



Damian Sołtysiak

Stabilność gospodarki w monetarnym modelu
wzrostu typu Keynesa - Metzlera – Goodwina

The stability of the Keynes-Metzler-Goodwin
monetary growth model

Praca doktorska

Promotor: dr hab. Roman Kiedrowski
Promotor pomocniczy: dr Karolina Sobczak
Pracę przyjęto dnia:

Podpis Promotora

Poznań 2023

Spis treści

Wstęp	5
Rozdział 1	
Model Keynesa – Metzlera – Goodwina z egzogeniczną podażą pieniądza	22
1.1. Wyjściowa postać modelu	22
1.1.1. Popyt konsumpcyjny, płace i ceny	22
1.1.2. Popyt inwestycyjny i dynamika majątku trwałego	24
1.1.3. Deficyt budżetowy i dynamika długu publicznego	26
1.1.4. Rynek pieniądza	28
1.1.5. Determinanty produkcji i dynamika zapasów	29
1.1.6. Ograniczenia produkcji przez zasoby pracy i majątku trwałego	30
1.1.7. Równość inwestycji i oszczędności	32
1.1.8. Kompletny układ równań modelu	34
1.1.9. Sprzężenia zwrotne	35
1.2. Postać intensywna modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza	48
1.2.1. Sprowadzenie modelu do postaci intensywnej	48
1.2.2. Stan stacjonarny modelu w postaci intensywnej	52
1.2.3. Równania opisujące wartości zmiennych modelu intensywnego w stanie stacjonarnym	56
1.2.4. Analiza wrażliwości stanu stacjonarnego na zmiany parametrów modelu	58
Podsumowanie	67
Rozdział 2	
Model typu Keynesa – Metzlera - Goodwina z regułą Taylora i kredytem inwestycyjnym	69
2.1. Reguła Taylora, kredyt inwestycyjny i ogólne zadłużenie netto w modelu KMGT	70
2.1.1. Reguła Taylora kształtowania stopy procentowej	70
2.1.2. Kredyt inwestycyjny, emisja obligacji i ogólne zadłużenie netto	73
2.2. Model KMGT i jego stan stacjonarny	77
2.2.1. Kompletny układ równań modelu KMGT z kredytem inwestycyjnym	77
2.2.2. Równość inwestycji i oszczędności	78
2.2.3. Model KMGT w postaci intensywnej	79
2.2.4. Stan stacjonarny modelu KMGT	85
2.2.5. Analiza wrażliwości stanu stacjonarnego	91
Podsumowanie	94
Rozdział 3	
Stabilność stanów stacjonarnych modeli KMG i KMGT	95
3.1. Twierdzenie o stabilności równowagi w modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza	95
3.2. Dowód twierdzenia o stabilności modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza	99
3.2.1. Ogólna charakterystyka dowodu	99
3.2.2. Macierz Jacobiego modelu	101

3.2.3. Redukcja stopni wielomianów.....	110
3.2.4. Przywracanie dodatnich wartości parametrów reakcji.....	113
3.3. Twierdzenie o stabilności modelu KMG z regułą Taylora i kredytem inwestycyjnym	120
3.4. Dowód twierdzenia o stabilności modelu KMG z regułą Taylora i kredytem inwestycyjnym.....	123
3.4.1. Ogólna charakterystyka dowodu.....	123
3.4.2. Macierz Jacobiego modelu	124
3.4.3. Redukcja stopni wielomianów.....	127
3.4.4. Przywracanie dodatnich wartości parametrów reakcji	130
Podsumowanie	134
Rozdział 4	
Ekspertyzy symulacyjne	136
4.1. Kalibracja modelu na podstawie danych o gospodarce polskiej	138
4.1.1. Modyfikacja modelu KMG na potrzeby eksperymentów symulacyjnych	139
4.1.2. Zmodyfikowany model KMG w postaci intensywnej	142
4.1.3. Adaptacja podstawowych równań zmodyfikowanego modelu KMG	145
4.1.4. Kalibracja parametrów reakcji przy pomocy programu Solver	151
4.1.5. Podsumowanie	158
4.2. Ekspertyzy symulacyjne na podstawie modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza.....	158
4.2.1. Procedury obliczeniowe	158
4.2.2. Stany stacjonarne gospodarki polskiej przy różnych zestawach wartości parametrów reakcji	161
4.2.3. Scenariusze wzrostu gospodarki polskiej przy różnych zestawach wartości parametrów reakcji	165
4.2.4. Analiza wpływu polityki fiskalnej i pieniężnej na gospodarkę	177
4.2.5. Podsumowanie	192
4.3. Ekspertyzy symulacyjne na podstawie modelu KMG z regułą Taylora (KMGT)	193
4.3.1. Uwagi ogólne	193
4.3.2. Porównanie modeli KMG i KMGT na podstawie symulacji komputerowych	196
4.3.3. Analiza wpływu polityki fiskalnej i pieniężnej na gospodarkę opisaną równaniami modelu KMGT	200
4.3.4. Podsumowanie	204
4.4. Symulacje wpływu szoków zewnętrznych na gospodarkę polską w świetle modelu KMGT	204
4.4.1. Charakterystyka szoków zewnętrznych	204
4.4.2. Procedury obliczeniowe	210
4.4.3. Analiza wpływu szoków zewnętrznych	217
4.4.4. Podsumowanie	221
Zakończenie	222
Bibliografia	225

Wstęp

Zdecydowaną większość teoretycznych modeli wzrostu gospodarczego stanowią modele opisujące procesy wzrostu zachodzące w realnej sferze gospodarki w długim horyzoncie czasowym. Podstawowymi zmiennymi takich modeli są kapitał (majątek trwały), produkcja, zatrudnienie, kapitał ludzki, inwestycje, konsumpcja, postęp technologiczny. W przypadku modeli wzrostu gospodarki zdecentralizowanej (modeli dynamicznej równowagi ogólnej) dodatkowymi zmiennymi są wynagrodzenia z pracy i kapitału). Jeżeli w modelach uwzględnia się także sektor publiczny (rządowy), to wśród zmiennych pojawiają się ponadto wydatki rządowe, podatki, obligacje, dług publiczny. Powyższa lista zmiennych jest wystarczająca do sformułowania zdecydowanej większości modeli wzrostu. Przykłady takich modeli można znaleźć między innymi w obszernych monografiach poświęconych teorii wzrostu gospodarczego takich jak Barro, Sala-i-Martin (1995), Acemoglu (2009), Novales, Fernandez, Ruiz (2009).

Odrębną klasą modeli wzrostu gospodarczego są monetarne modele wzrostu umożliwiające badanie wpływu polityki pieniężnej na wzrost gospodarczy. W tradycyjnych monetarnych modelach wzrostu polityka pieniężna znajduje swoje odzwierciedlenie w zmianach podaży pieniądza kontrolowanych przez bank centralny. Przyjmuje się, że bank centralny dąży do utrzymania określonego (zwykle wykładniczego) wzrostu podaży pieniądza (ilości pieniądza w obiegu) poprzez odpowiednie kształtowanie wysokości stopy procentowej, która wraz z wielkością produkcji determinuje popyt na pieniądz. W nowszych monetarnych modelach wzrostu obserwuje się tendencję do pomijania podaży pieniądza i skupiania uwagi bezpośrednio na stopie procentowej jako głównym instrumencie banku centralnego służącym z jednej strony do realizacji jego celu inflacyjnego, a z drugiej do podtrzymywania wzrostu gospodarczego. Taki sposób modelowania polityki pieniężnej ujmowany jest w różnych wersjach tzw. równania Taylora opisującego czynniki wpływające na zmienność stopy procentowej (Taylor (1993, 1999), Bullard (2002), McCandless (2008), Baranowski P. (2008)).

Podobnie jak w całej teorii wzrostu gospodarczego także w przypadku monetarnych modeli wzrostu na plan pierwszy wysuwają się zwykle dwa zagadnienia. Pierwsze z nich dotyczy tego, czy gospodarka opisana danym modelem jest zdolna do trwałego,

równomiernego wzrostu. Jest to pytanie o istnienie ścieżki równomiernego wzrostu, a ponieważ wzrost równomierny jest wzrostem w którym proporcje między zmiennymi (struktura gospodarki) pozostają niezmiennie, pytanie to sprowadza się do pytania o istnienie takich proporcji między zmiennymi, które ów równomierny wzrost umożliwiają. W terminologii używanej w teorii wzrostu gospodarczego proporcje te definiują stan stacjonarny gospodarki. W przypadku monetarnych modeli wzrostu, w kontekście stanu stacjonarnego pojawia się pytanie o zależność lub brak niezależności stanu stacjonarnego od takiej lub innej polityki pieniężnej (problem neutralności pieniądza). Drugie, kluczowe zagadnienie badane w teorii wzrostu gospodarczego dotyczy pytania czy gospodarka, która w stanie początkowym nie znajduje się na ścieżce równomiernego wzrostu (a tym samym nie znajduje się w stanie stacjonarnym) z upływem czasu dąży do tej ścieżki, osiągając proporcje zbliżone do tych, które charakteryzują stan stacjonarny. Jeżeli zbieżność taka występuje to mówimy o asymptotycznej stabilności stanu stacjonarnego. W zależności od rozpatrywanego modelu może się on cechować kompletnym brakiem stabilności, stabilnością globalną lub lokalną. O stabilności globalnej mówimy, gdy zbieżność do stanu stacjonarnego nie zależy od początkowego stanu gospodarki, a o stabilności lokalnej gdy warunkiem zbieżności do stanu stacjonarnego jest odpowiednio mała odległość stanu początkowego (w kategoriach proporcji między zmiennymi) od stanu stacjonarnego. Stabilność gospodarki może być wynikiem procesów adaptacyjnych (opisywanych równaniami różniczkowymi lub różnicowymi), w których wartości zmiennych z okresu na okres dostosowują się do różnego typu nierównowag, a może też wynikać z własności rozwiązań zadań optymalizacji dynamicznej, formułowanych w celu znajdowania długookresowych, optymalnych scenariuszy wzrostu gospodarczego. W każdym przypadku stabilność nie jest bezwarunkową cechą gospodarki. Matematyczne twierdzenia o stabilności różnych modeli wzrostu zawsze opierają się na szeregu założeń bez których dowody stabilności byłyby niemożliwe. W przypadku monetarnych modeli wzrostu wśród założeń gwarantujących stabilność gospodarki interesujące są w szczególności założenia dotyczące wzrostu podaży pieniądza czy też reguł kształtowania stopy procentowej. Założenia tego rodzaju pozwalają na formułowanie wniosków dotyczących tego czy i jak polityka pieniężna może wpływać na stan stacjonarny oraz na stabilność lub niestabilność gospodarki.

Prekursorem wprowadzenia pieniądza do modeli wzrostu jest amerykański ekonomista James Tobin, który w Tobin (1955) zaprezentował model za pomocą którego analizował wpływ tempa wzrostu podaży pieniądza na wzrost gospodarczy. Głównym problemem podjętym w Tobin (1955) była próba sformułowania takiego monetarnego modelu wzrostu, który byłby wolny od tzw. problemu ostrza noża (*Knife Edge Problem*), znanego z modelu wzrostu Harroda. (Harrod (1939, 1942).

Problem ten związany jest z kompletną niestabilnością gospodarki i polega na tym, że każde jej wytrącenie ze ścieżki równomiernego wzrostu skutkuje pogłębiającą się nierównowagą bez szans powrotu na ścieżkę równomiernego wzrostu (więcej na temat problemu ostrza noża: Piętań (2017) oraz Filipowicz i in. (2016)). W pracy z 1955 roku Tobinowi nie udało się jasno i jednoznacznie rozstrzygnąć kwestii stabilności stanu stacjonarnego w analizowanym modelu. Dopiero 10 lat później w swojej pracy (Tobin (1965)) zaprezentował on monetarny neoklasyczny model wzrostu będący rozszerzeniem modelu Solowa (1956) - Swana (1956) o czynniki monetarne, na podstawie którego sformułował wniosek (jak wykazano w kolejnych badaniach nad modelem Tobina wniosek ten był błędny (zob. Nagatani (1970))), że odpowiednia polityka pieniężna może być rozwiązaniem problemu ostrza noża (zob. także Dimand (2014) oraz Dimand i Durlauf (2009))¹. Innym ciekawym wnioskiem sformułowanym przez Tobina było to, że szybszy wzrost podaży pieniądza wiąże się z wyższym poziomem kapitału rzeczowego oraz wyższą produkcją na osobę w stanie stacjonarnym, co spowodowane jest tym, że wyższy poziom inflacji skłania oszczędzających do zmiany struktury portfela aktywów na korzyść kapitału rzeczowego. To z kolei oznacza, że w stanie stacjonarnym modelu Tobina pieniądz nie jest neutralny. Inna z tez sformułowanych przez Tobina głosi, że wzrost inflacji może mieć pozytywny wpływ na inwestycje ponieważ w warunkach inflacji wartość rynkowa przedsiębiorstw rośnie szybciej niż poziom cen (tzw. efekt Tobina)².

Wnioski sformułowane przez Tobina uznane zostały za kontrowersyjne i skłoniły wielu autorów do modyfikacji jego modelu w celu kontynuowania badań nad wpływem pieniądza

¹ W literaturze najczęściej pomijana jest praca Tobina z 1955 roku, a cytowana dopiero z 1965 roku (zob. Sijben (1977), Orphanides i Solow (1990)).

² Zob. Okun (1971), zob. także pracę Fischer (1978), w której autorzy opisują negatywny wpływ inflacji na wzrost gospodarczy.

i inflacji na wzrost gospodarczy (Johnson (1966), Levhari i Patinkin (1968), Sidrauski (1967a, 1967b)).

Levhari i Patinkin (1968) wykazali, że jeśli w modelu Tobina stopa oszczędności jest funkcją zależną od stóp zwrotu z aktywów zawartych w portfelu sektora prywatnego (kapitału rzeczowego i pieniądza), to efekt Tobina może nie wystąpić. Dornbusch i Frenkel (1973) wprowadzając do modelu Tobina funkcję konsumpcji zależną od inflacji i rzeczywistej wartości majątku *per capita* udowodnili, że w stanie stacjonarnym wzrost inflacji zmniejsza zainteresowanie inwestycjami w kapitał rzeczowy, co jest efektem przeciwnym do efektu Tobina.

Istotne zastrzeżenie do modelu Tobina dotyczyło niestabilnego charakteru stanu stacjonarnego, który jest niestabilnym punktem siodłowym. W praktyce oznacza to, że nawet niewielkie odchylenia od równowagi mogą prowadzić do znacznych fluktuacji i dalszych odchyżeń od równowagi (zob. Sidrauski (1967b), Nagatani (1970)). W konsekwencji okazało się, że Tobin nie rozwiązał problemu „ostrza noża” w swojej pracy z 1965r. Jedno z rozwiązań tego problemu zaproponował M. Sidrauski, który w swojej pracy z 1967r. (Sidrauski (1967b)) zastąpił założenie zastosowane w oryginalnym modelu Tobina, że inflacja w każdym momencie równa jest inflacji oczekiwanej na ten moment (założenie perfekcyjnych przewidywań) hipotezą adaptacyjnych oczekiwań (Cagan 1956), uzyskując w ten sposób stabilność stanu stacjonarnego.

Model Tobina był krytykowany także za to, że pieniądź traktowany był w nim wyłącznie jako środek wymiany, a nie jako forma oszczędności co nie było przekonującym wyjaśnieniem dlaczego gospodarstwa domowe utrzymują część swojego majątku w postaci pieniądza, skoro nie przynosi to żadnych bezpośrednich dochodów. Przekonujące wyjaśnienie tego problemu przedstawił dopiero M. Sidrauski, który w przełomowej pracy Sidrauski (1967b) wprowadził pieniądź do modelu optymalnego wzrostu gospodarczego Ramseya-Cassa-Koopmansa (w skrócie RCK) przyjmując że argumentem międzyokresowej funkcji użyteczności oprócz konsumpcji *per capita* jest zasób realnego pieniądza *per capita* posiadanego przez gospodarstwa domowe. Pozwoliło to na pokazanie roli pieniądza nie tylko jako środka wymiany, ale także jako formy oszczędności gromadzonych w celu sfinansowania konsumpcji w przyszłości, co uznane zostało za bliższe rzeczywistości, gdyż faktycznie ludzie gromadzą pieniądze na przyszłe wydatki, m.in. na emeryturę.

Sidrauski wykazał, że w stanie stacjonarnym jego modelu, przeciwnie niż w modelu Tobina, pieniądz jest neutralny, co przejawia się w tym, że wartości zmiennych realnych w stanie stacjonarnym nie zależą od tempa wzrostu podaży pieniądza, które wpływa tylko na wielkość inflacji. Ważnym rezultatem uzyskanym przez Sidrauskiego było też pokazanie, że w jego modelu - podobnie jak w innych modelach typu RCK - stan stacjonarny jest stabilnym punktem siodłowym, co oznacza, że rozwiązanie optymalne modelu, niezależnie od stanu początkowego, jest zbieżne do stanu stacjonarnego wzdłuż jednej i tej samej ścieżki siodłowej.

W kolejnych latach powstało wiele modyfikacji i rozszerzeń modelu Sidrauskiego, których celem była próba lepszego uchwycenia roli pieniądza. Przykładowo, w Fischer (1974) zaprezentowany został zmodyfikowany model Sidrauskiego w którym pieniądz jest argumentem w funkcji produkcji. W przypadku tego modelu autor odnotowuje brak neutralności pieniądza w stanie stacjonarnym. Innym przykładem jest Brock (1974), gdzie prezentowany jest model, w którym w międzyokresowej funkcji użyteczności, oprócz konsumpcji i realnego zasobu pieniądza, uwzględniany jest dodatkowo trzeci argument, jakim jest czas wolny. Model opisuje gospodarkę, w której gospodarstwa domowe dzielą swój czas na pracę, która pozwoli im zwiększyć konsumpcję i w efekcie użyteczność, oraz na czas wolny, który jest bezpośrednim źródłem użyteczności. Jest to oczywistym krokiem w kierunku zbliżenia modelu do rzeczywistości. Brock wykazał, że stan stacjonarny w jego modelu istnieje i jest asymptotycznie stabilny.

Modele wzrostu Tobina i Sidrauskiego oraz dziesiątki ich późniejszych rozwinięć i modyfikacji zaliczają się do ekonomii neoklasycznej. Ich podstawowe wspólne cechy to założenie o permanentnej równowadze na rynkach produktu, pracy i pieniądza. Wspólne jest też założenie o technologii produkcji opisanej neoklasyczną funkcją produkcji w postaci intensywnej o malejącej krańcowej efektywności kapitału przypadającego na jednego pracownika.

Współcześnie, w neoklasycznej monetarnej teorii wzrostu dominują wywodzące się od modelu Sidrauskiego modele typu Ramsey-Cassa-Koopmansa z pieniądzem, w których inaczej niż w modelu Tobina czy Solowa, stopa oszczędności nie jest już stałym parametrem lecz zmienną czasu. Dynamika gospodarki wynikająca z rozwiązania powyższych modeli podporządkowana jest postulatowi maksymalizacji międzyokresowej użyteczności w nieskończonym horyzoncie czasowym przez reprezentatywnego konsumenta –

inwestora. Przykłady takich modeli prezentowane są m.in. w Walsh (1998), Turnovsky (2000), Novaledes i in. (2009), Barbarosa (2018).

Poczynając od lat 60-tych ubiegłego wieku, równolegle do neoklasycznych monetarnych modeli wzrostu rozwijane były monetarne modele wzrostu zaliczane do ekonomii keynesowskiej. Nurt keynesowskich modeli wzrostu, zakłada, że gospodarka jest w stanie nierównowagi i dochodzenie do ścieżki równomiernego wzrostu odbywa się w warunkach nierównowagi. W tych modelach istotnym elementem jest mechanizm zbieżności do równowagi, który polega na zachodzących w kolejnych okresach reakcjach dostosowawczych do różnych stanów nierównowagi (np. produkcja i ceny reagują na nierównowagę na rynku produktów). Innymi słowy, modele te zakładają, że gospodarka dąży do równowagi, ale na jej drodze pojawiają się różne zakłócenia, które wpływają np. na poziom produkcji, zatrudnienia i inflacji.

W przeciwieństwie do neoklasycznych modeli, modele keynesowskie zakładają, że gospodarka może pozostawać w stanie długotrwałej nierównowagi, w której występują m.in. bezrobocie i niewykorzystany potencjał produkcyjny. Modele keynesowskie zakładają, że rynki nie zawsze działają efektywnie i w związku z tym mogą występować zaburzenia w gospodarce. W przeciwieństwie do modeli neoklasycznych, w modelach keynesowskich uwzględnia się podział społeczeństwa na pracowników najemnych i właścicieli kapitału. Uwzględnienie podziału społeczeństwa na pracowników i właścicieli kapitału w modelach keynesowskich pozwala na bardziej realistyczną analizę procesów gospodarczych i ich wpływu na różne grupy społeczne (nawet w najbardziej rozwiniętych gospodarkach kapitalistycznych jak np. USA większa część społeczeństwa utrzymuje się wyłącznie z pracy, często nie posiadając żadnych oszczędności). Modele te biorą pod uwagę m.in. wpływ płac na konsumpcję pracowników, wpływ zysków na inwestycje właścicieli kapitału oraz wpływ polityki fiskalnej i monetarnej na całą gospodarkę. W ten sposób modele keynesowskie pozwalają na analizę problemów społecznych takich jak bezrobocie, ubóstwo czy nierówności dochodowe, co jest istotne z punktu widzenia polityki gospodarczej i społecznej.

W monetarnych modelach keynesowskich szczególną uwagę poświęca się roli polityki monetarnej w stabilizacji gospodarki i wpływie zmian stóp procentowych na aktywność gospodarczą. W tych modelach aktywność gospodarcza zależy od wydatków konsumpcyjnych i inwestycyjnych, które mogą być hamowane przez wyższe stopy

procentowe, co z kolei wpływa na zatrudnienie i produkcję. Polityka monetarna, poprzez zmianę stóp procentowych, może wpłynąć na pobudzenie lub hamowanie aktywności gospodarczej i zmianę poziomu inflacji.

