(s)$, nazywamy współczynnik a_{-1} we wzorze (A.2), czyli

$$\text{res}_{s=s_0} f(s) = a_{-1}.$$

Z powyższej definicji wynika, że residuum funkcji jest liczbą. Jeśli s_0 jest biegunem k -krotnym funkcji f , to obliczamy je, korzystając z następującego wzoru:

$$\text{res}_{s=s_0} f(s) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{s \rightarrow s_0} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left[(s - s_0)^k f(s) \right].$$

Zatem, jeżeli s_0 jest biegunem jednokrotnym, to

$$\text{res}_{s=s_0} f(s) = \lim_{s \rightarrow s_0} [(s - s_0) f(s)].$$

Przykład A.3.

Wyznaczyć residua funkcji $f(s) = \frac{s^2+1}{s^2(s-1)}$ w jej biegunach.

Rozwiązanie:

Funkcja f ma biegun jednokrotny $s_1 = 1$ oraz biegun dwukrotny $s_2 = 0$, zatem, korzystając z powyższych wzorów, otrzymujemy:

$$\operatorname{res}_{s=1} f(s) = \lim_{s \rightarrow 1} [(s-1)f(s)] = \lim_{s \rightarrow 1} \frac{s^2+1}{s^2} = 2$$

oraz

$$\operatorname{res}_{s=0} f(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} [s^2 f(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \left[\frac{s^2+1}{s-1} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2-2s-1}{(s-1)^2} = -1.$$

□

Tablice

Tabela B.1: Transformaty Laplace'a

Lp.	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$	Lp.	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
1.	$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{s}$	9.	$\operatorname{sh} \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 - \omega^2}$
2.	$\mathbf{1}(t - a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	10.	$\operatorname{ch} \omega t$	$\frac{s}{s^2 - \omega^2}$
3.	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	11.	$\delta(t)$	1
4.	e^{at}	$\frac{1}{s - a}$	12.	$\delta(t - a)$	e^{-as}
5.	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{at}$	$\frac{1}{(s - a)^n}$	13.	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\frac{1}{\sqrt{s}}$
6.	$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}$	14.	$\frac{n!}{(2n)!} \frac{4^n}{\sqrt{\pi}} t^{n-1/2}$	$\frac{1}{s^n \sqrt{s}}$
7.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	15.	$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-at}$	$\frac{1}{\sqrt{s + a}}$
8.	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	16.	$\frac{\sin at}{t}$	$\arctg \frac{a}{s}$

W powyższych wzorach $a, \omega \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

Tabela B.2: Transformaty $\mathcal{Z}$

Lp.	$f(n)$	$F(z) = \mathcal{Z}[f(n)]$	Lp.	$f(n)$	$F(z) = \mathcal{Z}[f(n)]$
1.	$\mathbf{1}(n)$	$\frac{z}{z-1}$	13.	$\delta(n-k)$	$\frac{1}{z^k}$
2.	n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	14.	$\frac{a^n}{n!}$	$e^{\frac{a}{z}}$
3.	n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	15.	$\binom{n}{k}$	$\frac{z}{(z-1)^{k+1}}$
4.	n^3	$\frac{z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$	16.	$\binom{k}{n}$	$\left(1 + \frac{1}{z}\right)^k$
5.	a^n	$\frac{z}{z-a}$	17.	$f(2n)=0,$ $f(2n+1)=2$	$\frac{2z}{z^2-1}$
6.	na^n	$\frac{az}{(z-a)^2}$	18.	$f(2n)=0,$ $f(2n+1)=2(2n+1)$	$\frac{2z(z^2+1)}{(z^2-1)^2}$
7.	n^2a^n	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$	19.	$f(2n)=0,$ $f(2n+1)=\frac{2}{2n+1}$	$\ln \frac{z-1}{z+1}$
8.	$\sin \omega n$	$\frac{z \sin \omega}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$	20.	$\cos \frac{\pi}{2}n$	$\frac{z^2}{z^2+1}$
9.	$\cos \omega n$	$\frac{z(z - \cos \omega)}{z^2 - 2z \cos \omega + 1}$	21.	$f(0)=0,$ $f(n)=\frac{1}{n}$ dla $n \geq 1$	$\ln \frac{z}{z-1}$
10.	$\operatorname{sh} \omega n$	$\frac{z \operatorname{sh} \omega}{z^2 - 2z \operatorname{ch} \omega + 1}$	22.	$\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$	$\sqrt{z} \sin \frac{1}{\sqrt{z}}$
11.	$\operatorname{ch} \omega n$	$\frac{z(z - \operatorname{ch} \omega)}{z^2 - 2z \operatorname{ch} \omega + 1}$	23.	$\frac{(-1)^n}{(2n)!}$	$\cos \frac{1}{\sqrt{z}}$
12.	$\delta(n)$	1			

W powyższych wzorach $a, \omega \in \mathbb{R}, k, n \in \mathbb{N}, k < n$.