Pierwszą grupą takich modeli były modele typu Keynesa-Wicksella (w skrócie modele KW). Modele te mają swoje korzenie w pracach Gunnara Myrdala, Erika Lidahla, Friedricha Hayeka i samego Johna Maynarda Keynesa i stanowią próbę pogodzenia krótkookresowych fluktuacji wynikających z nierównowagi między popytem i podażą z długookresowym, równomiernym wzrostem gospodarczym. Liczne przykłady modeli typu Keynesa-Wicksella prezentowane są w pracach Stein (1966, 1968, 1969, 1970, 1971), Rose (1966, 1967, 1969), Fischer (1972), Fujino (1974), Sijben (1977), Nagatani (1978), Brems (1980), Iwai (1981), Asada (1991), Ogawa (2020).

W odróżnieniu od neoklasycznych modeli wzrostu, w których równowaga między inwestycjami a oszczędnościami jest uważana za naturalną, w modelach Keynesa-Wicksella zakłada się, że decyzje inwestycyjne są niezależne od decyzji oszczędnościowych. Decyzje inwestycyjne są podejmowane przez przedsiębiorstwa, które szukają sposobów na zwiększenie swojego zysku. Wpływ na decyzje inwestycyjne ma przede wszystkim oczekiwany wzrost popytu i poziom rentowności inwestycji. Natomiast decyzje o oszczędnościach są podejmowane przez gospodarstwa domowe i przedsiębiorstwa, które dążą do maksymalizacji swojego dochodu i minimalizacji ryzyka. Wpływ na oszczędności ma przede wszystkim poziom dochodów, ceny i oczekiwania co do przyszłego poziomu inflacji.

W modelach Keynesa-Wicksella, oszczędności i inwestycje nie zawsze są równe, co przekłada się na nierównowagę na rynku towarów. Zakłada się także, że ceny zmieniają się w momencie, gdy oszczędności są różne od inwestycji (nierównowaga na rynku towarów). Dodatkowo przyjmuje się nierównowagę na rynku pracy przy jednoczesnym założeniu równowagi na rynku pieniądza.

Podobnie jak w neoklasycznych monetarnych modelach wzrostu, badacze w swoich pracach nad modelami typu KW zajmują się analizą stabilności modelu oraz wpływem polityki pieniężnej (skutkującą wyższą lub niższą inflacją) na wzrost gospodarczy.

Jeden z pierwszych monetarnych modeli typu KW został opisany i zbadany w pracy Stein (1966). Autor modelu wykazuje, że gospodarka opisana jego modelem przy odpowiednich założeniach po pewnym czasie będzie rozwijała się równomiernie ze stałą stopą wzrostu

równą stopie wzrostu podaży pracy. Wyniki modelu wskazują na brak neutralności pieniądza. Innymi słowy, wykazano, że większa podaż pieniądza w stanie stacjonarnym przekłada się na wyższy poziom inflacji, co wpływa na wartości zmiennych realnych modelu.

Na bazie modeli typu KW powstały kolejne rozwinięcia keynesowskich monetarnych modeli wzrostu gospodarczego, w których autorzy próbowali ulepszyć wcześniejsze modele, m.in. poprzez modyfikacje równań, zmianę założeń, a także poprzez syntezę różnych modeli.

Przykładem może być monetarny model wzrostu AD-AS (zagregowanego popytu i zagregowanej podaży) opisany w Sargent (1987)³. W odróżnieniu od modelu Keynesa-Wicksella, w modelu AD-AS przedstawionym przez Sargenta zakłada się równowagę na rynku towarów. Dopuszcza się nierównowagę na rynku pracy, zakładaną również w modelach typu KW, a poziom zatrudnienia zależy od decyzji produkcyjnych firm. Poziom inflacji zależy od dynamiki płac i dynamiki oczekiwań inflacyjnych, opisanych dwoma dodatkowymi równaniami.

Ważnym wnioskiem przedstawionym w pracach Franke (1992) oraz Chiarella (2005, rozdział 2) jest odrzucenie twierdzenia przedstawionego w Sargent (1987 s. 119) o wpływie polityki pieniężnej na stabilność modelu. Sargent stwierdził, że model wytrącony z równowagi przez zmianę tempa wzrostu podaży pieniądza (zmiana skokowa) zawsze wróci na ścieżkę równomiernego wzrostu. To stwierdzenie nie zostało jednak oparte przez Sargenta żadnym dowodem. Jak zauważyli Flaschel oraz Franke (zob. Franke (1992), Flaschel (1993)) stan stacjonarny jest lokalnie asymptotycznie stabilny a więc odpowiednia zmiana wzrostu podaży pieniądza może doprowadzić do utraty stabilności. Oznacza to, że nieodpowiednia polityka pieniężna może doprowadzić do destabilizacji gospodarki.

Modele AD-AS analizowane są od kilkunastu (zob. Franke (1992), Flaschel (1993), Chiarella (2005)). Badania koncentrują na analizie stanu stacjonarnego oraz warunków, przy których gospodarka jest zbieżna do tego stanu.⁴

³ W Sargent (1987) autor przedstawia także klasyczną wersję modelu AD-AS. Te dwa modele różnią się m. in. założeniem nt. równowagi na rynku pracy, który w modelu klasycznym jest w równowadze a w keynesowskim niekoniecznie.

⁴ Dużo informacji na temat rozwoju monetarnych modeli wzrostu można znaleźć m.in. w: Chiarella i in. (2000), Orphanides i Solow (1990).

Kolejnym przykładem monetarnego modelu wzrostu będącego modyfikacją modelu KW jest monetarny model wzrostu typu Keynesa – Metzlera– Goodwina (w skrócie model KMG) będący tematem niniejsze pracy.

Autorami modelu KMG są trzech ekonomiści keynesowscy: Carla Chiarelli, Petera Flaschela i Willego Semmlera, którzy zajmowali się rozwojem ekonomii keynesowskiej od ponad dwóch dekad i opublikowali wspólnie (niekiedy z innymi współautorami) serię książek o ekonomii keynesowskiej z naciskiem na wzajemne relacje między sferą realną a sferą finansową gospodarki. Między innymi należy wspomnieć o obszernej monografii *“The Dynamics of Keynesian Monetary Growth”* (Chiarella, Flaschel (2000)) i fundamentalnej trylogii *“Reconstructing Keynesian Macroeconomics”*, Vol. I-III (Chiarella, Flaschel (2012), (2013), (2014)), w której podejmują próbę całkowitej reinterpretacji i rekonstrukcji całej makroekonomii keynesowskiej⁵. Inne ważne prace tych autorów to: Chiarella, Flaschel Groh, Semmler (2000); Asada, Chiarella, Flaschel, Franke (2003); Chiarella, Flaschel, Franke (2005), Charpe, Chiarella, Flaschel, Semmler (2011).

Najważniejszy monetarny model wzrostu analizowany (w różnych wariantach) przez C. Chiarellę, P. Flaschela i W. Semmlera to wspomniany wyżej model KMG. Nazwa modelu KMG została użyta aby podkreślić jego związek z koncepcjami wypracowanymi przez wcześniejszych wielkich ekonomistów. W równaniach modelu KMG można znaleźć idee wyrażone w pracy Keynesa (1936) oraz w pracy Goodwina (1967) na temat interakcji wzrostu i dystrybucji dochodów; są to komponenty K i G modelu. Modele KMG uwzględniają brak równowagi na rynku towarów, implikacje zmian zapasów oraz stopniowe dostosowywanie zapasów do pożądanego poziomu. Dynamika zapasów związana jest również z koncepcją oczekiwanej sprzedaży (oczekiwanym popytem), sformułowaną zgodnie z założeniami dostosowania zapasów przedstawionych w pracy Metzlera (1941) i stanowiącą komponent M modelu. Tym samym model KMG nawiązuje także do modeli typu Keynesa-Wicksella przedstawionych m.in. w Stain (1966), Rose (1966) i Fischer (1972). Poza tym warto wspomnieć o jego podobieństwie do modelu keynesowskiego przedstawionego przez Sargenta (1987, rozdział 5).

⁵ Innym alternatywnym i ważnym nurtem ekonomii odwołującym się do Keynesa jest ekonomia postkeynesowska (Marc Lavoie, 2014)

Modele typu KMG opisują dynamikę gospodarki za pomocą złożonego układu nieliniowych równań różniczkowych odzwierciedlających adaptacyjne procesy decyzyjne. Cechą charakterystyczną tych modeli jest możliwość przekształcenia ich w tzw. postać intensywną, w której wszystkie wyjściowe zmienne są zastępowane nowymi zmiennymi opisującymi proporcje między nimi. Model w postaci intensywnej pozwala na zdefiniowanie stanu stacjonarnego, który opisuje stałe proporcje pomiędzy zmiennymi wyjściowymi utrzymywane w procesie równomiernego wzrostu. Głównymi wynikami teoretycznymi, jakie można uzyskać dla modelu w postaci intensywnej, są twierdzenia o stabilności stanu stacjonarnego. Twierdzenia te pokazują warunki, w jakich gospodarka zmierza do stanu stacjonarnego, co jest równoznaczne ze zbliżaniem się do ścieżki równomiernego wzrostu.

Ponieważ model w postaci intensywnej jest układem nieliniowych równań różniczkowych, aby udowodnić jego (lokalną) stabilność asymptotyczną, należy wykazać, że wszystkie wartości własne macierzy Jacobiego tego układu są, albo liczbami ujemnymi, albo liczbami zespolonymi z ujemnymi częściami rzeczywistymi. Badanie wartości własnych to standardowy sposób udowadniania stabilności, stosowany po wielokroć dla różnych modeli dynamicznych. Ponieważ wartości własne są również pierwiastkami odpowiedniego wielomianu, ich analiza jest dość łatwa, jeśli mamy do czynienia z układem dwóch równań różniczkowych. Jednak staje się to bardzo trudnym i czasochłonnym zadaniem w przypadku systemów wielowymiarowych, takich jak model KMG. W tym drugim przypadku jedyny sposób wykazania, że wartości własne danej macierzy Jacobiego gwarantują stabilność, sprowadza się najczęściej do wyzerowania odpowiednich parametrów macierzy, co umożliwia wielokrotne rozwinięcie Laplace'a wyznacznika macierzy Jacobiego w celu uzyskania ciągu macierzy coraz niższego rzędu, których wartości własne są już prostsze do analizy. Najpierw pokazuje się, że macierz najniższego rzędu ma odpowiednie wartości własne. Następnie, poprzez późniejsze przywrócenie odpowiednio małych dodatnich wartości poprzednio wyzerowanych parametrów, wykazuje się, że również pierwotna macierz Jacobiego ma wartości własne, które są, albo liczbami ujemnymi, albo liczbami zespolonymi z ujemnymi częściami rzeczywistymi.

Pierwszy dowód stabilności modelu KMG oparty na zarysowanej powyżej idei został przedstawiony dwadzieścia lat temu w pracy Chiarelli i in. (2002). Inne wersje dowodu stabilności (dotyczące zmodyfikowanych modeli KMG) można znaleźć w Asada i in. (2003)

oraz Chiarella i in. (2006). Wyżej opisaną, zastosowaną przez siebie ogólną metodę dowodzenia stabilności modeli KMG, jej autorzy nazwali metodą kaskady macierzy stabilnych (*the cascade of stable matrices approach*).⁶

Prace nad rozszerzeniami oraz modyfikacjami modelu KMG trwają do dnia dzisiejszego. Przykładem mogą być publikacje Ogawa (2019ab, 2020), w których rozszerzono model KMG o dualny rynek pracy. Innym przykładem jest praca Flaschela (2020), w którym wykorzystano rozbudowany model KMG do analizy wpływu podatków, płatności transferowych i wydatków rządowych na poprawę ochrony socjalnej pracowników należących do sektora gospodarstw domowych. Warto wspomnieć o najnowszej pracy Chiarella i in. (2021), która jest zwieńczeniem rozwoju bielefeldskiej szkoły myśli makroekonomicznej⁷. Ciekawy wariant modelu KMG z długiem prywatnych przedsiębiorstw, mający na celu modelowanie skutków polityki fiskalnej i monetarnej, został przedstawiony w pracy Asada i in. (2018, 2019). Autorzy tych prac zajmują się również kwestią istnienia cykli granicznych w modelu KMG. Keynesowskie monetarne modele wzrostu podobne do modelu KMG zostały ostatnio przedstawione w Murakami (2016, 2018, 2020) oraz Araujo i in. (2020). W pracach tych bada się m.in. istnienie cykli granicznych, orbit okresowych oraz skuteczność antycyklicznej polityki pieniężnej.

Niniejsza praca jest wkładem autora w badania nad modelem KMG. Autor analizuje w niej dwie nowe, autorskie wersje modelu KMG. Modele te, mając wiele cech wspólnych, różnią się zasadniczo sposobem opisu rynku pieniężnego. W pierwszym z modeli (określonym w pracy modelem KMG) zakłada się wykładniczy wzrost podaży pieniądza. Równocześnie popyt na pieniądź jest rosnącą funkcją oczekiwanego popytu finalnego na rynku produktu i malejącą funkcją stopy procentowej. W konsekwencji, przy założeniu równowagi rynku pieniężnego, stopa procentowa musi dostosowywać się do zmian

⁶ Termin *the cascade of stable matrices approach* użyty został m.in w Chiarella i in. (2006). Podobna metoda dowodzenia stabilności, polegająca na chwilowym zerowaniu elementów macierzy Jacobiego modelu i późniejszym przywracaniu ich dodatnich wartości, zastosowana została, niezależnie od cytowanych prac, w dowodach stabilności innych wielowymiarowych, nieliniowych modeli dynamicznych w: Duménil, Lévy (1991), Kiedrowski (2018).

⁷ Szkoła Bielefeld odnosi się do grupy ekonomistów i naukowców społecznych związanych z Bielefeld University w Niemczech. Badania szkoły koncentrują się na makroekonomii, polityce gospodarczej i zmianach społecznych, a jej członkowie wnieśli znaczący wkład w te dziedziny. Jednym z członków tej szkoły był autor modelu KMG Peter Flaschel.

oczekiwanego popytu w taki sposób, aby popyt na pieniądź (równy podaży pieniądza) również rósł wykładniczo.

W drugim modelu funkcja popytu na pieniądź w ogóle nie występuje, a dynamika stopy procentowej opisana jest równaniem Taylora (z tego względu – dla rozróżnienia – drugi model nazywany jest modelem KMGT). Zgodnie z równaniem Taylora zmiany stopy procentowej zależą od trzech czynników – od odchylenia bieżącej stopy procentowej od jej pożądanej wartości, od odchylenia stopy inflacji od pożądanej stopy inflacji (celu inflacyjnego) oraz od odchylenia wskaźnika wykorzystania zdolności produkcyjnych od naturalnego poziomu tego wskaźnika. W modelu KMGT zmiany podaży pieniądza są wielkością rezydualną zależną głównie od popytu przedsiębiorstw na kredyty inwestycyjne oraz od potrzeb pożyczkowych państwa (emisji obligacji).

Oba modele są wynikiem licznych modyfikacji wprowadzonych przez autora do ich pierwowzorów. Punktem odniesienia dla pierwszego modelu prezentowanego w rozprawie jest model KMG prezentowany w Asada i in. (2003). Pierwowzorem drugiego z modeli jest z kolei model KMG z Charpe i in. (2011)

Inną istotną różnicą między omawianymi modelami jest to, że w modelu KMG występuje jedynie równanie behawioralne opisujące czynniki wpływające na poziom inwestycji netto, natomiast nie ma wskazanych *explicite* źródeł finansowania tych inwestycji. W modelu KMGT, poza wspomnianym równaniem behawioralnym (w rozbudowanej postaci), pojawia się także równanie pokazujące wprost, że inwestycje przedsiębiorstw finansowane są z ich zysków oraz z kredytu inwestycyjnego.

W prezentowanej pracy zrealizowane zostały cztery cele badawcze. Pierwszym było opracowanie dwóch nowych modeli typu KMG, które różnią się od wersji analizowanych w dotychczasowej literaturze szeregiem modyfikacji.

Drugim celem było przekształcenie sformułowanych modeli do postaci intensywnej oraz wyznaczenie i analiza ich stanów stacjonarnych, odpowiadających ścieżkom równomiernego wzrostu. Najważniejszym w całej rozprawie i najtrudniejszym do osiągnięcia był cel trzeci, jakim było udowodnienie stabilności obu badanych modeli KMG.

Ostatnim ze zrealizowanych celów było przeprowadzenie szeregu symulacji komputerowych na podstawie danych o gospodarce polskiej. Symulacje dostarczyły odpowiedzi na szereg pytań, których nie można była uzyskać poprzez w wyniku analiz jakościowych modelu.

Zastosowane modyfikacje służą udoskonaleniu modeli poprzez wyeliminowanie z ich równań niektórych wątpliwych czynników, obecnych we wcześniejszych wersjach modeli KMG. Czynniki te, czego nie ukrywają autorzy modelu, zostały wprowadzone nie ze względu na ich ekonomiczną przydatność, ale przede wszystkim ze względu na prostotę, która ułatwia matematyczną analizę modelu. Pierwsze dwie zaproponowane w niniejszej pracy modyfikacje dotyczą równań opisujących tempo wzrostu kapitału rzeczowego \dot{K}/K oraz tempo wzrostu oczekiwanego popytu \dot{Y}^e/Y^e . We wszystkich modelach KMG przedstawionych w Chiarella i in. powyższe równania zawierają parametr n wyrażający sumę stałego tempa wzrostu podaży pracy i tempa wzrostu wydajności pracy. Wprowadzenie do tych równań n jest bardzo wygodne, ponieważ w stanie stacjonarnym pozostałe składniki równań zerują się, co natychmiast implikuje, że w stanie stacjonarnym zarówno kapitał rzeczowy, jak i oczekiwany popyt rosną w tempie n . W niniejszej pracy w równaniu opisującym wzrost kapitału rzeczowego \dot{K}/K parametr n został zastąpiony zmienną wyrażającą tempo wzrostu oczekiwanego popytu \dot{Y}^e/Y^e . Jednocześnie usunięto parametr n z równania opisującego tempo wzrostu oczekiwanego popytu \dot{Y}^e/Y^e i zastąpiono go stopą wzrostu płacy realnej jako jednym z dwóch czynników wpływających na \dot{Y}^e/Y^e , co z ekonomicznego punktu widzenia jest dużo bardziej uzasadnione. Tempo wzrostu płacy realnej jest zmienną endogeniczną, która zależy od innych zmiennych modelu: przede wszystkim od tempa wzrostu płacy nominalnej oraz od inflacji. Podobny charakter ma trzecia modyfikacja dotycząca równania określającego poziom produkcji Y . W tym przypadku wzbudzający wątpliwości czynnik nN^d (N^d - pożądany poziom zapasów) został zastąpiony przez \dot{Y}^e , czyli przez zmianę oczekiwanego popytu.

Inne ważne modyfikacje dotyczą założenia o podatkach oraz odsetkach od posiadanych obligacji rządowych. We wszystkich wersjach modelu KMG, aby ułatwić wyprowadzenie postaci intensywnej modelu, przyjmuje się, że ryczałtowe realne podatki pomniejszone o odsetki z posiadanych obligacji rządowych są pobierane w taki sposób, że ich stosunek do kapitału rzeczowego pozostaje stały (zob. np. Chiarella i in. (2000)). W konsekwencji nie uwzględnia się zależności podatków od stawek podatkowych nakładanych na dochody z pracy czy z kapitału rzeczowego. Tę zależność wzięto pod uwagę w autorskiej wersji modelu przedstawionej w niniejszej rozprawie, co pozwala na pełniejszą analizę polityki fiskalnej w zakresie podatków i deficytu budżetu państwa. W szczególności, w przeciwieństwie do modeli typu KMG prezentowanych dotąd w literaturze, relacja

deficytu budżetu państwa do kapitału rzeczowego przestaje być stała w czasie, pomimo założenia o stałej relacji wydatków państwa do kapitału rzeczowego.

Powyższe modyfikacje dotyczą obu przedstawionych w pracy modeli. Kolejna modyfikacja dotyczy tylko modelu KMG z rozdziału pierwszego i polega na wprowadzeniu do tego modelu nieliniowej funkcji popytu na pieniądź. W prezentowanych w literaturze modelach KMG zawsze rozpatrywana była liniowa funkcja popytu na pieniądź, której wartość zależy od oczekiwanego popytu na rynku produktu oraz odchylenia bieżącej stopy procentowej od danej egzogenicznie pożądanej stopy procentowej (równej stopie procentowej w stanie stacjonarnym). W stanie stacjonarnym odchylenie między obiema stopami przyjmuje wartość zerową co sprawia, że popyt na pieniądź w stanie stacjonarnym zależy tylko przez oczekiwanego popytu na rynku produktu i nie zależy od stopy procentowej. Jest to wątpliwe z ekonomicznego punktu widzenia⁸. Dlatego też w analizowanym w pierwszym rozdziale rozprawy modelu KMG rozważana jest nieliniowa funkcja popytu na pieniądź. Ma to daleko idące konsekwencje, gdyż w rezultacie stopa procentowa w stanie stacjonarnym staje się wielkością endogeniczną, zależną od wszystkich parametrów modelu.

Wspomniane modyfikacje skutkują pojawieniem się nowych sprzężeń zwrotnych oraz zwiększeniem złożoności obu analizowanych modeli. Mimo to okazuje się, że przedstawione w pracy modele można przekształcić do postaci intensywnej oraz możliwe jest jednoznaczne wyznaczenie stanu stacjonarnego, co jest drugim celem pracy. Otwiera to drogę do wykazania lokalnej asymptotycznej stabilności omawianych modeli, czyli do realizacji trzeciego celu pracy, stanowiącego przedmiot zainteresowania każdej matematycznej teorii wzrostu gospodarczego

Zaprezentowane w pracy dwa dowody lokalnej asymptotycznej stabilności dwóch modeli KMG wykorzystują wspomnianą wyżej metodę *the cascade of stable matrices approach*, nazwaną i zastosowaną przez Chiarellę i współautorów, m. in. w pracach Chiarella i in (2000, 2006, 2011). Mimo to, z co najmniej dwóch powodów, ich przeprowadzenie nie sprowadza się tylko do odtworzenia dowodów stabilności wcześniejszych wersji modelu KMG. Po pierwsze matematyczna struktura modeli KMG

⁸ Chiarella i in. przyznają, że powyższe założenie zostało wprowadzone w celu ułatwienia analizy modelu (Chiarella i in. 2000, s.279).

opracowanych w pracy jest znacznie bardziej złożona niż jego wcześniejsze wersje analizowane w Chiarella i in. Jest to szczególnie widoczne w postaci intensywnej modeli (w przypadku modelu KMG postać ta składa się z siedmiu nieliniowych równań różniczkowymi z dwiema dodatkowymi zmiennymi pomocniczymi, w przypadku modelu KMGT tych równań jest dziewięć z dwiema dodatkowymi zmiennymi pomocniczymi), dla których wyznaczono macierze Jacobiego w stanie stacjonarnym i zbadano ich wartości własne. Drugim powodem jest to, że dowód stabilności uzyskuje się przy innym zestawie założeń dotyczących parametrów modelu. Część z tych założeń dotyczy stawek podatkowych, których w modelach KMG analizowanych w Chiarella i in. w ogóle nie ma.

Aby udowodnić stabilność, trzeba było pokonać dwie podstawowe trudności. Pierwszą z nich było wyznaczenie pochodnych cząstkowych w stanie stacjonarnym wszystkich funkcji definiujących dynamikę modelu w postaci intensywnej w celu zbadania macierzy Jacobiego. Druga trudność dotyczyła pytania, które parametry w macierzy Jacobiego należy wyzerować oraz w jakiej kolejności, aby ostatecznie pokazać, że wszystkie wartości własne macierzy Jacobiego są albo liczbami ujemnymi, albo liczbami zespolonymi z ujemnymi częściami rzeczywistymi. Wybór parametrów, które zostaną wyzerowane nie budzi takiej wątpliwości jak kolejność ich zerowania. Kolejne próby udowodnienia stabilności stanu stacjonarnego pokazały, że niepoprawna kolejność zerowania parametrów prowadzi do komplikacji przy określaniu znaków badanych wartości własnych macierzy Jacobiego. Wykorzystana metoda *the cascade of stable matrices approach* nie daje żadnej wskazówki, jak sobie poradzić z tym kluczowym pytaniem. Właściwy sposób postępowania został znaleziony w pracochłonnym procesie przez podjęcie szeregu prób, które ostatecznie doprowadziły do sukcesu.

Udowodnienie istnienia stanu stacjonarnego oraz wykazanie, że przy pewnych założeniach stan ten jest lokalnie asymptotycznie stabilny, nie daje odpowiedzi na wiele ważnych z ekonomicznego punktu widzenia pytań dotyczących rozwoju gospodarki opisaną omawianymi modelami KMG i KMGT. Jedynym z nich jest pytanie o czas jaki potrzebuje gospodarka na to, aby startując ze stanu początkowego, znalazła się na ścieżce równomiernego wzrostu. Inne równie ważne pytanie dotyczy tego jak bardzo oddalony od stanu stacjonarnego może być stan początkowy gospodarki aby zmierzała ona do stanu stacjonarnego. Na te oraz wiele innych pytań tego rodzaju można uzyskać odpowiedzi tylko

w wyniku symulacji komputerowych. Przeprowadzenie takich symulacji było czwartym i ostatnim celem pracy.

Symulacje przeprowadzone zostały dla danych o gospodarce polskiej z wykorzystaniem obu modeli analizowanych w rozprawie. Przed przystąpieniem do symulacji modele te zostały zmodyfikowane w taki sposób, aby można było uwzględnić w nich jak najwięcej informacji o gospodarce polskiej, zachowując zarazem ich matematyczną strukturę. W dalszej kolejności, na podstawie tych samych danych, skalibrowane zostały parametry modeli oraz wyznaczone zostały ich stany stacjonarne.

Przeprowadzone liczne symulacje komputerowe potwierdziły prawdziwość udowodnionych w rozprawie twierdzeń o lokalnej asymptotycznej stabilności stanu stacjonarnego modeli KMG i KMGT. Wyniki symulacji okazały się podobne do wyników uzyskanych przez innych autorów i pokazały, że dochodzenie gospodarki do stanu stacjonarnego jest powolne, oscylacyjne i wymaga bardzo długiego horyzontu czasowego. W wynikach symulacji stan stacjonarny jawi się raczej jako stan, który, chociaż nieosiągalny w realistycznym horyzoncie czasowym, pełni rolę „busoli” gospodarki wyznaczającej kierunek zachodzących w niej zmian strukturalnych spowodowanych procesami rynkowymi. Na tym przede wszystkim polega praktyczne znaczenie stabilności modeli KMG.

Oprócz empirycznych analiz stabilności przeprowadzając symulacje komputerowe poddano również analizie wpływ polityki fiskalnej i pieniężnej na gospodarkę w krótszych horyzontach czasowych. Porównano wyniki symulacji uzyskane na podstawie modelu KMG i modelu KMGT. Dodatkowo przeprowadzono symulację działań osłonowych ze strony polityki pieniężnej przed skutkami perturbacji gospodarczych związanych z pandemią wirusa SARS - CoV2. Analizowano jak ekspansywna polityka pieniężna może łagodzić skutki tych perturbacji oraz jakie mogą być jej długookresowe skutki.

Praca składa się z czterech rozdziałów. W rozdziale pierwszym przedstawiona została autorska wersja modelu KMG z wykładniczo rosnącą podażą pieniądza. Przedstawiony model sprowadzony został do postaci intensywnej, wyznaczono jego stan stacjonarny i zbadano wrażliwość stanu stacjonarnego na zmiany wartości parametrów modelu.

W drugim rozdziale zaprezentowano kolejną autorską wersję modelu KMG - model z regułą Taylora i kredytem inwestycyjnym. Następnie przedstawiono analizę tego modelu podobną do analizy modelu z rozdziału pierwszego.

W rozdziale trzecim przedstawiono matematyczne dowody stabilności obu modeli prezentowanych w poprzednich rozdziałach. Dowody te są głównymi, teoretycznymi wynikami autora prezentowanymi w rozprawie. Udowodnione twierdzenia o stabilności podają wystarczające warunki zbieżności modelowanych gospodarek do ścieżki równomiernego wzrostu.

Czwarty rozdział poświęcony jest symulacjom komputerowym na podstawie danych o gospodarce polskiej, przeprowadzonych na podstawie badanych modeli. Przeprowadzone symulacje w szczególności potwierdzają prawdziwość twierdzeń o stabilności udowodnionych w rozdziale trzecim.

Ostatnią i integralną część rozprawy stanowią, zakończenie i bibliografia.

Wyniki przedstawione w pracy stanowią punkt wyjścia do dalszych prac autora mających na celu m.in. zbadanie bifurkacji Hopfa, które mogą być kluczowe w symulacjach kryzysów gospodarczych oraz dalsze modyfikacje modelu w celu jeszcze lepszego dostosowania go do opisu rzeczywistości gospodarczej.

Rozdział 1

Model Keynesa – Metzlera – Goodwina z egzogeniczną podażą pieniądza

Niniejszy rozdział poświęcony jest przedstawieniu i analizie zmodyfikowanej przez autora wersji modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza. Wersja oryginalna modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza, będąca odniesieniem dla tego rozdziału, prezentowana była wcześniej w pracach Chiarella i in. (2000), (2005), (2013).

W pierwszym podrozdziale rozdziału zaprezentowano wyjściowe równania zmodyfikowanego modelu, a następnie przedstawiono szczegółową analizę sprzężeń zwrotnych między jego zmiennymi. W drugim podrozdziale przedstawiono sprowadzenie modelu do postaci intensywnej i wyznaczono jego stan stacjonarny, generujący ścieżkę równomiernego wzrostu gospodarki. Przeprowadzona została też analiza wrażliwości stanu stacjonarnego na zmiany parametrów modelu.

1.1. Wyjściowa postać modelu

Prezentację modelu rozpoczniemy od omówienia kolejnych bloków równań modelu. Część z prezentowanych równań jest identyczna z równaniami rozpatrywanymi przez Chiarellę i in., a pozostałe to równania zmodyfikowane lub całkowicie nowe. Ważnym elementem opisu wprowadzonych modyfikacji są szczegółowe uwagi zamieszczone w przypisach, zawierające porównania zmodyfikowanych równań z ich oryginalnymi odpowiednikami przyjmowanymi w pracach Chiarella i in..

Wszystkie zmienne modelu są z założenia ciągłymi i różniczkowalnymi funkcjami czasu. W celu uproszczenia zapisu zmienne te prezentowane są jednak bez indeksu czasu. W całej pracy symbolem \dot{x} oznaczamy pochodną $\dot{x} = dx/dt$ zmiennej $x = x(t)$ względem czasu, którą interpretujemy jako zmianę wartości tej zmiennej (przyrost lub spadek) przypadającą na nieskończenie mały przedział czasu. Symbolem \hat{x} oznaczmy z kolei stopę wzrostu zmiennej $x = x(t)$ postaci $\hat{x} = \dot{x}/x$.

1.1.1. Popyt konsumpcyjny, płace i ceny

Całkowity popyt finalny Y^d (w ujęciu realnym) jest sumą konsumpcji sektora prywatnego C , inwestycji brutto sektora prywatnego I oraz popytu sektora rządowego (publicznego) G :

$$Y^d = C + I + G. \quad (1.1.1)$$

Popyt konsumpcyjny opisuje równanie:

$$C = (1 - \tau_w)\omega L^d, \quad (1.1.2)$$

gdzie: ω - płaca realna, L^d - popyt na pracę (równy z założenia zatrudnieniu), τ_w - stawka podatku od dochodów z pracy. Pomimo pozornej prostoty równania (1.1.2) dynamika konsumpcji jest wynikiem złożonych procesów kształtujących z jednej strony dynamikę produkcji wpływającą na zatrudnienie, a z drugiej strony dynamikę płacy realnej $\omega = w/p$, będącej ilorazem płacy nominalnej w i poziomu cen p .

Stopa wzrostu płacy realnej $\hat{\omega} = \dot{\omega}/\omega$ jest różnicą pomiędzy stopą wzrostu płac nominalnych \hat{w} i stopą wzrostu cen, czyli wskaźnikiem inflacji $\pi = \hat{p}$:

$$\hat{\omega} = \hat{w} - \hat{p} \quad . \quad (1.1.3)$$

Dynamikę płac i cen określają dwa oddzielne równania dwóch krzywych Phillipsa⁹. Stopa wzrostu płacy nominalnej kształtuje się według następującego „płacowego” równania krzywej Phillipsa:

$$\hat{w} = \beta_w(V - \bar{V}) + \kappa_w\hat{p} + (1 - \kappa_w)\pi^e + n, \quad (1.1.4)$$

w którym $\beta_w > 0$ jest parametrem reakcji stopy wzrostu płacy nominalnej na odchylenie stopy zatrudnienia $0 < V < 1$ (stosunku zatrudnienia do podaży pracy) od naturalnej stopy zatrudnienia \bar{V} ¹⁰. Na stopę wzrostu płac ma także wpływ wypukła kombinacja wskaźników inflacji (stopy wzrostu cen) $\pi = \hat{p}$ i oczekiwanej inflacji π^e ($0 < \kappa_w < 1$) oraz stała w czasie stopa wzrostu wydajności pracy $n > 0$.

Wskaźnik inflacji $\pi = \hat{p}$ opisuje z kolei „cenowe” równanie krzywej Phillipsa:

$$\hat{p} = \beta_p(u - \bar{u}) + \kappa_p(\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p)\pi^e, \quad (1.1.5)$$

zgodnie z którym inflacja zależy od odchylenia wskaźnika wykorzystania zdolności produkcyjnych $0 < u < 1$ od jego normalnego poziomu \bar{u} ¹¹ oraz od wypukłej kombinacji

⁹ Więcej na temat krzywej Phillipsa z oczekiwaniami inflacyjnymi można znaleźć w pracach Galbraith (1997), Rose (1990) oraz Fair (1997a,b). Natomiast interesującą dyskusję, czy krzywa Phillipsa znajduje potwierdzenie empiryczne, przedstawiają Mankiw (2001), Coenen (2003) oraz Grabia (2014).

¹⁰ W literaturze częściej pojawia się równoważne naturalnej stopie zatrudnienia pojęcie naturalnej stopy bezrobocia, NAIRU (*non-accelerating-inflation rate of unemployment*). Koncepcja naturalnej stopy bezrobocia bazuje m.in. na pracach Friedmana (1968). Friedman twierdził, że w gospodarce znajdującej się w stanie równowagi zawsze występuje pewien stały poziom bezrobocia (NAIRU), który jest niezależny od zmian w popycie globalnym (więcej na temat koncepcji NAIRU można znaleźć w pracy Galbraith (1997) oraz Romer (1996).

¹¹ Normalny poziom wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej \bar{u} jest zdefiniowany jako pewien stały poziom wykorzystania zdolności produkcyjnych, który przyczynia się do stabilizacji poziomu

oczekiwanej inflacji i nadwyżki stopy wzrostu płac nominalnych ponad stopę wzrostu wydajności pracy¹². Współczynnik $\beta_p > 0$ jest parametrem reakcji cen na odchylenie $u - \bar{u}$ (lukę produkcyjną)¹³.

Zmiana oczekiwanej inflacji (zmiana oczekiwań inflacyjnych), wyrażona pochodną $\dot{\pi}^e$, następuje z kolei w sposób opisany równaniem

$$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e}(\alpha\hat{p} + (1 - \alpha)\bar{\pi} - \pi^e), \quad (1.1.6)$$

w którym β_{π^e} jest dodatnim parametrem reakcji a suma $\alpha\hat{p} + (1 - \alpha)\bar{\pi}$ jest wypukłą kombinacją aktualnej inflacji $\pi = \hat{p}$ i inflacji w stanie stacjonarnym $\bar{\pi} = \mu - n$, będącej różnicą między daną egzogenicznie stałą stopą wzrostu podaży pieniądza μ a stopą równomiernego wzrostu gospodarki, równą stopie wzrostu wydajności pracy n . Jak wynika z równania (1.1.6) oczekiwania inflacyjne wzrastają, gdy kombinacja $\alpha\hat{p} + (1 - \alpha)\bar{\pi}$ jest większa od aktualnie oczekiwanej inflacji π^e ¹⁴.

1.1.2. Popyt inwestycyjny i dynamika majątku trwałego

Popyt inwestycyjny sektora prywatnego I jest sumą inwestycji netto, powiększających zasób kapitału trwałego przedsiębiorstw, oraz inwestycji restytucyjnych ponoszonych w celu zastąpienia kapitału, który uległ deprecjacji. Inwestycje netto opisuje pochodna kapitału względem czasu \dot{K} , natomiast inwestycje restytucyjne - iloczyn δK , gdzie $0 < \delta < 1$ jest wskaźnikiem deprecjacji kapitału. Tak więc:

$$I = \dot{K} + \delta K. \quad (1.1.7)$$

Inwestycje netto (przyrost kapitału) kształtują się zgodnie z równaniem behawioralnym:

$$\dot{K} = i_1(\rho^e - \xi - (r - \pi^e))K + i_2(u - \bar{u}) + \hat{Y}^e K, \quad (1.1.8)$$

cen. Więcej na temat normalnego poziomu wykorzystania mocy produkcyjnej można znaleźć m.in. w pracy Bassi (2019).

¹² Wskaźnik wykorzystania zdolności produkcyjnych $0 < u < 1$ oraz stopa zatrudnienia $0 < V < 1$ są zmiennymi modelu zdefiniowanymi ściśle w punkcie 1.1.5 (równania (1.1.18) i (1.1.21)).

¹³ Odchylenie $u - \bar{u}$ determinuje tzw. lukę produkcyjną będącą różnicą między faktycznym poziomem uzyskanego PKB a możliwym produktem potencjalnym. (Białowolski 2005 s. 37-38).

¹⁴ Idea równania (1.1.6) pochodzi od Groth (1988, s. 254). Korekta oczekiwań inflacyjnych π^e jest kombinacją dwóch reguł: reguły oczekiwań adaptacyjnych oraz mechanizmu regresywnego ze współczynnikiem α . Przypadek graniczny $\alpha = 1$ reprezentuje oczekiwania adaptacyjne. Drugi skrajny przypadek, $\alpha = 0$, reprezentuje mechanizm regresywny. Szybkość dostosowań oczekiwań inflacyjnych określa parametr reakcji $\beta_{\pi^e} > 0$.

gdzie: ρ^e – oczekiwana stopa zysku z kapitału trwałego, ξ – premia za ryzyko¹⁵, r – nominalna stopa procentowa od obligacji rządowych (rentowność obligacji), $(r - \pi^e)$ – oczekiwana realna stopa procentowa, $\hat{Y}^e = \dot{Y}^e/Y^e$ – oczekiwana stopa wzrostu popytu finalnego (wielkość popytu), $i_1 > 0$ oraz $i_2 > 0$ to parametry reakcji.

Zgodnie z (1.1.8) czynnikami sprzyjającymi wysokiej stopie wzrostu kapitału $\hat{K} = \dot{K}/K$ są:

- dodatnia różnica między realną, oczekiwaną stopą zysku z kapitału trwałego ρ^e zmniejszoną o premię za ryzyko ξ a realną, oczekiwaną stopą procentową od obligacji, równą $r - \pi^e$,
- wysoki stopień wykorzystania zdolności produkcyjnych, przekraczający stopień naturalny ($u - \bar{u} > 0$),
- wysoka stopa wzrostu oczekiwanego popytu (sprzedaży) $\hat{Y}^e = \dot{Y}^e/Y^e$.

Uzależnienie stopy wzrostu kapitału od stopy wzrostu oczekiwanego popytu jest pierwszą modyfikacją modelu KMG wprowadzoną przez autora¹⁶. Jest to założenie zgodne z teorią keynesowską, w której podkreśla się kluczową rolę popytu jako determinanty wzrostu gospodarczego:

„The feature that is uniquely Keynesian in growth models, and is found in all such models, however, is the role of aggregate demand as a determinant of growth.”

(Dutt 2012 p. 42).

Stopa wzrostu oczekiwanego popytu \hat{Y}^e zależy z kolei od stopy wzrostu płac realnych \hat{w} oraz względnego błędu oczekiwań dotyczących wielkości realnego popytu $\frac{Y^d - Y^e}{Y^e}$:

¹⁵ Premia za ryzyko kapitałowe (ang. *equity risk premium*) – jest to termin opisujący poziom ryzyka inwestycyjnego związanego z danym krajem lub rynkiem (w porównaniu z pozbawionym ryzyka inwestowaniem w obligacje rządowe). Premią za ryzyko kapitałowe określa się nadwyżkę zysku z inwestycji kapitałowych ponad stopę wolną od ryzyka.

¹⁶ W innych modelach KMG dynamika kapitału rzeczowego jest opisana znacznie prostszym równaniem postaci: $\dot{K} = i_1(\rho^e - (r - \pi^e))K + i_2(u - \bar{u}) + nK$ (np. Chiarella i in. (2013, s. 246). Wobec faktu, że w stanie stacjonarnym $\rho^e = (r - \pi^e)$ oraz $u = \bar{u}$ z równania tego wynika bezpośrednio, że w stanie stacjonarnym stopa wzrostu kapitału rzeczowego \dot{K}/K jest równa stopie stałej wzrostu wydajności pracy n . Jak przyznają Chiarella i in., przyjęta przez nich postać równania dynamiki kapitału nie tylko ułatwia wyprowadzenie stanu stacjonarnego modelu, ale - co ważniejsze - ułatwia także udowodnienie twierdzenia o lokalnej asymptotycznej stabilności stanu stacjonarnego. Można w związku z tym przypuszczać, że uzależnienie stopy wzrostu kapitału od danego parametru n podyktowane było wyłącznie chęcią uproszczenia analiz.

$$\hat{Y}^e = \hat{\omega} + \beta_{ye} \frac{Y^d - Y^e}{Y^e}, \quad (1.1.9)$$

gdzie $\beta_{ye} > 0$ jest parametrem reakcji

Pogląd, że wzrost płacy realnej zwiększa oczekiwany popyt jest dość oczywisty i wyrażany przez wielu ekonomistów (np. Napoletano i in. (2012), Lavoie i Stockhammer (2014)). Pomimo tego zależność powyższa nie była uwzględniana we wcześniejszych wersjach modelu KMG. Wprowadzenie równania (1.1.9) jest drugą autorską modyfikacją modelu KMG¹⁷.

Warto podkreślić, że składnik $\hat{Y}^e K$ w równaniu (1.1.8) w połączeniu z (1.1.9) zwiększa złożoność modelu, wprowadzając do niego kolejne duże sprzężenie zwrotne. Z jednej strony inwestycje $I = \dot{K} + \delta K$ są bowiem składnikiem popytu końcowego $Y^d = C + I + G$, a z drugiej strony są zależne od popytu końcowego. Ta ostatnia zależność jest realizowana bezpośrednio przez (1.1.8) i (1.1.9) oraz pośrednio przez to, że zgodnie z (1.1.19) - (1.1.20) popyt końcowy wpływa na decyzje produkcyjne, które z kolei poprzez (1.1.22), (1.1.23), (1.1.25) i (1.1.3)-(1.1.5) wpływają na wzrost płacy realnej i oczekiwanego popytu, a tym samym na wzrost kapitału rzeczowego.