Tabela B.3: Transformaty Fouriera

Lp.	$f(t)$	$F(j\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$
1.	$\delta(t)$	1
2.	$\delta^{(n)}(t)$	$(j\omega)^n$
3.	$\delta^{(n)}(t-a)$	$(j\omega)^n e^{-j\omega a}$
4.	1	$2\pi\delta(\omega)$
5.	t^n	$2\pi j^n \delta^{(n)}(\omega)$
6.	$\mathbf{1}(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
7.	$\frac{1}{2a} e^{-a t }$	$\frac{1}{\omega^2 + a^2}, (a > 0)$
8.	$\frac{1}{t^2 + a^2}$	$\frac{\pi}{a} e^{-a \omega }$
9.	$\mathbf{1}(t+a) - \mathbf{1}(t-a)$	$\frac{2 \sin \omega a}{\omega}$
10.	e^{jat}	$2\pi\delta(\omega - a)$
11.	$\cos at$	$\pi[\delta(\omega + a) + \delta(\omega - a)]$
12.	$\sin at$	$j\pi[\delta(\omega + a) - \delta(\omega - a)]$
13.	$\sin at^2$	$\sqrt{\pi}a \left(\frac{\omega^2}{4a} + \frac{\pi}{4} \right), (a > 0)$
14.	$\cos at^2$	$\sqrt{\pi}a \left(\frac{\omega^2}{4a} - \frac{\pi}{4} \right), (a > 0)$

W powyższych wzorach $a, \omega \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

Bibliografia

- [1] Bobrowski D., Ratajczak Z.: *Przekształcenie Laplace'a i jego zastosowania*. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Poznańskiej, 1968.
- [2] Bronszejn I.N., Siemiendajew K.A., Musioł G., Mühlig H.: *Nowoczesne kompendium matematyki*. PWN, Warszawa, 2022.
- [3] Decewicz G., Żakowski W.: *Matematyka. Cz. I*. WNT, Warszawa, 2023.
- [4] Długosz J.: *Funkcje zespolone. Teoria, przykłady, zadania*. GiS, Wrocław, 2013.
- [5] Elaydi S.: *An Introduction to Difference Equations*. Springer, Wrocław, 2005.
- [6] Kącki E., Siewierski L.: *Wybrane działy matematyki wyższej z ćwiczeniami*. Wydawnictwo Wyższej Szkoły Informatyki w Łodzi, 2002.
- [7] Kowal J.: *Podstawy automatyki. Cz. I*. Wydawnictwa AGH, Kraków, 2018.
- [8] Kowal J.: *Podstawy automatyki. Cz. II*. Wydawnictwa AGH, Kraków, 2007.
- [9] Krysicki W., Włodarski L.: *Analiza matematyczna w zadaniach, t. I*. PWN, Warszawa, 2018.
- [10] Leja F.: *Funkcje zespolone*. PWN, Warszawa, 2006.
- [11] Leksiński W., Nabiałek I., Żakowski W.: *Matematyka: definicje, twierdzenia, przykłady, zadania*. WNT, Warszawa, 2003.
- [12] Małatyńska G.: *Przekształcenia całkowe i rachunek operatorowy*. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Koszalińskiej, Koszalin, 2001.
- [13] McQuarrie D.: *Matematyka dla przyrodników i inżynierów*. PWN, Warszawa, 2013.
- [14] Mozyrska D., Pawłuszewicz E., Stasiewicz R.: *Równania różniczkowe zwyczajne. Metody klasyczne i metoda operatorowa*. Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, 2001.
- [15] Pułaczewski J., Szacka K., Manitius A.: *Zasady automatyki*. WNT, Warszawa, 1974.
- [16] Ross K.A., Wright Ch.R.B.: *Matematyka dyskretna*. PWN, Warszawa, 2023.
- [17] Rudin W.: *Analiza rzeczywista i zespolona*. PWN, Warszawa, 2009.
- [18] Stankiewicz W., Wojtowicz J.: *Zadania z matematyki dla wyższych uczelni technicznych. Cz. II*. PWN, Warszawa, 1983.
- [19] Świetlicka A., Rybarczyk A., Jurkowlaniec A.: *Rachunek operatorowy. Metody rozwiązywania zadań*. PWN, Warszawa, 2015.
- [20] Zill D.G.: *A First Course in Differential Equations with Modelling Applications*. Cengage Learning, New Delhi, 2017.
- [21] Żakowski W., Kołodziej W.: *Matematyka. Cz. II*. WNT, Warszawa, 2023.
- [22] Żakowski W., Leksiński W.: *Matematyka. Cz. IV*. WNT, Warszawa, 2023.