Oczekiwana realna stopa zysku z kapitału rzeczowego jest stosunkiem oczekiwanego zysku do kapitału rzeczowego, gdzie oczekiwany zysk jest różnicą między oczekiwaną wielkością popytu finalnego Y^e a kosztami pracy ωL^d i deprecją kapitału rzeczowego:

$$\rho^e = \frac{Y^e - \omega L^d - \delta K}{K}. \quad (1.1.10)$$

1.1.3. Deficyt budżetowy i dynamika długu publicznego

Podobnie jak w pracach Sargent (1987), Asada i in. (2011, 2012), Chiarella i in. (2000, 2005, 2011), dla uproszczenia przyjmuje się, że popyt sektora rządowego G jest proporcjonalny do kapitału rzeczowego K , czyli

$$G = gK, \quad (1.1.11)$$

gdzie g jest stałym w czasie stosunkiem popytu sektora rządowego do kapitału.

¹⁷ We wszystkich wcześniejszych wersjach modelu KMG stopa wzrostu oczekiwanego popytu \hat{Y}^e nie wpływa na stopę wzrostu kapitału \hat{K} , a jedynie na wielkość produkcji. Stopa ta nie zależy od stopy wzrostu płacy realnej $\hat{\omega}$ lecz opisana jest równaniem $\hat{Y}^e = n + \beta_{ye} \frac{Y^d - Y^e}{Y^e}$, gdzie n jest egzogenicznie określoną stałą stopą wzrostu zatrudnienia lub sumą stóp wzrostu zatrudnienia i wydajności pracy. (zob. np. Chiarella i in. (2013, s. 247)). Takie założenie jest dość wątpliwe z ekonomicznego punktu widzenia.

Założenie powyższe umożliwia sprowadzenie całego modelu do postaci intensywnej, w której zmienne wyrażają wartości wyjściowych zmiennych na jednostkę kapitału rzeczowego. Warunek $G = gK$ implikuje dodatkowo, że w stanie stacjonarnym popyt sektora rządowego stanowi stałą część produkcji Y .

Poza wydatkami na dobra i usługi, wydatki rządowe obejmują również odsetki od obligacji, wypłacane sektorowi prywatnemu, których realna wartość wynosi $\frac{rB}{p}$. Wydatki rządowe finansowane są głównie z podatków T . Całkowity dochód rządu z podatków (w ujęciu realnym) to suma podatków od wynagrodzeń $\tau_w \omega L^d$ i podatków od rzeczywistych zysków z kapitału trwałego $\tau_c \rho K$ i finansowego $\tau_c \frac{rB}{p}$ (od realnej wartości obligacji rządowych):

$$T = \tau_w \omega L^d + \tau_c \left(\rho K + \frac{rB}{p} \right), \quad (1.1.12)$$

gdzie τ_w jest stawką podatkową od wynagrodzeń, a τ_c - jednolitą stawką podatkową od zysków z kapitału rzeczowego i finansowego (obligacji). Natomiast ρ to rzeczywista stopa zysku z kapitału rzeczowego, którą definiujemy jako stosunek rzeczywistego zysku do kapitału rzeczowego, gdzie rzeczywisty zysk jest różnicą między rzeczywistym popytem równym wartości realnego popytu Y^d , a realnymi kosztami pracy ωL^d i deprecjacji kapitału δK :

$$\rho = \frac{Y^d - \omega L^d - \delta K}{K}.$$

Podkreślić należy, że równanie (1.1.12), mimo swojej oczywistości, również nie występowało we wcześniejszych wersjach modelu KMG¹⁸.

Jeżeli wpływy z podatków nie wystarczają na pokrycie wydatków budżetu państwa powstały deficyt finansowany jest środkami ze sprzedaży obligacji sektorowi prywatnemu, co pisuje równanie

$$\dot{B} = pG + rB - pT, \quad (1.1.13)$$

¹⁸ We wcześniejszych wersjach modelu KMG (zob. np. Chiarella i in. (2013, s. 247) zakłada się stały w czasie stosunek dodatniego salda realnych transferów finansowych do i z budżetu państwa, równego $T - rB/p$, do wartości kapitału, czyli $(T - rB/p)/K = t^n = \text{const}$. Założenie takie jest bardzo wątpliwe z ekonomicznego punktu widzenia, za to bardzo pomocne w matematycznej analizie modelu. Podobne założenie dotyczące podatków można znaleźć u Sargenta (1987, s. 16) i u Rødsetha (2000, s. 122). Wprowadzenie równania (1.1.12), zasadne z ekonomicznego punktu widzenia, znacząco komplikuje matematyczną analizę modelu – wyznaczenie stanu stacjonarnego i dowód jego stabilności.

gdzie B to dług publiczny (całkowita wartość obligacji rządowych w posiadaniu sektora prywatnego, a \dot{B} (pochodna B względem czasu) odzwierciedla zmiany tego zadłużenia.

1.1.4. Rynek pieniądza

Celem polityki pieniężnej banku centralnego jest utrzymywanie stałego tempa wzrostu podaży pieniądza $\mu > 0$, a więc

$$\hat{M} = \frac{\dot{M}}{M} = \mu . \quad (1.1.14)$$

W modelu zakładamy, że rynek pieniężny w każdym momencie czasu jest w stanie równowagi. Tak więc stałe tempo wzrostu podaży pieniądza wymusza identyczny wzrost popytu na pieniądź, aby w każdym momencie spełnione było równanie:

$$M = M^d , \quad (1.1.15)$$

gdzie M^d to popyt na pieniądź.

Z kolei popyt na pieniądź M^d rośnie wraz z oczekiwanym nominalnym popytem finalnym na produkt, równym pY^e , oraz maleje ze wzrostem nominalnej stopy procentowej r . Zakładamy, że zależność tę wyraża nieliniowa funkcja popytu na pieniądź postaci:

$$M^d = h \frac{pY^e}{r} \quad (1.1.16)$$

gdzie $h > 0$ jest parametrem reakcji.

Przyjęty warunek równowagi na rynku pieniężnym (1.1.15) oznacza, że w dowolnym momencie nominalna stopa procentowa r dostosowuje się do oczekiwanego nominalnego popytu finalnego pY^e w taki sposób, że popyt na pieniądź (1.1.16) rośnie wykładniczo i jest identyczny z podażą pieniądza M . Z (1.1.16) i równości $M^d = M$ wynika, że

$$r = h \frac{pY^e}{M} , \quad (1.1.17)$$

gdzie M rośnie wykładniczo, zgodnie z (1.1.14).

Opisany powyżej sposób kształtowania się stopy procentowej również odróżnia prezentowany model KMG od jego wcześniejszych wersji. Różnica polega na tym, że we wcześniejszych modelach KMG funkcja popytu na pieniądź była funkcją liniową i - co ważniejsze - opisywała zależność popytu na pieniądź od oczekiwanego popytu na rynku towarów oraz od odchylenia bieżącej stopy procentowej r od, z góry ustalonej,

„normalnej”, stopy procentowej r_o (zob. np. Chiarella i in. (2013, s. 247))¹⁹. Ta, na pierwszy rzut oka stosunkowo niewielka różnica, ma daleko idące konsekwencje. Wynikają one z faktu, że w stanie stacjonarnym odchylenie $r_o - r$ przyjmuje wartość zerową, co powoduje, że w funkcji popytu na pieniądź znika stopa procentowa jako zmienna determinująca popyt na pieniądź. Jest to wątpliwe z ekonomicznego punktu widzenia²⁰. Rozpatrywanie funkcji popytu w postaci (1.1.16) zachowuje wpływ stopy procentowej na popyt na pieniądź także w stanie stacjonarnym. Co więcej, wartość stopy procentowej w stanie stacjonarnym staje się wielkością endogeniczną, zależną od wszystkich parametrów modelu.

1.1.5. Determinanty produkcji i dynamika zapasów

Aby przeciwdziałać trudnościom z zachowaniem ciągłości sprzedaży spowodowanej zbyt niskimi zapasami lub zmniejszeniu przychodów będących konsekwencją zbyt wysokich zapasów, producenci dążą do utrzymywania pewnego, pożądanego stosunku zapasów do oczekiwanego popytu. W modelu KMG dążenie producentów wyraża równanie

$$N^d = \beta_{Nd} Y^e, \quad (1.1.18)$$

w którym pożądaný poziom zapasów w ujęciu realnym N^d jest proporcjonalny do oczekiwanej realnej sprzedaży (oczekiwanego realnego popytu) Y^e , ze współczynnikiem $\beta_{Nd} > 0$. Dynamikę oczekiwanego popytu Y^e opisuje równanie (1.1.9).

Zmiana rzeczywistego poziomu zapasów w ujęciu realnym \dot{N} jest różnicą między realną produkcją Y a realnym popytem (sprzedażą) Y^d :

$$\dot{N} = Y - Y^d, \quad (1.1.19)$$

gdzie Y^d spełnia równanie (1.1.1).

Zakładamy, że na bieżącą wielkość realnej produkcji Y , jaką producenci decydują się wytworzyć, mają wpływ trzy czynniki: wielkość realnego popytu oczekiwana na dany moment Y^e , oczekiwana zmiana realnego popytu w przyszłości \dot{Y}^e (wynikająca z równania (1.1.9)) oraz odchylenie realnej wielkości zapasów od ich pożądanego poziomu $N^d - N$. Założenie to odzwierciedla następujące równanie behawioralne:

¹⁹ Funkcja popytu na pieniądź w pracach Chiarella i in. ma postać $M^d = h_1 p Y^e + h_2 p K (r_o - r)$, gdzie r jest bieżącą nominalną stopą procentową, a r_o z góry ustaloną „normalną” stopą procentową.

²⁰ Chiarella i in. przyznają, że uzależnienie popytu na pieniądź od odchylenia stóp procentowych $r_o - r$ zostało wprowadzone w celu ułatwienia analizy modelu (Chiarella i in. 2000, s.279).

$$Y = Y^e + \beta_Z \dot{Y}^e + \beta_n (N^d - N), \quad (1.1.20)$$

gdzie, zgodnie z (1.1.9), $\dot{Y}^e = Y^e(\hat{\omega} + \beta_{y^e}(Y^d - Y^e))$, natomiast $\beta_n, \beta_Z > 0$ to parametry reakcji.

Równanie (1.1.20) również jest ulepszoną wersją swojego odpowiednika z wcześniejszych wersji modelu KMG. We wcześniejszych wersjach modelu (zob. np. w Chiarella i in. (2013, s. 247)) wielkość produkcji kształtuje się zgodnie z równaniem $Y = Y^e + nN^d + \beta_n(N^d - N)$, które jest interpretowane w ten sposób, że produkcja Y ma na celu zaspokojenie oczekiwanego popytu Y^e i dostosowanie zapasów do poziomu $Z = nN^d + \beta_n(N^d - N)$. Czynniki nN^d , który pojawia się w tym równaniu nie ma wyraźnego uzasadnienia ekonomicznego i prawdopodobnie został wprowadzony ze względów „technicznych”, aby w stanie stacjonarnym zapasy rosły ze stopą wzrostu n . Wprowadzenie w (1.1.20) składnika $\beta_Z \dot{Y}^e$, również zapewnia wzrost zapasów w stanie stacjonarnym ze stopą n , ale wydaje się bardziej uzasadnione z ekonomicznego punktu widzenia.

1.1.6. Ograniczenia produkcji przez zasoby pracy i majątku trwałego

Zakładamy, że decyzje produkcyjne podejmowane zgodnie z równaniem (1.1.20) są możliwe do zrealizowania z punktu widzenia zdolności produkcyjnych gospodarki, zależnych od technologii produkcji oraz od zasobów kapitału rzeczowego i podaży pracy. Przyjmujemy, że nakłady kapitału rzeczowego i pracy konieczne do wytworzenia określonej wielkości produkcji są komplementarne (brak możliwości ich substytucji). Technologię produkcji opisują dwa współczynniki: współczynnik potencjalnej efektywności kapitału rzeczowego y^p i współczynnik wydajności pracy x . Współczynnik y^p determinuje przy danym zasobie kapitału rzeczowego maksymalną produkcję Y^p możliwą do uzyskania pod warunkiem dostatecznej podaży pracy. Produkcja ta, nazywana produkcją potencjalną²¹, wyrażona jest równaniem $Y^p = y^p K$. Ograniczenie produkcji poprzez zasoby kapitału rzeczowego ma więc postać

$$Y \leq Y^p = y^p K. \quad (1.1.21)$$

Ograniczenie (1.1.21) ulega osłabieniu, gdy na skutek wzrostu inwestycji rośnie kapitał rzeczowy K . Stopień wykorzystania istniejącego kapitału rzeczowego mierzy wskaźnik

²¹ Produkcja potencjalna jest to wielkość produkcji, którą wytworzyłaby gospodarka, gdyby wszystkie czynniki produkcji zostały w pełni wykorzystane (Begg D. 2000, s. 4).

wykorzystania potencjału produkcyjnego przedstawiający stosunek produkcji Y do produkcji potencjalnej:

$$u = \frac{Y}{Y^p}. \quad (1.1.22)$$

Przy danym Y^p decyzja o wielkości produkcji podejmowana zgodnie z równaniem (1.1.16) determinuje wartość wskaźnika u . Przyjmujemy, że istnieje pewna wartość tego wskaźnika $0 < \bar{u} < 1$ nazywana naturalnym poziomem wykorzystania potencjału produkcyjnego, przekroczenie której staje się jednym z czynników wzrostu cen, czyli inflacji opisanej równaniem (1.1.5) postaci

$$\hat{p} = \beta_p(u - \bar{u}) + \kappa_p(\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p)\pi^e.$$

Zgodnie z tym równaniem przedsiębiorstwa których produkcja staje się bliska potencjalnej, mając z tego powodu ograniczone perspektywy szybkiego wzrostu produkcji, są bardziej skłonne do podnoszenia cen wytwarzanych produktów.

O podaży pracy zakładamy, że jest stała w czasie i równa \bar{L} . Zakładamy również, że popyt na pracę L^d nigdy nie przekracza podaży \bar{L} i tym samym równy jest wielkości zatrudnienia. Zatrudnienie jest proporcjonalne do wielkości produkcji co wyraża równanie:

$$L^d = \frac{1}{x}Y \leq \bar{L}, \quad (1.1.23)$$

gdzie $x = \frac{Y}{L^d}$ oznacza wydajność pracy, a $\frac{1}{x}$ - pracochłonność produkcji. (Zakładamy, że w każdym momencie $L^d \leq \bar{L}$.) Przekształcając (1.1.23), dostajemy ograniczenie produkcji przez podaż efektywnej pracy $x\bar{L}$:

$$Y = xL^d \leq x\bar{L}. \quad (1.1.24)$$

Z upływem czasu ograniczenie to ulega osłabieniu w rezultacie rosnącej wykładniczo wydajności pracy x , ze stopą wzrostu $n = \frac{\dot{x}}{x}$.

Odpowiednikiem wskaźnika wykorzystania potencjału produkcyjnego (kapitału rzeczowego) u w odniesieniu do podaży pracy jest stopa zatrudnienia:

$$V = \frac{L^d}{\bar{L}}. \quad (1.1.25)$$

Zakładamy, że istnieje poziom stopy zatrudnienia $0 < \bar{V} < 1$ nazywany naturalną stopą zatrudnienia, przekroczenie której jest jednym z czynników wpływających na wzrost płac nominalnych, co zostało uwzględnione w równaniu (1.1.4) postaci

$$\hat{w} = \beta_w(V - \bar{V}) + \kappa_w\hat{p} + (1 - \kappa_w)\pi^e + n.$$

1.1.7. Równość inwestycji i oszczędności

Opisując konsumpcję sektora prywatnego C oraz wydatki sektora publicznego na dobra i usługi G wskazaliśmy od razu źródła ich finansowania. W przypadku inwestycji sektora prywatnego $I = \dot{K} + \delta K$ skupiliśmy się na równaniu behawioralnym (1.1.8):

$$\dot{K} = i_1(\rho^e - \xi - (r - \pi^e))K + i_2(u - \bar{u}) + \hat{Y}^e K,$$

które przedstawia czynniki determinujące decyzję o inwestycjach netto \dot{K} ale nie wskazuje źródeł ich finansowania. Domyślnie, inwestycje te mogą być finansowane zarówno z zysków przedsiębiorstw (po ich wcześniejszym opodatkowaniu) jak też z kredytów inwestycyjnych. Nie jest to jednak opisane żadnymi równaniami modelu KMG prezentowanego w tym rozdziale²². Poniżej pokażemy natomiast, że w prezentowanym modelu spełnione jest standardowe równanie pokazujące równość inwestycji i oszczędności, zgodnie z którym na koniec każdego okresu wartość nakładów inwestycyjnych netto (a więc z pominięciem nakładów odtworzeniowych) równa jest sumie oszczędności sektora prywatnego i oszczędności rządu (zwykle ujemnych) zgromadzonych w danym okresie. Wyprowadzoną równość oszczędności i inwestycji (w ujęciu realnym) można traktować jako równość pokazującą źródła finansowania inwestycji *ex post*.

W celu sformułowania powyższej równości zdefiniujmy całkowite oszczędności krajowe S jako sumę oszczędności sektora prywatnego S_p oraz sektora rządowego S_g :

$$S = S_p + S_g. \quad (1.1.26)$$

Z równania konsumpcji (1.1.2) wynika, że pracownicy najemni nie oszczędzają, gdyż wszystkie opodatkowane dochody z pracy wydają natychmiast na konsumpcję. Ich oszczędności są zatem zerowe. W przypadku właścicieli kapitału pomijamy z kolei ich konsumpcję, przyjmując, że całość opodatkowanych dochodów z kapitału rzeczowego i z obligacji przeznaczają na oszczędności (założenie często spotykane w literaturze postkeynesowskiej, (zob. np. w Charpe i in. (2011), str. 54). Tak więc oszczędności sektora prywatnego S_p wyraża równanie:

$$S_p = (1 - \tau_c) \left(\rho K + \frac{rB}{p} \right). \quad (1.1.26) \quad (1.1.27)$$

²² Równanie pokazujące zyski przedsiębiorstw i kredyty jako źródła finansowania inwestycji pojawi się w wersji modelu KMG prezentowanej w rozdziale drugim.

Oszczędności rządowe S_g (deficyt rządowy w przypadku ich ujemnej wartości) to różnica między wpływami z podatków a wydatkami na zaspokojenie popytu sektora rządowego powiększonymi o koszt obsługi długu publicznego, czyli o odsetki od obligacji:

$$S_g = T - \left(G + \frac{r^B}{p}\right). \quad (1.1.28)$$

W punkcie 1.1.2 zdefiniowaliśmy popyt inwestycyjny (inwestycje brutto) jako sumę $I = \dot{K} + \delta K$, gdzie \dot{K} to inwestycje netto (przyrost kapitału rzeczowego) spełniające równanie behawioralne (1.1.8). Natomiast wyrażenie δK to inwestycje restytucyjne, których wartość, równa deprecjacji kapitału rzeczowego, pomniejsza zysk producenta (por. równanie (1.1.9)). W wyniku kolejnych podstawień uzyskujemy, że całkowite inwestycje netto równe są oszczędnościom krajowym, czyli:

$$\dot{K} = S. \quad (1.1.29)$$

Wyprowadzenie równania (1.1.29) przebiega następująco.

Podstawiając do (1.1.26) równania (1.1.27) i (1.1.28) otrzymujemy:

$$S = (1 - \tau_c) \left(\rho K + \frac{r^B}{p}\right) + T - \left(G + \frac{r^B}{p}\right). \quad (1.1.30)$$

Zgodnie z (1.1.12)

$$T = \tau_w \omega L^d + \tau_c \left(\rho K + \frac{r^B}{p}\right).$$

Po podstawieniu do (1.1.30) dostajemy

$$S = \left(\rho K + \frac{r^B}{p}\right) - \tau_c \left(\rho K + \frac{r^B}{p}\right) + \tau_w \omega L^d + \tau_c \left(\rho K + \frac{r^B}{p}\right) - \left(G + \frac{r^B}{p}\right),$$

a po uproszczeniach:

$$S = \rho K + \tau_w \omega L^d - G. \quad (1.1.31)$$

Zysk z kapitału rzeczowego w ujęciu realnym opisuje równanie

$$\rho K = Y^d - \omega L^d - \delta K.$$

Równanie (1.1.31) możemy zapisać jako:

$$S = Y^d - \omega L^d - \delta K + \tau_w \omega L^d - G. \quad (1.1.32)$$

Zgodnie z (1.1.2) $C = (1 - \tau_w) \omega L^d$. Stąd

$$S = Y^d - C - G - \delta K. \quad (1.1.33)$$

Zgodnie z (1.1.1) oraz (1.1.7) zachodzi $Y^d = C + I + G$, gdzie $I = \dot{K} + \delta K$. Stąd

$$\dot{K} = Y^d - C - G - \delta K. \quad (1.1.34)$$

Z (1.1.33) i (1.1.34) wynika, że

$$S = \dot{K}.$$

1.1.8. Kompletny układ równań modelu

Wyprowadzenie równości (1.1.29) kończy opis wyjściowego modelu przedstawiony w punktach 1.1.1 – 1.1.7. Tytułem podsumowania, w tabeli poniżej prezentujemy wszystkie równania modelu, które tworzą pełen obraz funkcjonowania modelowanej gospodarki. W zestawieniu pomijamy równanie (1.1.29), gdyż nie jest ono wykorzystywane w dalszych analizach modelu.

Tabela 1.1. Kompletny układ równań modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza

DETERMINANTY POPYTU		
Lp.	Nazwa zmiennej	Równanie
1.	Popyt na produkt	$Y^d = C + I + G$
2.	Konsumpcja sektora prywatnego	$C = (1 - \tau_w)\omega L^d$
3.	Popyt na pracę	$L^d = \frac{Y}{x}$
4.	Stopa wzrostu wydajności pracy	$\hat{x} = n$
5.	Płaca realna i stopa wzrostu płacy realnej	$\omega = p, \hat{\omega} = \hat{w} - \hat{p}$
6.	Stopa wzrostu płac nominalnych	$\hat{w} = \beta_w(V - \bar{V}) + \kappa_w \hat{p} + (1 - \kappa_w)\pi^e + n$
7.	Stopa wzrostu cen	$\hat{p} = \beta_p(u - \bar{u}) + \kappa_p(\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p)\pi^e$
8.	Oczekiwany przyrost stopy inflacji	$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e}(\alpha \hat{p} + (1 - \alpha)(\mu - n) - \pi^e)$
9.	Stopa zatrudnienia	$V = \frac{L^d}{L}$, gdzie L – podaż pracy (stała w czasie)
10.	Wskaźnik wykorzystania potencjału produkcyjnego	$u = \frac{Y}{Y^p}$
11.	Produkcja potencjalna	$Y^p = y^p K$
12.	Przyrost kapitału rzeczowego	$\dot{K} = i_1(\rho^e - \xi - (r - \pi^e))K + i_2(u - \bar{u})K + \hat{Y}^e K$
13.	Oczekiwana realna stopa zysku z kapitału rzeczowego Realna stopa zysku z kapitału rzeczowego	$\rho^e = \frac{Y^e - \omega L^d - \delta K}{K}$ $\rho = \frac{Y^d - \omega L^d - \delta K}{K}$

14.	Stopa wzrostu oczekiwanego popytu	$\hat{Y}^e = \hat{\omega} + \beta_{y^e} \frac{Y^d - Y^e}{Y^e}$
15.	Popyt inwestycyjny	$I = \dot{K} + \delta K$
PRODUKCJA I ZAPASY		
16.	Produkcja	$Y = Y^e + Z$ $Y = Y^e + \beta_Z \dot{Y}^e + \beta_n (N^d - N)$
17.	Produkcja przeznaczona na zapasy	$Z = \beta_Z \dot{Y}^e + \beta_n (N^d - N)$
18.	Pożądaný poziom zapasów	$N^d = \beta_{N^d} Y^e$
19.	Zmiana rzeczywistego poziomu zapasów	$\dot{N} = Y - Y^d$
RYNEK PIENIĄDZA		
20.	Stopa wzrostu podaży pieniądza	$\hat{M} = \mu$
21.	Popyt na pieniądz	$M^d = h \frac{pY^e}{r}$
22.	Równowaga na rynku pieniądza	$M = M^d$
23.	Nominalna stopa procentowa	$r = h \frac{pY^e}{M}$
BUDŻET PAŃSTWA		
24.	Podatki	$T = \tau_w \omega L^d + \tau_c \left(\rho K + \frac{rB}{p} \right)$
25.	Popyt sektora rządowego	$G = gK$
26.	Przyrost wartości obligacji	$\dot{B} = pG + rB - pT$

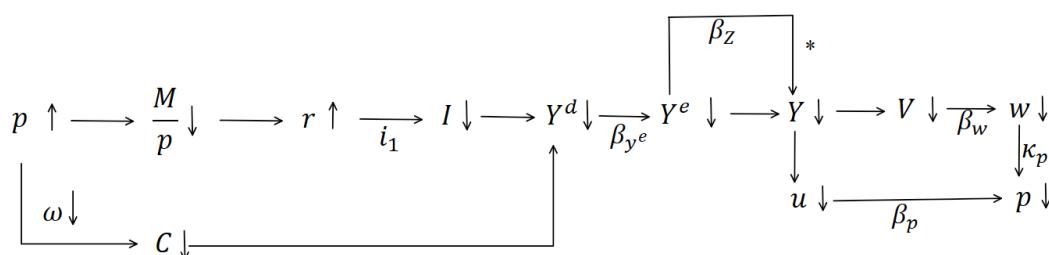
Źródło: opracowanie własne

1.1.9. Sprzężenia zwrotne

W zaprezentowanym w tym rozdziale modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza, podobnie jak w pierwotnej wersji tego modelu (zob. np. Chiarella (2000)), można

wyodrębnić kilka sprzężeń zwrotnych²³. Sprzężenia te wpływają m.in. na stabilność opisywanej przez model gospodarki. Według autorów modelu KMG najważniejszymi sprzężeniami zwrotnymi w modelach typu KMG są: efekt Keynesa, efekt Mundella, efekt Metzlera, efekt Rose'a i efekt regresywnych oczekiwań. W wyniku autorskich modyfikacji równań zaprezentowanego w niniejszej pracy modelu KMG oprócz powyższych sprzężeń zwrotnych pojawiają się kolejne sprzężenia, istotne dla opisu funkcjonowania gospodarki. Najważniejsze z nich to: efekt oczekiwanego popytu oraz efekt stopy wzrostu płacy realnej. Dodatkowo, wprowadzone modyfikacje równań modelu KMG istotnie wpływają na pozostałe sprzężenia zwrotne. A więc modyfikacje mają wpływ na wzrost opisywanej przez model gospodarki.

Poniżej omówimy wymienione sprzężenia zwrotne ilustrując je autorskimi rysunkami. Rozpoczniemy od znanego efektu Keynesa (zob. Keynes (1936)). Efekt Keynesa przedstawiony na rysunku 1.1.1 opisuje stabilizującą pętlę sprzężenia zwrotnego zaczynającego się od zmiany poziomu cen p .



Rysunek 1.1.1. Efekt Keynesa w modelu KMG. Symbol * wskazuje dodatkowy kanał wpływu oczekiwanego popytu na produkcję występujący w nowej wersji modelu KMG.

Źródło: opracowanie własne.

Aby lepiej zaprezentować efekt Keynesa, przypomnijmy równania modelu KMG, które bezpośrednio składają się na opis tego efektu:

$$\frac{M}{p} = h \frac{Y^e}{r}, \quad (1.1.35)$$

$$\hat{w} = \beta_w (V - \bar{V}) + \kappa_w \hat{p} + (1 - \kappa_w) \pi^e + n, \quad (1.1.36)$$

$$\hat{p} = \beta_p (u - \bar{u}) + \kappa_p (\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p) \pi^e, \quad (1.1.37)$$

²³ Sprzężenie zwrotne dodatnie zachodzi wtedy, gdy skutek podtrzymuje przyczynę, powodując zwykle dalsze narastanie skutku, np. rozwój przemysłu powoduje rozwój nauk techn., ten zaś przyspiesza rozwój przemysłu. Sprzężenie zwrotne ujemne działa stabilizująco powodując, że skutek zjawiska przeciwdziała jego przyczynie, co znajduje szerokie zastosowanie w układach sterowania i stanowi istotę regulacji automatycznej.

$$I = i_1(\rho^e - (r - \pi^e))K + i_2(u - \bar{u}) + \hat{Y}^e K + \delta K, \quad (1.1.38)$$

$$Y^d = C + I + G, \quad (1.1.39)$$

$$Y = Y^e + \beta_z \dot{Y}^e + \beta_n(N^d - N), \dot{Y}^e = \hat{\omega} \cdot Y^e + \beta_{y^e}(Y^d - Y^e), \quad (1.1.40)$$

$$L^d = \frac{1}{x}Y, V = \frac{L^d}{L}, \quad (1.1.41)$$

$$u = \frac{Y}{Y^p}. \quad (1.1.42)$$

Jak wspomniano wyżej, efekt Keynesa zaczyna się od zmiany poziomu cen p . Wzrost poziomu cen p (*ceteris paribus*) w omawianym modelu jest równoznaczny ze spadkiem realnego salda pieniężnego M/p co skutkuje wzrostem nominalnej stopy procentowej r . To zjawisko wynika z przyjętego założenia równowagi na rynku pieniądza i postaci równania równowagi (1.1.35). Wzrost nominalnej stopy procentowej r (*ceteris paribus*) obniża realny popyt inwestycyjny I (1.1.38). Siłą reakcji realnego popytu inwestycyjnego na zmianę nominalnej stopy procentowej określa parametr reakcji $i_1 > 0$. Spadek realnego popytu inwestycyjnego I (*ceteris paribus*) skutkuje zmniejszeniem realnego popytu całkowitego Y^d (1.1.39)²⁴. Realna produkcja Y zależy pozytywnie od całkowitego realnego popytu Y^d . Jeśli spadek całkowitego realnego popytu Y^d doprowadzi do sytuacji, w której oczekiwany realny popyt będzie niższy niż całkowity realny popyt ($Y^d < Y^e$), to realna produkcja Y zmaleje (1.1.40). Siłą reakcji realnej produkcji na zmianę całkowitego realnego popytu określa parametr reakcji $\beta_{y^e} > 0$. Spadek wielkości produkcji bezpośrednio wpływa na zmniejszenie zatrudnienia V (1.1.41) i wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej u (1.1.42). Malejąca stopa zatrudnienia V ma negatywny wpływ na płace nominalne w (1.1.36). Siłą reakcji płac nominalnych na zmianę stopy zatrudnienia określa parametr reakcji $\beta_w > 0$. Natomiast wskaźnik wykorzystania mocy produkcyjnej u i stopa wzrostu płac nominalnych $\hat{\omega}$ wpływają pozytywnie na poziom rzeczywistej stopy inflacji \hat{p} (1.1.37). Oznacza to, że spadek ich wartości przyczynia się do zmniejszenia stopy inflacji \hat{p} , a w rezultacie do spadku poziomu cen p i do zamknięcia pętli. Oznacza to, że efekt Keynesa jest sprzężeniem zwrotnym ujemnym (stabilizującym). W modelu KMG odpowiednie wartości parametrów reakcji $i_1, \beta_p, \kappa_p, \beta_{y^e}, \beta_w$ (zob. rysunek 1.1.1) mogą zatem

²⁴ W wyniku wzrostu poziomu cen zmniejsza się wartość płacy realnej ω . Spadek wartości płacy realnej skutkuje zmniejszeniu wielkości konsumpcji prywatnej C a w konsekwencji zmniejszy się całkowity popyt Y^d .

stabilizować poziom cen, a także przyczyniać się do stabilizacji poziomów innych zmiennych i całej gospodarki.

Przedstawiony powyżej efekt Keynesa może być wzmocniony lub osłabiony przez wprowadzone autorskie modyfikacje równań. Wzmocnienie lub osłabienie tego efektu powstaje na skutek uzyskania w autorskiej wersji modelu nowego kanału wpływu oczekiwań dotyczących wielkości popytu na wielkość produkcji (zob. rysunek 1.1.1).

Poniżej przedstawiamy, jak wprowadzone modyfikacje wpłynęły na efekt Keynesa.

W nowej wersji modelu równanie produkcji ma postać:

$$Y = Y^e + \beta_Z \dot{Y}^e + \beta_n(N^d - N),$$

gdzie $\dot{Y}^e = \hat{\omega} \cdot Y^e + \beta_{y^e}(Y^d - Y^e)$.

Natomiast w wersji pierwotnej odpowiedniki powyższych równań miały postać:

$$Y = Y^e + nN^d + \beta_n(N^d - N),$$

gdzie $\dot{Y}^e = nY^e + \beta_{y^e}(Y^d - Y^e)$.

W oryginalnym modelu przyrost poziomu produkcji pod wpływem zmiany oczekiwanego popytu jest równy:

$$\frac{\partial Y}{\partial Y^e} = 1 + n, \quad (1.1.45)$$

a w nowej wersji modelu:

$$\frac{\partial Y}{\partial Y^e} = 1 + \beta_Z(\hat{\omega} - \beta_{y^e}). \quad (1.1.46)$$

Z (1.1.46) oraz założenia $\beta_Z > 0$ wynika, że jeśli $\hat{\omega} > \beta_{y^e}$, to zmiana produkcji pod wpływem zmiany oczekiwanego popytu w nowej wersji modelu może być większa niż w oryginalnym modelu KMG dla odpowiednio dużej wartości parametru reakcji β_Z . Natomiast jeśli $\hat{\omega} \leq \beta_{y^e}$, wtedy reakcja produkcji na zmianę oczekiwanego popytu jest zawsze mniejsza niż w oryginalnym modelu niezależnie od wielkości parametru reakcji β_Z . A więc wniosek dotyczący wpływu modyfikacji równań na efekt Keynesa zależy od wartości parametrów reakcji β_{y^e} oraz β_Z . Efekt Keynesa w nowej wersji modelu KMG jest silniejszy, gdy wartość parametru β_Z jest odpowiednio duża, a wartość parametru β_{y^e} jest odpowiednio mała.

Drugim sprzężeniem zwrotnym jest tzw. efekt Rose'a, nazywany również efektem płac realnych (Rose (1967)). Efekt ten związany jest z wpływem zmiany poziomu płac realnych ω na stabilność gospodarki. Podobnie jak przy prezentacji efektu Keynesa, aby lepiej

zrozumieć oddziaływanie zmiennych, przypomnijmy równania modelu KMG składające się na opis efektu Rose'a:

$$\omega = w/p, \quad (1.1.48)$$

$$C = (1 - \tau_w)\omega L^d, \quad (1.1.49)$$

$$\hat{w} = \beta_w(V - \bar{V}) + \kappa_w \hat{p} + (1 - \kappa_w)\pi^e + n, \quad (1.1.50)$$

$$\hat{p} = \beta_p(u - \bar{u}) + \kappa_p(\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p)\pi^e, \quad (1.1.51)$$

$$I = i_1(\rho^e - (r - \pi^e))K + i_2(u - \bar{u}) + \hat{Y}^e K + \delta K, \quad \rho^e = \frac{Y^e - \omega L^d - \delta K}{K}, \quad (1.1.52)$$

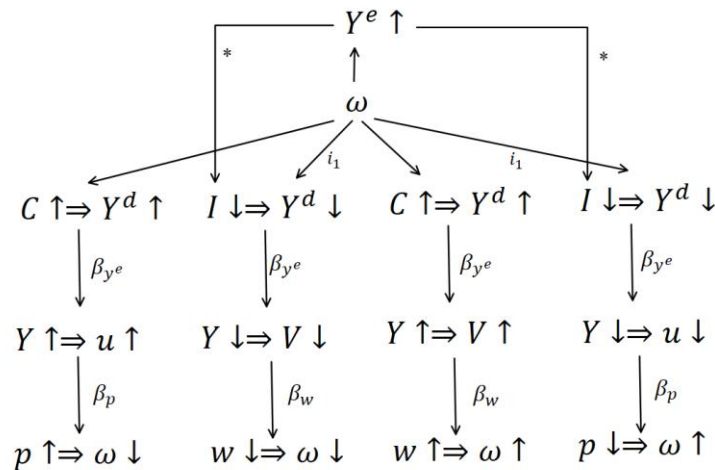
$$Y^d = C + I + G, \quad (1.1.53)$$

$$u = Y/Y^p, \quad (1.1.54)$$

$$Y = Y^e + \beta_z \dot{Y}^e + \beta_n(N^d - N), \quad \dot{Y}^e = \hat{\omega} \cdot Y^e + \beta_{y^e}(Y^d - Y^e), \quad (1.1.55)$$

$$L^d = \frac{1}{x}Y, \quad V = L^d/L. \quad (1.1.56)$$

Efekt Rose'a (Rysunek 1.1.2) zaczyna się od zmiany poziomu płac realnych ω (*ceteris paribus*). Wzrost poziomu płac realnych ω wpływa na realną konsumpcję sektora prywatnego C (1.1.49). Zmiana ω poprzez zmianę oczekiwanej stopy zysku z kapitału ρ^e wpływa także na popyt inwestycyjny sektora prywatnego I (1.1.52). Z postaci równań (1.1.48)-(1.1.55), co zostanie przedstawione poniżej, wynika, że możliwe są cztery różne scenariusze wpływu zmiany poziomu płac realnych ω na wartości zmiennych modelu.



Rysunek 1.1.2. Efekt Rose'a. Przez symbol * zaznaczamy występujący w nowej wersji modelu KMG dodatkowy kanał wpływu oczekiwanego popytu na popyt inwestycyjny

Źródło: opracowanie własne

Scenariusz 1. Wzrost płac realnych ω (*ceteris paribus*) zwiększa konsumpcję sektora prywatnego C (1.1.49), co prowadzi do wzrostu zagregowanego popytu Y^d (1.1.53),

a w konsekwencji do wzrostu produkcji Y (1.1.55). Wzrost produkcji Y zwiększa natychmiast stopień wykorzystania mocy produkcyjnych u (1.1.54), którego skutkiem jest wzrost poziomu cen p (1.1.51). Płace realne ω są ujemnie zależne od cen (1.1.48), a więc wraz ze wzrostem cen p będą maleć, co zamyka pętlę.

Scenariusz 2. Wzrost płac realnych ω (*ceteris paribus*) spowoduje spadek inwestycji sektora prywatnego I (inwestycje zależą od stopy zwrotu z kapitału rzeczowego, który negatywnie zależy od płac realnych, zob. równanie (1.1.52)), co przyczynia się do spadku zagregowanego popytu Y^d (1.1.53) i produkcji Y (1.1.54), a w konsekwencji do wzrostu bezrobocia, zmniejszenia zatrudnienia V (1.1.55). Malejąca stopa zatrudnienia V powoduje spadek płac nominalnych w (1.1.50), a to prowadzi do spadku płac realnych ω (1.1.48) i zamknięcia pętli.

Scenariusz 3. Wzrost płac realnych ω (*ceteris paribus*) wpływa na wzrost konsumpcji sektora prywatnego C (1.1.49), a w konsekwencji na wzrost zagregowanego popytu Y^d (1.1.53) i produkcji Y (1.1.54). Wzrost produkcji w modelu prowadzi do spadku stopy bezrobocia (wzrost stopy zatrudnienia V), co z kolei prowadzi do wzrostu płac nominalnych w (1.1.49). Ostatecznie wzrost płac nominalnych w prowadzi do wzrostu płac realnych ω (1.1.48) i zamknięcia pętli.

Scenariusz 4. Wzrost płac realnych ω (*ceteris paribus*) powoduje spadek inwestycji I (1.1.52), co przyczynia się do spadku zagregowanego popytu Y^d (1.1.53) i zmniejszenia poziomu produkcji Y (1.1.54), a w konsekwencji do zmniejszenia stopnia wykorzystania mocy produkcyjnych u (1.1.54). Obniżenie stopnia wykorzystania mocy produkcyjnych u prowadzi do obniżenia cen p (1.1.51), co w dalszej kolejności oznacza wzrost płac realnych ω (1.1.48) i zamknięcie pętli.

W omawianym modelu mogą wystąpić wszystkie cztery powyższe scenariusze, ale to, który z nich będzie najsilniejszy (dominujący), zależy od parametrów reakcji modelu. Scenariusze 1 i 2 stabilizują gospodarkę (sprzężenia zwrotne ujemne), a scenariusze 3 i 4 destabilizują gospodarkę (sprzężenia zwrotne dodatnie).

Na rysunku 1.1.2 przedstawiono również, jakie parametry reakcji decydują o sile poszczególnych scenariuszy w efekcie Rose'a. Możemy zauważyć, że jeżeli parametr $i_1 > 0$ będzie odpowiednio mały, to scenariusze 2 i 4 mogą zostać zdominowane przez scenariusze 1 i 3. Dodatkowo, jeśli parametr reakcji $\beta_w > 0$ będzie odpowiednio mały, to scenariusz 1

będzie scenariuszem dominującym, co dalej oznacza, że efekt Rose'a będzie efektem stabilizującym (sprzężenie zwrotne ujemne).

Podobnie jak w efekcie Keynesa, w nowej wersji modelu KMG opisany powyżej efekt Rose'a może zostać wzmocniony lub osłabiony przez wprowadzone modyfikacje. Wzmocnienie lub osłabienie tego efektu powstaje na skutek wprowadzonej zmiany opisu dynamiki oczekiwanego popytu Y^e oraz zmiany opisu popytu inwestycyjnego sektora prywatnego I . Wzrost płac realnych ω wpływa pozytywnie bezpośrednio na stopę wzrostu oczekiwanego popytu Y^e (1.1.55), od której pozytywnie zależy popyt inwestycyjny I (1.1.52) (nowy kanał wpływu ω na I oznaczyliśmy symbolem *, zob. rysunek 1.1.2). Ten nowy kanał wpływu osłabia scenariusze 2 i 4, a tym samym w nowej wersji modelu KMG scenariusze 1 i 3 mogą dominować nad scenariuszami 2 i 4 w porównaniu z oryginalnym modelem KMG przy tych samych wartościach parametrów reakcji.

Kolejnym, trzecim sprzężeniem zwrotnym jest proces Metzlera sprzedaży/regulacji zapasów. Proces ten opisuje sprzężenia zwrotne powiązane z oczekiwanym popytem i poziomem zapasów. Równania bezpośrednio składające się na opis tego efektu są następujące:

$$Y = Y^e + Z \quad , \quad (1.1.57)$$

$$Z = \beta_Z \dot{Y}^e + \beta_n (N^d - N), \quad (1.1.58)$$

$$\dot{Y}^e = \hat{\omega} \cdot Y^e + \beta_{y^e} (Y^d - Y^e), \quad (1.1.59)$$

$$N^d = \beta_{N^d} Y^e, \quad (1.1.60)$$

$$\dot{N} = Y - Y^d, \quad (1.1.61)$$

$$\hat{\omega} = \beta_w (V - \bar{V}) + \kappa_w \hat{p} + (1 - \kappa_w) \pi^e + n, \quad (1.1.62)$$

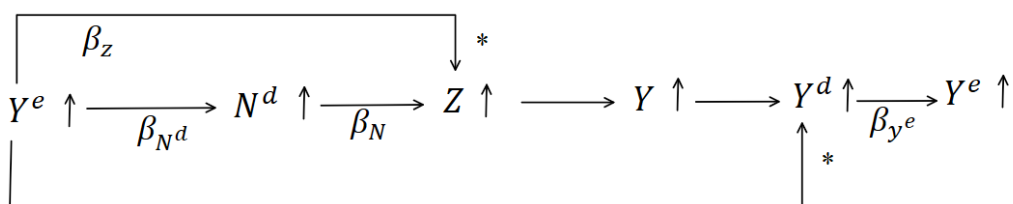
$$L^d = \frac{1}{x} Y, \quad V = L^d / L, \quad (1.1.63)$$

$$I = i_1 (\rho^e - \xi - (r - \pi^e)) K + i_2 (u - \bar{u}) + \hat{Y}^e K + \delta K, \quad \rho^e = \frac{Y^e - \omega L^d - \delta K}{K}. \quad (1.1.64)$$

Proces sprzedaży/regulacji zapasów Metzlera podzielony jest na trzy pętle. Pierwsza z nich (Rysunek 1.1.3) zaczyna się od wzrostu oczekiwanego realnego popytu Y^e (*ceteris paribus*), który wpływa na wzrost realnego popytu na zapasy N^d (1.1.60). Jeśli realny popyt na zapasy N^d jest większy od realnej podaży zapasów, to rośnie realny poziom produkcji przeznaczonej na zapasy Z (1.1.58), co bezpośrednio wpływa większą realną produkcją Y (1.1.57). Wzrost produkcji Y wpływa pozytywnie na całkowity popyt Y^d . Ten pozytywny wpływ produkcji na całkowity popyt Y^d wynika zasadniczo z dwóch powodów:

- 1) wzrost płac nominalnych w (z powodu wyższego zatrudnienia V (1.1.62) spowodowany wzrostem produkcji Y (1.1.63)) przyczynia się do wzrostu wydatków konsumpcyjnych, co implikuje wzrost całkowitego popytu Y^d ,
- 2) wzrost produkcji wpływa na wzrost wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej $u = Y/Y^p$, co z kolei zwiększa popyt inwestycyjny sektora prywatnego I (1.1.64), a więc także zwiększa całkowity popyt Y^d .

W konsekwencji, gdy rośnie poziom całkowitego popytu Y^d , rosną oczekiwania dotyczące wielkości przyszłego popytu Y^e (1.1.59), co kończy pętlę.

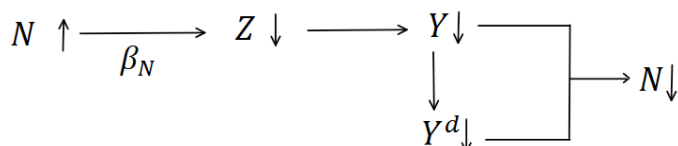


Rysunek 1.1.3. Proces Metzlera sprzedaży/regulacji zapasów - Pętla 1. Symbolem * oznaczamy dodatkowe kanały wpływu oczekiwanego popytu na produkcję przeznaczoną na zapasy oraz na całkowity realny popyt występujące w nowej wersji modelu KMG

Źródło: opracowanie własne.

Opisane pierwsze sprzężenie jest sprzężeniem destabilizującym gospodarkę (sprzężenie zwrotne dodatnie), ponieważ wzrost oczekiwanego popytu Y^e powoduje jeszcze większy wzrost oczekiwanego popytu Y^e . Siła wpływu tego destabilizującego efektu zależy od wartości parametrów reakcji β_{N^d} , β_N , β_Z , β_w , i_1 i β_{y^e} .

Druga pętla zaczyna się od zmiany poziomu realnych zapasów N (*ceteris paribus*). Wzrost ten zmniejsza poziom inwestycji przeznaczonych na zapasy Z (1.1.58), czego skutkiem jest mniejsza realna produkcja Y (1.1.57). Gdy maleje realna produkcja Y , to maleje całkowity realny popyt Y^d (wynika to z malejącej stopy zatrudnienia V oraz malejącego wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej u). Jeśli całkowity realny popyt Y^d będzie małał wolniej od produkcji Y , to podaż realnych zapasów N zmniejszy się, co kończy pętlę.

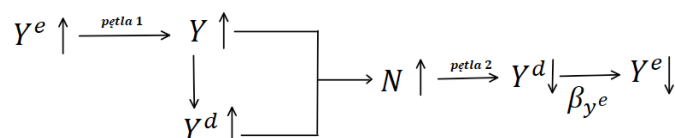


Rysunek 1.1.4. Proces Metzlera sprzedaży/regulacji zapasów - Pętla 2

Źródło: opracowanie własne.

Opisane drugie sprzężenie zwrotne jest sprzężeniem stabilizującym gospodarkę (sprzężenie zwrotne ujemne).

Trzecia pętla (Rysunek 1.1.5) łączy dwie wcześniejsze pętle (pętla 1 i pętla 2). Zgodnie z pierwszą pętlą wzrost oczekiwanego popytu Y^e pozytywnie wpływa na poziom produkcji Y . Z kolei wzrost produkcji Y zwiększa zagregowany popyt Y^d i jeśli produkcja będzie rosła szybciej niż zagregowany popyt ($\Delta Y > \Delta Y^d$), to wzrośnie realna podaż zapasów N (1.1.61).



Rysunek 1.1.5. Proces Metzlera sprzedaży/regulacji zapasów - Pętla 3

Źródło: opracowanie własne.

Wzrost realnej podaży zapasów zmniejszy całkowity realny popyt Y^d (pętla 2), a w konsekwencji zmniejszy się poziom oczekiwanego popytu Y^e , co kończy trzecią pętlę. Trzecia pętla ma potencjał stabilizujący gospodarkę.

W pierwszej pętli możemy zauważyć, że wzrost oczekiwanego realnego popytu Y^e bezpośrednio wpływa na popyt na zapasy N^d , na całkowity realny popyt Y^d oraz na produkcję przeznaczoną na zapasy Z , a zmiany te wywołują zmiany w oczekiwanym realnym popycie Y^e . Te dwa ostatnie kanały są wynikiem wprowadzonych modyfikacji modelu KMG. Siła wpływu tych dwóch nowych kanałów na efekt Metzlera zależy od wartości parametrów reakcji β_Z oraz β_{y^e} . Z założenia wartości tych parametrów są dodatnie, więc wprowadzone modyfikacje wzmacniają opisywany stabilizujący efekt Metzlera.

Czwartym sprzężeniem zwrotnym (Rysunek 1.15.) jest tzw. efekt Mundella (zob. Mundell (1963)). Efekt ten związany jest ze zmianą oczekiwanej stopy inflacji π^e .

Równania powiązane z tym efektem to:

$$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e}(\alpha \hat{p} + (1 - \alpha)\bar{\pi} - \pi^e) , \quad (1.1.65)$$

$$I = i_1(\rho^e - \xi - (r - \pi^e))K + i_2(u - \bar{u}) + \hat{Y}^e K + \delta K , \quad \rho^e = \frac{Y^e - \omega L^d - \delta K}{K}, \quad (1.1.66)$$

$$Y^d = C + I + G , \quad (1.1.67)$$

$$Y = Y^e + \beta_Z \dot{Y}^e + \beta_n(N^d - N), \quad \dot{Y}^e = \hat{\omega} \cdot Y^e + \beta_{y^e}(Y^d - Y^e), \quad (1.1.68)$$

$$u = Y/Y^p , \quad (1.1.69)$$

$$\hat{p} = \beta_p(u - \bar{u}) + \kappa_p(\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p)\pi^e. \quad (1.1.70)$$

Wzrost oczekiwanej stopy inflacji π^e (*ceteris paribus*) pozytywnie wpływa na poziom popytu inwestycyjnego sektora prywatnego I (1.1.66). Z kolei popyt inwestycyjny I wpływa

pozytywnie na całkowity realny popyt Y^d (1.1.67), a tym samym na realną produkcję Y (1.1.68). Wzrost realnej produkcji Y zwiększa stopień wykorzystania mocy produkcyjnej u (1.1.69), który pozytywnie wpływa na stopę inflacji \hat{p} (1.1.70). Wzrost stopy inflacji \hat{p} powoduje wzrost oczekiwań inflacyjnych (1.1.65) i kończy pętlę.

$$\pi^e \uparrow \xrightarrow{i_1} I \uparrow \longrightarrow Y^d \uparrow \xrightarrow{\beta_{y^e}} Y \uparrow \longrightarrow u \uparrow \xrightarrow{\beta_p} \hat{p} \uparrow \xrightarrow{\beta_{\pi^e} \alpha} \pi^e \uparrow$$

Rysunek 1.1.6. Efekt Mundella

Źródło: opracowanie własne.

Opisana pętla sprzężenia zwrotnego (Rysunek 1.1.6) implikuje pozytywną zależność oczekiwanej stopy inflacji od niej samej. Oznacza to, że efekt Mundella jest efektem destabilizacyjnym i może negatywnie wpływać na stabilność gospodarki. Tak jak to jest zobrazowane na rysunku, wystarczy, aby jeden z parametrów $i_1, \beta_{y^e}, \beta_p, \beta_{\pi^e}, \alpha > 0$ miał odpowiednio małą wartość, aby efekt Mundella nie wystąpił.

Kolejnym ważnym sprzężeniem zwrotnym w modelu KMG jest tzw. efekt regresywnych oczekiwań. Ten efekt jest niemal trywialny, wynikając bezpośrednio z przyjętego równania adaptacyjnego opisującego dostosowanie oczekiwań (podmioty gospodarcze oczekują, że inflacja w końcu powróci do pożądanej wartości $\bar{\pi}$ (równej inflacji w stanie stacjonarnym $\bar{\pi} = \mu - n$):

$$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e} (\alpha \hat{p} + (1 - \alpha) \bar{\pi} - \pi^e) . \quad (1.1.71)$$

Wzrost oczekiwań inflacyjnych π^e (*ceteris paribus*) (Rysunek 1.1.7) negatywnie wpływa na oczekiwania inflacyjne π^e (1.1.71). Efekt ten z definicji jest efektem stabilizującym. Parametry odpowiedzialne za efekt regresywnych oczekiwań to $\beta_{\pi^e}, \alpha > 0$.

$$\pi^e \uparrow \xrightarrow{\beta_{\pi^e} (1 - \alpha)} \pi^e \downarrow$$

Rysunek 1.1.7. Efekt regresywnych oczekiwań

Źródło: opracowanie własne.

Uwaga. Wprowadzone modyfikacje równań modelu bezpośrednio nie wpływają na efekt Mundella i efekt regresywnych oczekiwań.

W nowej wersji modelu KMG dzięki wprowadzonym autorskim modyfikacjom, oprócz wzmocnienia lub osłabienia powyższych typowych dla modeli KMG sprzężeń zwrotnych, pojawiają się kolejne sprzężenia zwrotne istotne z punktu widzenia stabilnego wzrostu gospodarki. Pierwszym z nich jest efekt wzrostu oczekiwanego popytu. Efekt ten zaczyna się od zmiany oczekiwanego realnego popytu Y^e (Rysunek 1.1.8).

$$Y^e \uparrow \longrightarrow I \uparrow \longrightarrow Y^d \uparrow \xrightarrow{\beta_{y^e}} Y^e \uparrow$$

Rysunek 1.1.8. Efekt wzrostu oczekiwanego popytu

Źródło: opracowanie własne.

Równania, które są powiązane z efektem wzrostu oczekiwanego popytu, to:

$$I = i_1(\rho^e - \xi - (r - \pi^e))K + i_2(u - \bar{u}) + \hat{Y}^e K + \delta K, \quad \rho^e = \frac{Y^e - \omega L^d - \delta K}{K}, \quad (1.1.72)$$

$$Y^d = C + I + G, \quad (1.1.73)$$

$$\dot{Y}^e = \hat{\omega} \cdot Y^e + \beta_{y^e}(Y^d - Y^e). \quad (1.1.74)$$

Wzrost oczekiwanego realnego popytu Y^e (*ceteris paribus*) zwiększa popyt inwestycyjny sektora prywatnego I (1.1.72), który z kolei zwiększa całkowity realny popyt Y^d (1.1.73). Wzrost całkowitego realnego popytu (*ceteris paribus*) wpływa pozytywnie na przyrost oczekiwanego realnego popytu Y^e (1.1.74). Wpływ całkowitego realnego popytu na przyrost oczekiwanego realnego popytu zależy od wartości parametru reakcji β_{y^e} . A więc i cały efekt wzrostu oczekiwanego realnego popytu zależy od tej wartości i ma potencjał destabilizujący. Oznacza to, że w autorskiej wersji modelu KMG odpowiednio duża wartość parametru β_{y^e} może wpływać negatywnie na stabilność całej gospodarki.

Drugim nowym sprzężeniem zwrotnym jest efekt wzrostu płacy realnej. Efekt ten zaczyna się od zmiany płacy realnej ω . Powiązane z tym efektem równania to (1.1.72), (1.1.73), (1.1.74) oraz:

$$Y = Y^e + \beta_z \dot{Y}^e + \beta_n(N^d - N), \quad \dot{Y}^e = \hat{\omega} \cdot Y^e + \beta_{y^e}(Y^d - Y^e), \quad (1.1.75)$$

$$u = Y/Y^p, \quad (1.1.76)$$

$$\hat{p} = \beta_p(u - \bar{u}) + \kappa_p(\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p)\pi^e, \quad (1.1.77)$$

$$\omega = w/p, \quad (1.1.78)$$

$$C = (1 - \tau_w)\omega L^d. \quad (1.1.79)$$

Wzrost płacy realnej ω (*ceteris paribus*) wpływa pozytywnie na przyrost oczekiwanego realnego popytu \dot{Y}^e (1.1.74) oraz na realną konsumpcję sektora prywatnego C (1.1.79). Wzrost oczekiwanego popytu Y^e wpływa pozytywnie na popyt inwestycyjny I (1.1.72). Wzrost realnej konsumpcji C i popytu inwestycyjnego I bezpośrednio wpływają na realny poziom popytu całkowitego Y^d (1.1.73), który pozytywnie wpływa na realny poziom produkcji Y (1.1.75). W sytuacji gdy rośnie realna produkcja Y , rośnie wartość wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej u (1.1.76), który z kolei pozytywnie wpływa na

rzeczywistą stopę inflacji \hat{p} (1.1.77). Natomiast wzrost rzeczywistej stopy inflacji \hat{p} oznacza wzrost cen, a w konsekwencji obniżenie się poziomu płacy realnej ω (1.1.78), co kończy pętlę (Rysunek 1.1.9).

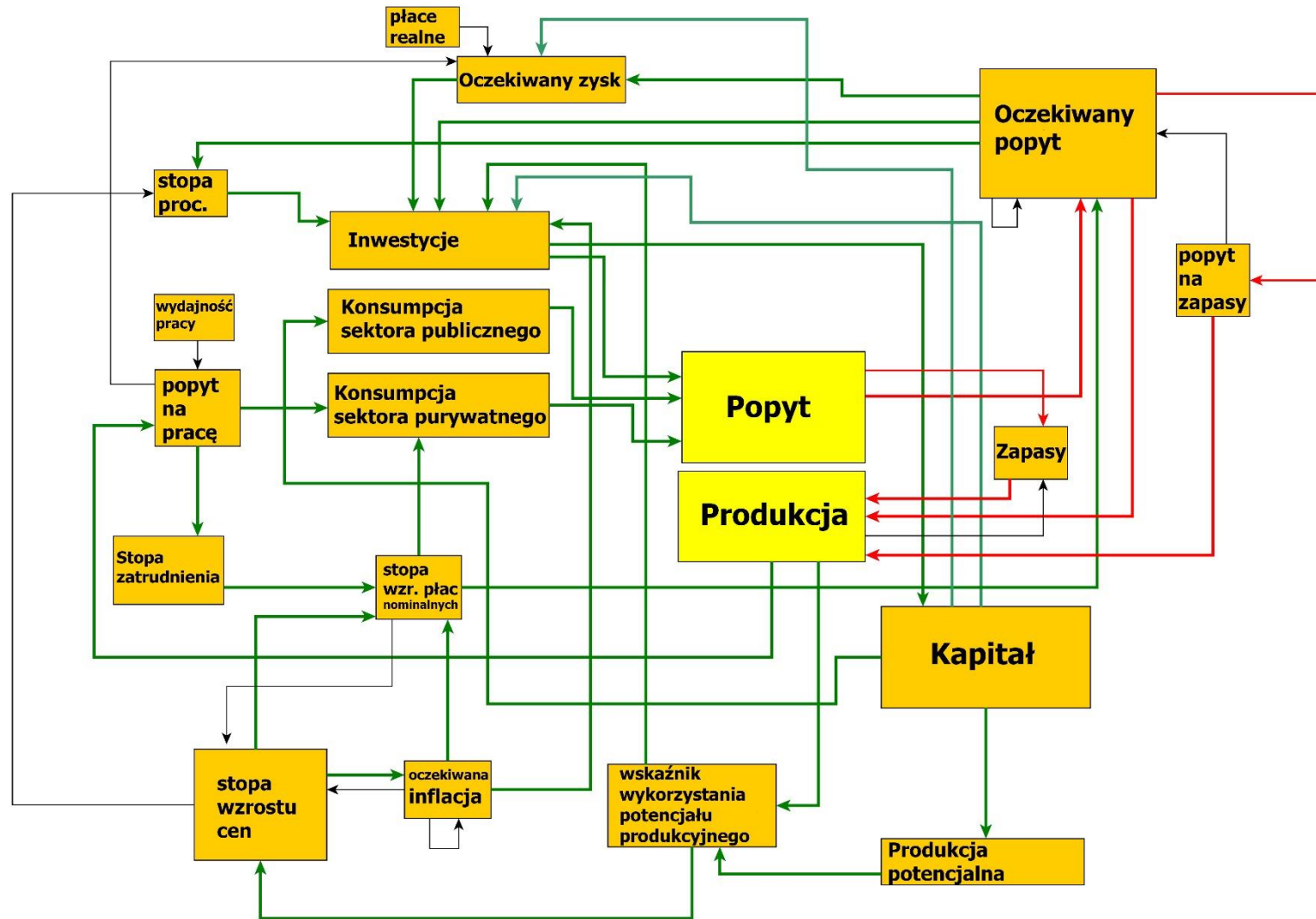
$$\omega \uparrow \longrightarrow Y^e \uparrow \longrightarrow I, C \uparrow \longrightarrow Y^d \uparrow \xrightarrow{\beta_{y^e}} Y \uparrow \longrightarrow u \uparrow \xrightarrow{\beta_p} \hat{p} \uparrow \longrightarrow \omega \downarrow$$

Rysunek 1.1.9. Efekt wzrostu płacy realnej

Źródło: opracowanie własne.

Efekt wzrostu płacy realnej jest efektem stabilizującym wartość płacy realnej ω i może wpływać pozytywnie na stabilność całej gospodarki. Siła efektu wzrostu płacy realnej zależy od dwóch parametrów reakcji: β_{y^e} oraz β_p .

Z przedstawionego powyżej opisu szeregu istniejących sprzężeń zwrotnych widać jak bardzo powiązane są ze sobą zmienne modelu. Kompleksową sieć powiązań między zmiennymi ilustruje rysunek 1.1.10. Sprzężenie stabilizujące jednocześnie może wpływać na siłę któregoś ze sprzężeń destabilizujących, co w konsekwencji może, ale nie musi destabilizować cały model. Przykładowo, stabilizujący efekt Keynesa (wzrost cen wpływa na spadek cen) może prowadzić do powstania destabilizującego lub stabilizującego efektu Rose’a przy odpowiednich wartościach parametrów modelu (spadek cen wpływa na wzrost płac realnych, co może dalej wpłynąć na wzrost/spadek płac realnych).



Rysunek 1.1.10. Schemat powiązań między zmiennymi w autorskiej wersji modelu KMG
 Źródło: opracowanie własne.

1.2. Postać intensywna modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza

W tym podrozdziale zajmiemy się pytaniem czy w gospodarce opisanej przedstawionym powyżej modelem możliwy jest równomierny wzrost wszystkich zmiennych ilościowych takich jak kapitał trwały, produkcja, konsumpcja, inwestycje itd. Ponieważ w procesie równomiernego wzrostu proporcje między zmiennymi modelu pozostają stałe, aby odpowiedzieć na postawione pytanie musimy najpierw sprowadzić oryginalny model do modelu w postaci intensywnej, którego zmienne przedstawiają proporcje między zmiennymi modelu wyjściowego.

W tym celu zdefiniujemy następujące zmienne modelu KMG w postaci intensywnej:

- płace realne ωL^d na jednostkę produkcji: $U = \frac{\omega L^d}{Y}$,
- pracochłonność pełnego zatrudnienia (stosunek efektywnej pracy xL do kapitału):
 $l = \frac{xL}{K}$,
- realna podaż pieniądza M/p na jednostkę kapitału: $m = \frac{M}{pK}$,
- oczekiwany popyt Y^e na jednostkę kapitału: $y^e = \frac{Y^e}{K}$,
- wielkość zapasów N na jednostkę kapitału: $v = \frac{N}{K}$,
- stosunek realnej podaży obligacji B/p do wielkości kapitału trwałego: $b = \frac{B}{pK}$,
- oczekiwana stopa inflacji: π^e ,
- całkowity popyt na jednostkę kapitału trwałego: $y^d = Y^d/K$,
- produkcja na jednostkę kapitału trwałego: $y = Y/K$.

1.2.1. Sprowadzenie modelu do postaci intensywnej

Aby wyprowadzić model KMG w postaci intensywnej, zaczniemy od realnego dochodu z pracy ωL^d na jednostkę produkcji: $U = \omega L^d/Y$. Stosunek Y/L^d to wydajność pracy, oznaczana przez x . Stąd $U = \omega/x$, co oznacza, że tempo wzrostu U jest równe:

$$\hat{U} = \hat{\omega} - \hat{x}. \quad (1.2.1)$$

Z definicji płace realne są równe ilorazowi płac nominalnych i poziomu cen $\omega = w/p$, więc stopa wzrostu płac realnych jest równa różnicy stóp wzrostu płac nominalnych i cen $\hat{\omega} = \hat{w} - \hat{p}$. Równanie (1.2.1) możemy zatem zapisać jako:

$$\hat{U} = \hat{w} - \hat{p} - \hat{x} \quad (1.2.2)$$

Zgodnie z (1.1.4) i (1.1.5) równania opisujące, odpowiednio, stopę wzrostu płac nominalnych oraz stopę inflacji, są następujące:

$$\hat{w} = \beta_w(V - \bar{V}) + \kappa_w \hat{p} + (1 - \kappa_w)\pi^e + n, \quad (1.2.3)$$

$$\hat{p} = \beta_p(u - \bar{u}) + \kappa_p(\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p)\pi^e. \quad (1.2.4)$$

Rozwiązując powyższy układ równań dla \hat{w} oraz \hat{p} , otrzymujemy:

$$\hat{w} = \kappa \left(\beta_w(V - \bar{V}) + \kappa_w \beta_p(u - \bar{u}) \right) + \pi^e + n, \quad (1.2.5)$$

$$\hat{p} = \kappa \left(\kappa_p \beta_w(V - \bar{V}) + \beta_p(u - \bar{u}) \right) + \pi^e, \quad (1.2.6)$$

gdzie $\kappa = \frac{1}{1 - \kappa_w \kappa_p}$, $\kappa_w \kappa_p \neq 1$.

Podstawiając do (1.2.2) stopy wzrostu: płac nominalnych \hat{w} (1.2.5), cen \hat{p} (1.2.6) i wydajności pracy $\hat{x} = n$, po przekształceniu otrzymujemy pierwsze równie modelu intensywnego:

$$\hat{U} = \kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p(1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right), \quad (1.2.7)$$

gdzie $\kappa = \frac{1}{1 - \kappa_w \kappa_p}$, $\kappa_w \kappa_p \neq 1$.

Drugim równaniem modelu intensywnego jest równanie opisujące stopę wzrostu pracochłonności pełnego zatrudnienia. Ze wzoru na efektywną podaż pracy na jednostkę kapitału, $l = xL/K$, wynika:

$$\hat{l} = \hat{x} + \hat{L} - \hat{K}. \quad (1.2.8)$$

Dzieląc obustronnie równanie (1.1.8) przez kapitał rzeczowy K , dostajemy równanie opisujące stopę wzrostu kapitału rzeczowego:

$$\hat{K} = i_1(\rho^e - \xi - (r - \pi^e)) + i_2(u - \bar{u}) + \hat{Y}^e, \quad (1.2.9)$$

gdzie

$$\hat{Y}^e = \hat{w} + \beta_{y^e} \frac{y^d - Y^e}{Y^e}, \quad (1.2.10)$$

$$\rho^e = y^e - Uy - \delta, \quad (1.2.11)$$

$$r = \frac{hy^e}{m}, \quad (1.2.12)$$

$$u = \frac{y}{y^p}. \quad (1.2.13)$$

Z założenia, że podaż pracy L jest stała w czasie mamy $\hat{L} = 0$. Wiemy także, że stopa wzrostu wydajności pracy jest stała: $\hat{x} = n$. A więc, korzystając z równań (1.2.8)-(1.2.13), otrzymujemy drugie równanie modelu intensywnego:

$$\hat{l} = n - \left(\hat{U} + n + \beta_{Y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right) - i_1 \left(y^e - Uy - \delta - \xi - \left(\frac{hy^e}{m} - \pi^e \right) \right) - i_2 \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right). \quad (1.2.14)$$

Trzecie równanie opisuje stopę wzrostu realnej podaży pieniądza na jednostkę kapitału rzeczowego: $m = M/pK$. Stopa ta spełnia równanie:

$$\hat{m} = \hat{M} - \hat{p} - \hat{K}. \quad (1.2.15)$$

Po podstawieniu do (1.2.15) równań: $\hat{M} = \mu$, $\hat{K} = n - \hat{l}$ oraz (1.2.9), otrzymujemy trzecie równanie modelu intensywnego:

$$\hat{m} = \mu - \pi^e - n - \kappa \left(\kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \beta_p \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + \hat{l}. \quad (1.2.16)$$

Czwarte równanie modelu przedstawia zmianę oczekiwań inflacyjnych opisane w podpunkcie 1.1.1:

$$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e} (\alpha \hat{p} + (1 - \alpha) \bar{\pi} - \pi^e), \quad (1.2.17)$$

gdzie

$$\hat{p} = \kappa \left(\kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \beta_p \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + \pi^e. \quad (1.2.18)$$

Piąte równanie modelu intensywnego opisuje dynamikę oczekiwanego popytu na jednostkę kapitału rzeczowego $y^e = Y^e/K$. Z definicji tej zmiennej mamy:

$$\hat{y}^e = \hat{Y}^e - \hat{K}. \quad (1.2.19)$$

Podstawiając do (1.2.19) kolejno $\hat{K} = n - \hat{l}$, $\hat{Y}^e = \hat{\omega} + \beta_{Y^e} \frac{Y^d - Y^e}{Y^e}$, dostajemy piąte równanie modelu intensywnego:

$$\hat{y}^e = y^e \left(\hat{U} + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) - n + \hat{l} \right) \quad (1.2.20)$$

Szóste równanie opisuje przyrost zapasów na jednostkę kapitału rzeczowego: $v = N/K$.

Aby wyprowadzić równanie dynamiki zmiennej v , zaczynamy od równania:

$$\dot{v} = \frac{\dot{N}K - N\dot{K}}{K^2} = \frac{\dot{N}}{K} - \frac{N\dot{K}}{K^2} = \frac{\dot{N}}{K} - \frac{N\dot{K}}{K^2} = \frac{\dot{N}}{K} - v\hat{K}. \quad (1.2.21)$$

Zgodnie z tym, że $\dot{N} = Y - Y^d$, wykorzystując $\hat{K} = n - \hat{l}$, $y = \frac{Y}{K}$, oraz $y^d = \frac{Y^d}{K}$, otrzymujemy szóste równanie modelu intensywnego:

$$\dot{v} = y - y^d - v(n - \hat{l}). \quad (1.2.22)$$

Ostatnim, siódmym równaniem modelu w postaci intensywnej jest równanie opisujące realną podaży obligacji na jednostkę kapitału rzeczowego: $b = B/pK$. Definicja zmiennej b implikuje:

$$\dot{b} = \frac{\dot{B}Kp - B(Kp)}{(Kp)^2} = \frac{\dot{B}}{Kp} - \frac{B}{Kp}(\hat{K} + \hat{p}) = \frac{\dot{B}}{Kp} - b(\hat{K} + \hat{p}). \quad (1.2.23)$$

Zgodnie z (1.1.13), (1.1.11), $\dot{B} = pG + rB - pT - \dot{M}$ oraz $G = gK$ mamy:

$$\dot{b} = g + rb - \frac{T}{K} - \frac{\dot{M}}{Kp} - b(\hat{K} + \hat{p}). \quad (1.2.24)$$

Podstawiając do (1.2.16) $\hat{K} = n - \hat{l}$, $T = \tau_w \omega L^d + \tau_c \left(\rho K + \frac{rB}{p} \right)$ oraz stopę wzrostu cen (1.2.14), otrzymujemy ostatnie siódme równanie modelu:

$$\begin{aligned} \dot{b} = & g + rb - \tau_c(y^d - Uy - \delta + rb) - \tau_w Uy - \mu m - \\ & - b \left(n - \hat{l} + \kappa \left(\beta_p \left(\frac{y}{y^p} - u \right) + \kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) \right) + \pi^e \right), \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

gdzie $m = M/pK$.

Z siedmiu wyprowadzonych powyżej równań otrzymujemy następujący układ nieliniowych równań różniczkowych, które opisują dynamikę proporcji między zmiennymi modelu KMG:

$$\dot{U} = U \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p (1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right), \quad (1.2.26)$$

$$\dot{l} = l \left(n - \left(\hat{U} + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right) - i_1 \left(y^e - Uy - \delta - \xi - \left(\frac{hy^e}{m} - \pi^e \right) \right) - i_2 \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right), \quad (1.2.27)$$

$$\dot{m} = m \left(\mu - \pi^e - n - \kappa \left(\kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \beta_p \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + \hat{l} \right), \quad (1.2.28)$$

$$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e} \left(\alpha \left(\kappa \left(\kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \beta_p \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + \pi^e \right) + (1 - \alpha) \bar{\pi} - \pi^e \right), \quad (1.2.29)$$

$$\dot{y}^e = y^e \left(\hat{U} + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) - n + \hat{l} \right), \quad (1.2.30)$$

$$\dot{v} = y - y^d - v(n - \hat{l}), \quad (1.2.23)$$

$$\begin{aligned} \dot{b} = & g + rb - \tau_c(y^d - Uy - \delta + rb) - \tau_w Uy - \mu m - \\ & - b \left(n - \hat{l} + \kappa \left(\beta_p \left(\frac{y}{y^p} - u \right) + \kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) \right) + \pi^e \right), \end{aligned} \quad (1.2.31)$$

gdzie $\hat{p} = \kappa \left(\kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \beta_p \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + \pi^e$.

Należy podkreślić, że oprócz zmiennych $U, l, m, \pi^e, y^e, v, b$ występują jeszcze dwie dodatkowe zmienne, które występują w równaniach (1.2.26)-(1.2.31). Są to całkowity popyt na jednostkę kapitału rzeczowego $y^d = Y^d/K$ i produkcja na jednostkę kapitału rzeczowego $y = Y/K$. Aby stwierdzić współzależności między powyższymi zmiennymi,

zauważmy, że zgodnie z (1.1.1) i (1.1.20) zmienne Y^d i Y występują w następujących równaniach omawianego modelu KMG:

$$Y^d = C + I + G, \quad (1.2.32)$$

$$Y = Y^e + \beta_Z \dot{Y}^e + \beta_n (N^d - N). \quad (1.2.33)$$

Dzieląc powyższe równania przez K , otrzymujemy:

$$y^d = \frac{C}{K} + \frac{I}{K} + \frac{G}{K}, \quad (1.2.34)$$

$$y = y^e + \beta_Z \frac{\dot{y}^e}{K} + \beta_n \left(\frac{N^d}{K} - \frac{N}{K} \right), \quad (1.2.35)$$

gdzie $y^e = \frac{Y^e}{K}$ oraz $v = N/K$.

Podstawiając równania (1.1.2), (1.1.8) i (1.1.11) do (1.2.34) oraz równania (1.1.14), (1.1.19) do (1.2.35) otrzymujemy następujący układ dwóch równań liniowych (zmienne y^d i y występują po obu stronach tych równań):

$$y^d = (1 - \tau_w)yU + i_1 \left(y^e - yU - \delta - \xi - \left(\frac{hy^e}{m} - \pi^e \right) \right) + i_2(u - \bar{u}) + \delta + g + \\ + \kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p(1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right), \quad (1.2.36)$$

$$y = y^e + \beta_n \beta_{N^d} y^e - \beta_n v + \\ + y^e \beta_Z \left(\kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p(1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right). \quad (1.2.37)$$

Ponieważ zmienne y^d i y występują również w równaniach różniczkowych (1.2.26) - (1.2.31), równania (1.2.36) - (1.2.37) muszą być brane pod uwagę w każdej analizie powyższego układu równań różniczkowych. Oznacza to, że kompletny model KMG w formie intensywnej składa się nie tylko z równań (1.2.26) - (1.2.31), ale także (1.2.36) - (1.2.37).

1.2.2. Stan stacjonarny modelu w postaci intensywnej

Sprowadzenie modelu KMG do postaci intensywnej umożliwia wyznaczenie jego stanu stacjonarnego, a więc takich proporcji między zmiennymi modelu w postaci wyjściowej, które umożliwiają wzrost wszystkich zmiennych z jednakową stopą wzrostu. Ponieważ w procesie równomiernego wzrostu proporcje między zmiennymi (czyli zmienne modelu w postaci intensywnej) pozostają stałe, zatem wyznaczenie stanu stacjonarnego sprowadza się do rozwiązania zwykłego układu równań, jaki otrzymujemy z równań (1.2.26) - (1.2.31) i (1.2.36) - (1.2.37) przy założeniu, że pochodne występujące po lewej stronie równań różniczkowych (1.2.26) - (1.2.31) są zerami. Stanu stacjonarny opisuje zatem nieujemny

wektor $(\bar{U}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{u}, \bar{b})$, będący rozwiązaniem następującego układu (z uwzględnieniem równań (1.2.36) – (1.2.37)).

$$0 = \beta_w(1 - \kappa_p)(V - \bar{V}) - \beta_p(1 - \kappa_w)(u - \bar{u}) \quad (1.2.38)$$

$$0 = -\beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) - i_1(\rho^e - \xi - (r - \pi^e)) - i_2(u - \bar{u}) \quad (1.2.39)$$

$$0 = \mu - n - \hat{p} \quad (1.2.40)$$

$$0 = \alpha \hat{p} + (1 - \alpha)\bar{\pi} - \pi^e \quad (1.2.41)$$

$$0 = \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \quad (1.2.42)$$

$$0 = y - y^d - vn \quad (1.2.43)$$

$$0 = g + rb - \tau_c(y^d - Uy - \delta + rb) - \tau_w Uy - \mu m - b(n + \hat{p}), \quad (1.2.44)$$

gdzie

$$\hat{p} = \kappa \left(\kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \beta_p \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + \pi^e \quad (1.2.45)$$

$$V = \frac{y}{l} \quad (1.2.46)$$

$$u = \frac{y}{y^p} \quad (1.2.47)$$

$$\rho^e = y^e - Uy - \delta \quad (1.2.48)$$

Zgodnie z (1.2.40) stopa inflacji w stanie stacjonarnym, oznaczona przez $\bar{\pi}$ (zob. (1.1.6)) spełnia równanie:

$$\bar{\pi} = \mu - n. \quad (1.2.49)$$

Podstawiając (1.2.49) do (1.2.41), otrzymujemy:

$$0 = \alpha(\mu - n) + (1 - \alpha)(\mu - n) - \bar{\pi}^e \quad (1.2.50)$$

co implikuje, że

$$\bar{\pi}^e = \mu - n = \bar{\pi}. \quad (1.2.51)$$

Zatem oczekiwana stopa inflacji i rzeczywista stopa inflacji w stanie stacjonarnym są sobie równe. A więc równanie (1.2.40) w stanie stacjonarnym ma postać:

$$\bar{\pi} = \kappa \left(\kappa_p \beta_w (V - \bar{V}) + \beta_p (u - \bar{u}) \right) + \bar{\pi}, \quad (1.2.52)$$

gdzie $\kappa > 0$. Stąd

$$\beta_p (u - \bar{u}) = -\kappa_p \beta_w (V - \bar{V}). \quad (1.2.53)$$

Podstawiając (1.2.53) do (1.2.38), mamy:

$$0 = \beta_w(1 - \kappa_p)(V - \bar{V}) + (1 - \kappa_w)\kappa_p \beta_w (V - \bar{V}), \quad (1.2.54)$$

co prowadzi do

$$\beta_w(V - \bar{V})(1 - \kappa_w\kappa_p) = 0. \quad (1.2.55)$$

gdzie $\beta_w > 0$ i $\kappa_p\kappa_w \neq 1$. Stąd

$$V = \bar{V}. \quad (1.2.56)$$

Oznacza to, że wartość stopy zatrudniania V w równowadze jest równa wartości naturalnej stopy zatrudnienia \bar{V} .

Podstawiając (1.2.56) do (1.2.53), otrzymujemy:

$$u = \bar{u}, \quad (1.2.57)$$

więc wartość wskaźnika wykorzystania potencjału produkcyjnego u w stanie stacjonarnym jest równa jego normatywnej wielkości \bar{u} . Korzystając z definicji zmiennej $u = y/y^p$ i (1.2.57), możemy wyznaczyć stosunek produkcji do kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym:

$$\bar{y} = \bar{u}y^p, \quad y^p = \text{const}. \quad (1.2.58)$$

A więc produkcja na jednostkę kapitału w stanie stacjonarnym jest wprost proporcjonalna do produkcji potencjalnej na jednostkę kapitału rzeczowego. Z (1.2.58) wynika również, że im wyższy normatywny poziom wskaźnika wykorzystania produkcyjnego, tym wartość produkcji rzeczywistej jest bliższa wartości produkcji potencjalnej na jednostkę kapitału rzeczowego.

Z definicji zmiennej $V = \frac{y}{l}$ oraz (1.2.56) i (1.2.58) mamy:

$$\bar{l} = \frac{\bar{y}}{\bar{V}}. \quad (1.2.59)$$

Podstawiając (1.2.56), (1.2.57) do równania:

$$\hat{\omega} = \kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p)(V - \bar{V}) - \beta_p(1 - \kappa_w)(u - \bar{u}) \right) + n^{25}$$

otrzymujemy:

$$\hat{\omega} = n. \quad (1.2.60)$$

Z (1.2.42) dostajemy:

$$y^d = y^e. \quad (1.2.61)$$

Ponieważ $y^d = y^e$, więc (1.2.43) daje nam:

$$v = \frac{\bar{y} - y^e}{n}. \quad (1.2.62)$$

²⁵ Stopa wzrostu płac realnych zgodnie z jej definicją jest równa: $\hat{\omega} = \hat{w} - \hat{p}$. Podstawiając (1.2.5) i (1.2.6) do $\hat{\omega} = \hat{w} - \hat{p}$, otrzymujemy:

$$\hat{\omega} = \kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p)(V - \bar{V}) - \beta_p(1 - \kappa_w)(u - \bar{u}) \right) + n.$$

Podstawiając (1.2.60) i (1.2.62) do (1.2.37), otrzymujemy:

$$\bar{y} = y^e(1 + \beta_Z n) + \beta_n \left(\beta_{Nd} y^e - \frac{\bar{y} - y^e}{n} \right). \quad (1.2.63)$$

Rozwiązanie (1.2.63) dla y^e prowadzi do wyrażenia:

$$\bar{y}^e = \frac{n + \beta_n}{n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n} \bar{y}. \quad (1.2.64)$$

Znając wartość oczekiwanego popytu w stanie stacjonarnym \bar{y}^e (1.2.64), z (1.2.62) możemy wyznaczyć stosunek zapasów do kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym:

$$\bar{v} = \frac{\bar{u} y^p - \bar{y}^e}{n}. \quad (1.2.65)$$

Równania (1.2.57), (1.2.60), (1.2.61) i (1.2.39) implikują:

$$\rho^e = r - \pi^e + \xi. \quad (1.2.66)$$

Wykorzystując powyższy wynik w (1.2.36), uzyskujemy:

$$\bar{y}^d = (1 - \tau_w) \bar{y} U + \delta + g + n. \quad (1.2.67)$$

Z równania (1.2.67) mamy:

$$U = \frac{\bar{y}^d - (\delta + g + n)}{(1 - \tau_w) \bar{y}}, \quad (1.2.68)$$

gdzie $\delta, g, n, \tau_w = \text{const.}$.

Równanie (1.2.68) możemy zapisać jako:

$$\bar{U} = \frac{\bar{c}}{(1 - \tau_w) \bar{y}},$$

gdzie $\bar{c} = \bar{y}^d - (\delta + g + n)$ to konsumpcja sektora prywatnego w stosunku do kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym.

Wykorzystując definicję zmiennej $\rho^e = y^e - U y - \delta$ (1.2.48) oraz (1.2.58), (1.2.64), (1.2.68), możemy wyznaczyć oczekiwaną stopę zwrotu z kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym:

$$\bar{\rho}^e = \bar{y}^e - \bar{U} \bar{y} - \delta. \quad (1.2.69)$$

Ponieważ w stanie stacjonarnym mamy $\bar{y}^e = \bar{y}^d$, to $\bar{\rho}^e = \bar{\rho}$. Zatem, oczekiwana stopa zwrotu z kapitału rzeczowego i rzeczywista stopa zwrotu z kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym są identyczne.

Nominalną stopę procentową w stanie stacjonarnym określa wartość r , która spełnia równanie (1.2.66):

$$\bar{r} = \bar{\rho}^e + \bar{\pi} - \xi. \quad (1.2.70)$$

Dalej, \bar{m} otrzymuje się z intensywnej postaci równania LM równowagi na rynku pieniądza²⁶:

$$\bar{m} = h \frac{\bar{y}^e}{\bar{r}}. \quad (1.2.71)$$

Na koniec, wstawiając wcześniej wyznaczone zmienne w stanie stacjonarnym do (1.2.44), otrzymujemy:

$$0 = g + \bar{r}b - \tau_c(\bar{\rho} + \bar{r}b) - \tau_w \bar{U} \bar{y} - \mu \bar{m} - b(n + \bar{\pi}), \quad (1.2.72)$$

gdzie symbole z kreską oznaczają wcześniej ustalone wartości zmiennych w stanie stacjonarnym.

Rozwiązanie (1.2.72) dla b prowadzi do:

$$\bar{b} = \frac{g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{y} - \mu \bar{m}}{\tau_c \bar{r} - \bar{r} + \mu}. \quad (1.2.73)$$

1.2.3. Równania opisujące wartości zmiennych modelu intensywnego w stanie stacjonarnym

Podsumowując, na podstawie analizy z poprzedniego punktu otrzymujemy następujące zestawienie wzorów opisujących wartości zmiennych w stanie stacjonarnym:

- udział wynagrodzeń przed opodatkowaniem (kosztów pracy) w PKB:

$$\bar{U} = \frac{\bar{c}}{(1 - \tau_w) \bar{y}}, \quad (1.2.74)$$

- pracochętność pełnego zatrudnienia (stosunek efektywnej pracy do kapitału rzeczowego):

$$\bar{l} = \frac{\bar{y}}{\bar{v}}, \quad (1.2.75)$$

- oczekiwany popyt na jednostkę kapitału rzeczowego:

$$\bar{y}^e = \bar{y}^d = \frac{(n + \beta_n)}{n + \beta_n z n^2 + \beta_n \beta_n d n + \beta_n} \bar{y}, \quad (1.2.76)$$

- konsumpcja na jednostkę kapitału rzeczowego:

$$\bar{c} = \bar{y}^d - (n + \delta + g), \quad (1.2.77)$$

- realna podaż pieniądza na jednostkę kapitału rzeczowego:

$$\bar{m} = h \frac{\bar{y}^d}{\bar{r}}, \quad (1.2.78)$$

- wskaźnik inflacji cen:

$$\bar{\pi} = \mu - n, \quad (1.2.79)$$

²⁶ Aby trzymać postać intensywną równania równowagi na rynku pieniądza $m = h \frac{y^e}{r}$, wystarczy podzielić równanie równowagi $M = h \frac{pY^e}{r}$ przez wyrażenie pK .

- wielkość zapasów na jednostkę kapitału rzeczowego:

$$\bar{v} = \frac{\bar{y} - \bar{y}^d}{n}, \quad (1.2.80)$$

- stosunek podaży obligacji do nominalnej wartości kapitału rzeczowego:

$$\bar{b} = \frac{g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{y} - \mu \bar{m}}{\tau_c \bar{r} - \bar{r} + \mu} \quad (1.2.81)$$

- stopa zysku z kapitału rzeczowego:

$$\bar{\rho} = \bar{y}^d - \bar{U} \bar{y} - \delta \quad (1.2.82)$$

- nominalna stopa procentowa:

$$\bar{r} = \bar{\rho} + \mu - n - \xi, \quad (1.2.83)$$

- stosunek produkcji do kapitału rzeczowego:

$$\bar{y} = \bar{u} y^p. \quad (1.2.84)$$

Aby pokazać, że proporcje opisane powyższymi wzorami rzeczywiście pozwalają na równomierny wzrost gospodarki ze stopą wzrostu n , równą stopie wzrostu wydajności pracy skupmy się najpierw na efektywnej podaży pracy na jednostkę kapitału $l = xL / K$. W stanie stacjonarnym stopa wzrostu l wynosi zero, więc $l = \hat{x} + \hat{L} - \hat{K} = 0$. Z założenia podaż pracy L jest stała, a wydajność pracy x rośnie ze stopą n . Wynika stąd, że w stanie stacjonarnym stopa wzrostu kapitału rzeczowego jest równa stopie wzrostu wydajności pracy, czyli $\hat{K} = n$. Z równań $Y^p = y^p K$ i $u = Y / Y^p$, wynika, że $\bar{u} y^p = Y / K$. Ponieważ $\bar{u} y^p$ jest stałe w czasie, produkcja Y w stanie stacjonarnym również musi rosnać z tą samą stopą wzrostu co kapitał, równą n . Przyglądając się innym formułom, łatwo zauważyć, że w stanie stacjonarnym również inne zmienne ilościowe, takie jak inwestycje, konsumpcja prywatna i publiczna, rosną ze stopą n . Dodatkowo biorąc pod uwagę fakt, że w stanie stacjonarnym oczekiwana inflacja jest równa rzeczywistej inflacji, łatwo zauważyć, że w stanie stacjonarnym również tempo wzrostu płacy realnej $\hat{w} = \hat{w} - \hat{p}$ jest równe n .

Analizując stan stacjonarny warto też odnotować ciekawy wniosek, że zgodnie z równaniem $\bar{c} = \gamma \bar{u} y^p - (n + \delta + g)$ im wyższa jest stopa równomiernego wzrostu n (równa stopie wzrostu wydajności pracy), tym niższa jest konsumpcja prywatna na jednostkę kapitału rzeczowego (a więc także udział konsumpcji w wartości produkcji, czyli w PKB). Ponadto wzrost n obniża udział wynagrodzeń przed opodatkowaniem (kosztów pracy) w PKB opisany równaniem (1.2.74).

Na koniec warto podkreślić, że jedynymi zmiennymi, które w stanie stacjonarnym zależą od wzrostu podaży pieniądza μ , są poziom inflacji $\bar{\pi} = \mu - n$ oraz stosunek realnej

podażą obligacji B/p do wielkości kapitału trwałego K , równy \bar{b} . Świadczy to o neutralności pieniądza w stanie stacjonarnym, rozumianej jako brak wpływu stopy wzrostu podaży pieniądza nie tylko na stopę równomiernego wzrostu, ale także na proporcje między zmiennymi ilościowymi w stanie stacjonarnym

1.2.4. Analiza wrażliwości stanu stacjonarnego na zmiany parametrów modelu

Wzory (1.2.74)-(1.2.88) zaprezentowane w poprzednim podrozdziale umożliwiają analizę wrażliwości stanu stacjonarnego na zmiany wartości parametrów modelu. Przed przystąpieniem do takiej analizy dokonamy jednak przekształcenia tych wzorów tak, aby uzyskać wartości zmiennych na jednostkę produkcji (PKB), a nie na jednostkę kapitału rzeczowego, co uczyni analizę bardziej standardową. Przekształcenie powyższe łatwo uzyskujemy, korzystając z faktu, że w stanie stacjonarnym, jak wynika z równania (1.2.84), stosunek produkcji do kapitału rzeczowego określony jest wzorem:

$$\frac{Y}{K} = \bar{y} = \bar{u}y^p . \quad (1.2.85)$$

Tak więc, w celu zaprezentowania zmiennych na jednostkę PKB wystarczy podzielić zmienne na jednostkę kapitału rzeczowego przez stosunek produkcji do kapitału rzeczowego \bar{y} (1.2.85). Dodatkowo, aby ułatwić analizę wrażliwości, badane wzory zmiennych w stanie stacjonarnym doprowadzamy do ostatecznych postaci tzn. do postaci, w której występują jedynie parametry modelu. W rezultacie wartości zmiennych w stanie stacjonarnym pokazujące wartości zmiennych modelu wyjściowego na jednostkę produkcji (PKB) spełniają następujące równania:

- stosunek całkowitego popytu finalnego do PKB:

$$\frac{Y^d}{Y} = \frac{n+\beta_n}{n+\beta_Z n^2 + \beta_n \beta_N d^{n+\beta_n}} , \quad (1.2.85)$$

- stosunek konsumpcji do PKB:

$$\frac{C}{Y} = \frac{n+\beta_n}{n+\beta_Z n^2 + \beta_n \beta_N d^{n+\beta_n}} - \frac{(n+\delta+g)}{\bar{u}y^p} , \quad (1.2.86)$$

- stosunek inwestycji do PKB:

$$\frac{I}{Y} = \frac{n+\delta}{\bar{u}y^p} , \quad (1.2.87)$$

- stosunek konsumpcji publicznej do PKB:

$$\frac{G}{Y} = \frac{g}{\bar{u}y^p} , \quad (1.2.88)$$

- stosunek długu publicznego (obligacji) do PKB

$$\frac{B}{pY} = \frac{g - \tau_c(-\tau_w \bar{y}^e + n + g + \tau_w \delta) - \tau_w(\bar{y}^e - n - \delta) - \mu \bar{m}}{(n(1 - \tau_w) + (-\tau_w \bar{y}^e + n + g + \tau_w \delta)(1 + \tau_c) + \tau_c(\mu - n)(1 - \tau_w)) \bar{u} y^p + \xi}, \quad (1.2.89)$$

- stosunek wynagrodzeń przed opodatkowaniem (kosztów pracy) do PKB:

$$\frac{\omega L}{Y} = \frac{1}{(1 - \tau_w)} \left(\frac{(n + \beta_n)}{n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n} - \frac{(n + \delta + g)}{\bar{u} y^p} \right). \quad (1.2.90)$$

W przeprowadzonej analizie wrażliwości badamy wpływ na stan stacjonarny zmian w wartościach następujących parametrów: β_n – parametr reakcji produkcji na odchylenie rzeczywistego poziomu zapasów od pożądanego, β_Z – parametr reakcji produkcji na przyrost oczekiwanego popytu, β_{Nd} – pożądaný stosunek zapasów do oczekiwanego popytu, \bar{u} – naturalny poziom wykorzystania mocy produkcyjnych, y^p – potencjalna efektywność kapitału rzeczowego (stosunek maksymalnej produkcji Y^p do kapitału rzeczowego), n – stopa wzrostu wydajności pracy, δ – współczynnik deprecjacji kapitału, g – stosunek popytu sektora rządowego do kapitału rzeczowego, τ_w, τ_c – stawki podatkowe, \bar{V} – stopa zatrudnienia, μ – stopa wzrostu podaży pieniądza.

Aby określić wpływ danego parametru, należy obliczyć wartości pochodnych analizowanych zmiennych.

Pochodne cząstkowe stosunku wynagrodzeń przed opodatkowaniem (kosztów pracy) do PKB:

$$\frac{\omega L}{Y} = \frac{1}{(1 - \tau_w)} \left(\frac{(n + \beta_n)}{n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n} - \frac{(n + \delta + g)}{\bar{u} y^p} \right),$$

są równe:

$$\frac{d}{d\beta_n} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) = \frac{1}{(1 - \tau_w)} \frac{(\beta_Z - \beta_{Nd}) n^2}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n)^2} : \text{jeżeli } \beta_Z > \beta_{Nd}, \text{ to } \frac{d}{d\beta_n} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) > 0, \text{ w p.p. } \frac{d}{d\beta_n} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) < 0,$$

$$\frac{d}{d\beta_Z} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) = \frac{1}{(1 - \tau_w)} \frac{-(n + \beta_n) n^2}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n)^2} < 0,$$

$$\frac{d}{d\beta_{Nd}} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) = \frac{1}{(1 - \tau_w)} \frac{-(n + \beta_n) \beta_n n}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n)^2} < 0,$$

$$\frac{d}{d\bar{u}} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) = \frac{1}{(1 - \tau_w)} \frac{(n + \delta + g)}{\bar{u}^2 y^p} > 0,$$

$$\frac{d}{dy^p} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) = \frac{1}{(1 - \tau_w)} \frac{(n + \delta + g)}{\bar{u} (y^p)^2} > 0,$$

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) = \frac{1}{(1 - \tau_w)} \left(\frac{((1 + \beta_n \beta_{Nd} - \beta_Z) n^2 + (\beta_n - 2\beta_n \beta_Z - \beta_n \beta_{Nd} - 1) n - \beta_n^2 \beta_{Nd} - \beta_n)}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n)^2} - \frac{1}{\bar{u} y^p} \right),$$

$$\frac{d}{d\delta} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) = -\frac{1}{(1 - \tau_w)} \frac{1}{\bar{u} y^p} < 0,$$

$$\frac{d}{dg} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) = -\frac{1}{(1 - \tau_w)} \frac{1}{\bar{u} y^p} < 0,$$

$\frac{d}{d\tau_w} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) = \frac{1}{(1-\tau_w)^2} \left(\frac{(n+\beta_n)}{n+\beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n} - \frac{(n+\delta+g)}{\bar{u} y^p} \right) > 0$, ponieważ $\frac{\omega L}{Y} > 0$ więc wyrażenie w nawiasie musi być dodatnie.

Pozostałe pochodne cząstkowe względem analizowanych parametrów są równe zero.

Pochodne cząstkowe stosunku podaży pracy do popytu na pracę:

$$\frac{L}{L^d} = \frac{1}{\bar{V}}$$

są równe:

$$\frac{d}{d\bar{V}} \left(\frac{L}{L^d} \right) = -\frac{1}{\bar{V}^2} < 0.$$

Pozostałe pochodne cząstkowe względem analizowanych parametrów są równe zero.

Pochodne cząstkowe stosunku całkowitego popytu finalnego do PKB:

$$\frac{Y^d}{Y} = \frac{n+\beta_n}{n+\beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n'}$$

są równe:

$\frac{d}{d\beta_n} \left(\frac{Y^d}{Y} \right) = \frac{(\beta_Z - \beta_{Nd}) n^2}{(n+\beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n)^2}$: jeżeli $\beta_Z > \beta_{Nd}$, to $\frac{d}{d\beta_n} \left(\frac{Y^d}{Y} \right) > 0$, w przeciwnym

przypadku, $\frac{d}{d\beta_n} \left(\frac{Y^d}{Y} \right) < 0$,

$$\frac{d}{d\beta_Z} \left(\frac{Y^d}{Y} \right) = \frac{-(n+\beta_n) n^2}{(n+\beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n)^2} < 0,$$

$$\frac{d}{d\beta_{Nd}} \left(\frac{Y^d}{Y} \right) = \frac{-(n+\beta_n) \beta_n n}{(n+\beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n)^2} < 0,$$

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{Y^d}{Y} \right) = \frac{(1+\beta_n \beta_{Nd} - \beta_Z) n^2 + (\beta_n - 2\beta_n \beta_Z - \beta_n \beta_{Nd} - 1) n - \beta_n^2 \beta_{Nd} - \beta_n}{(n+\beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n)^2} (?).$$

Pozostałe pochodne cząstkowe względem analizowanych parametrów są równe zero.

Pochodne cząstkowe stosunku konsumpcji do PKB:

$$\frac{C}{Y} = \frac{n+\beta_n}{n+\beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n} - \frac{(n+\delta+g)}{\bar{u} y^p},$$

są równe:

$\frac{d}{d\beta_n} \left(\frac{C}{Y} \right) = \frac{(\beta_Z - \beta_{Nd}) n^2}{(n+\beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n)^2}$: jeżeli $\beta_Z > \beta_{Nd}$, to $\frac{d}{d\beta_n} \left(\frac{C}{Y} \right) > 0$, w p.p. $\frac{d}{d\beta_n} \left(\frac{C}{Y} \right) < 0$,

$$\frac{d}{d\beta_Z} \left(\frac{C}{Y} \right) = \frac{-(n+\beta_n) n^2}{(n+\beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n)^2} < 0,$$

$$\frac{d}{d\beta_{Nd}} \left(\frac{C}{Y} \right) = \frac{-(n+\beta_n) \beta_n n}{(n+\beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n)^2} < 0, \quad \frac{d}{d\bar{u}} \left(\frac{C}{Y} \right) = \frac{(n+\delta+g)}{\bar{u}^2 y^p} > 0,$$

$$\frac{d}{dy^p} \left(\frac{C}{Y} \right) = \frac{(n+\delta+g)}{\bar{u}(y^p)^2} > 0,$$

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{C}{Y} \right) = \frac{(1+\beta_n \beta_{Nd} - \beta_Z) n^2 + (\beta_n - 2\beta_n \beta_Z - \beta_n \beta_{Nd} - 1) n - \beta_n^2 \beta_{Nd} - \beta_n}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n)^2} - \frac{1}{\bar{u} y^p} (?),$$

$$\frac{d}{d\delta} \left(\frac{C}{Y} \right) = -\frac{1}{\bar{u} y^p} < 0,$$

$$\frac{d}{dg} \left(\frac{C}{Y} \right) = -\frac{1}{\bar{u} y^p} < 0.$$

Pozostałe pochodne cząstkowe względem analizowanych parametrów są równe zero.

Pochodne cząstkowe stosunku inwestycji do PKB:

$$\frac{I}{Y} = \frac{n+\delta}{\bar{u} y^p},$$

są równe:

$$\frac{d}{d\bar{u}} \left(\frac{I}{Y} \right) = -\frac{(n+\delta)}{\bar{u}^2 y^p} < 0, \quad \frac{d}{dy^p} \left(\frac{I}{Y} \right) = -\frac{(n+\delta)}{\bar{u}(y^p)^2} < 0, \quad \frac{d}{dn} \left(\frac{I}{Y} \right) = \frac{d}{dg} \left(\frac{I}{Y} \right) = \frac{1}{\bar{u} y^p} > 0.$$

Pozostałe pochodne cząstkowe względem analizowanych parametrów są równe zero.

Pochodne cząstkowe stosunku konsumpcji publicznej do PKB:

$$\frac{G}{Y} = \frac{g}{\bar{u} y^p},$$

są równe:

$$\frac{d}{d\bar{u}} \left(\frac{G}{Y} \right) = -\frac{g}{\bar{u}^2 y^p} < 0, \quad \frac{d}{dy^p} \left(\frac{G}{Y} \right) = -\frac{g}{\bar{u}(y^p)^2} < 0, \quad \frac{d}{dg} \left(\frac{G}{Y} \right) = \frac{1}{\bar{u} y^p} > 0.$$

Pozostałe pochodne cząstkowe względem analizowanych parametrów są równe zero.

Pochodne cząstkowe stosunku długu publicznego (obligacji) do nominalnego PKB

$$\frac{B}{pY} = \frac{g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{u} y^p - \mu \bar{m}}{n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi})},$$

są równe:

$$\frac{d}{d\beta_n} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{-(\tau_c \frac{d\bar{\rho}}{d\beta_n} + \tau_w \bar{u} y^p \frac{d\bar{U}}{d\beta_n} + \mu \frac{d\bar{m}}{d\beta_n})(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi})) + (g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{u} y^p - \mu \bar{m})(1 - \tau_c) \frac{d\bar{\rho}}{d\beta_n}}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2},$$

$$\frac{d}{d\beta_Z} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{-(\tau_c \frac{d\bar{\rho}}{d\beta_Z} + \tau_w \bar{u} y^p \frac{d\bar{U}}{d\beta_Z} + \mu \frac{d\bar{m}}{d\beta_Z})(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi})) + (g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{u} y^p - \mu \bar{m})(1 - \tau_c) \frac{d\bar{\rho}}{d\beta_Z}}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2},$$

$$\frac{d}{d\beta_{Nd}} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{-(\tau_c \frac{d\bar{\rho}}{d\beta_{Nd}} + \tau_w \bar{u} y^p \frac{d\bar{U}}{d\beta_{Nd}} + \mu \frac{d\bar{m}}{d\beta_{Nd}})(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi})) + (g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{u} y^p - \mu \bar{m})(1 - \tau_c) \frac{d\bar{\rho}}{d\beta_{Nd}}}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2},$$

$$\frac{d}{d\bar{u}} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{-(\tau_c \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{u}} + \tau_w \bar{u} y^p \frac{d\bar{U}}{d\bar{u}} + y^p \bar{U} + \mu \frac{d\bar{m}}{d\bar{u}})(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi})) + (g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{u} y^p - \mu \bar{m})(1 - \tau_c) \frac{d\bar{\rho}}{d\bar{u}}}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2},$$

$$\frac{d}{dy^p} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{-(\tau_c \frac{d\bar{\rho}}{dy^p} + \tau_w \bar{u} y^p \frac{d\bar{U}}{dy^p} + \bar{u} \bar{U} + \mu \frac{d\bar{m}}{dy^p})(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi})) + (g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{u} y^p - \mu \bar{m})(1 - \tau_c) \frac{d\bar{\rho}}{dy^p}}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2},$$

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{-\left(\tau_c \frac{d\bar{p}}{dn} + \tau_w \bar{u} y^p \frac{d\bar{U}}{dn} + \mu \frac{d\bar{m}}{dn} \right) (n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi})) + (g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{u} y^p - \mu \bar{m}) (1 - \tau_c) \left(1 - \frac{d\bar{p}}{dn} \right)}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2},$$

$$\frac{d}{d\delta} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{-\left(\tau_c \frac{d\bar{p}}{d\delta} + \tau_w \bar{u} y^p \frac{d\bar{U}}{d\delta} + \mu \frac{d\bar{m}}{d\delta} \right) (n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi})) + (g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{u} y^p - \mu \bar{m}) (1 - \tau_c) \frac{d\bar{p}}{d\delta}}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2},$$

$$\frac{d}{dg} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{-\left(1 + \tau_c \frac{d\bar{p}}{dg} + \tau_w \bar{u} y^p \frac{d\bar{U}}{dg} + \mu \frac{d\bar{m}}{dg} \right) (n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi})) + (g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{u} y^p - \mu \bar{m}) (1 - \tau_c) \frac{d\bar{p}}{dg}}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2},$$

$$\frac{d}{d\tau_w} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{-U \bar{u} y^p}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))},$$

$$\frac{d}{d\tau_c} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{-\bar{\rho} (n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi})) - (g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w U \bar{u} y^p - \mu \bar{m}) (\bar{\rho} + \bar{\pi})}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2},$$

$$\frac{d}{d\bar{V}} \left(\frac{B}{pY} \right) = 0,$$

$$\frac{d}{d\mu} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{-\left(\bar{m} + \mu \frac{d\bar{m}}{d\mu} \right) (n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi})) - (g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w U \bar{u} y^p - \mu \bar{m}) \tau_c}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c (\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2}.$$

Oprócz pochodnej $\frac{d}{d\bar{V}} \left(\frac{B}{pY} \right) = 0$, ze względu na złożoność wzorów, nie da się jednoznacznie określić czy powyższe pochodne są dodatnie, ujemne, czy równe 0.

Pochodne cząstkowe wskaźnika inflacji cen:

$$\bar{\pi} = \mu - n,$$

są równe:

$$\frac{d}{d\mu} (\bar{\pi}) = 1, \quad \frac{d}{dn} (\bar{\pi}) = -1.$$

Pozostałe pochodne cząstkowe względem analizowanych parametrów są równe zero.

Pochodne stopy zysku z kapitału rzeczowego:

$$\bar{\rho} = -\frac{\tau_w}{(1 - \tau_w)} \frac{(n + \beta_n)}{n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n} \bar{u} y^p + \frac{(n + \delta + g)}{(1 - \tau_w)} - \delta,$$

są równe:

$$\frac{d}{d\beta_n} (\bar{\rho}) = -\frac{\tau_w}{(1 - \tau_w)} \frac{(\beta_Z - \beta_{Nd}) n^2}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n)^2} \bar{u} y^p : \text{jeżeli } \beta_Z > \beta_{Nd}, \text{ to } \frac{d}{d\beta_n} (\bar{\rho}) > 0, \text{ w p.p. } \frac{d}{d\beta_n} (\bar{\rho}) <$$

0,

$$\frac{d}{d\beta_Z} (\bar{\rho}) = -\frac{\tau_w}{(1 - \tau_w)} \frac{-(n + \beta_n) n^2}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n)^2} \bar{u} y^p > 0,$$

$$\frac{d}{d\beta_{Nd}} (\bar{\rho}) = -\frac{\tau_w}{(1 - \tau_w)} \frac{-(n + \beta_n) \beta_n n}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n)^2} \bar{u} y^p > 0,$$

$$\frac{d}{d\bar{u}} (\bar{\rho}) = -\frac{\tau_w}{(1 - \tau_w)} \frac{(n + \beta_n)}{n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n} y^p < 0,$$

$$\frac{d}{dy^p} (\bar{\rho}) = -\frac{\tau_w}{(1 - \tau_w)} \frac{(n + \beta_n)}{n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n} \bar{u} < 0,$$

$$\frac{d}{dn}(\bar{\rho}) = -\frac{\tau_w}{(1-\tau_w)} \left(\frac{(1+\beta_n\beta_{Nd}-\beta_Z)n^2 + (\beta_n-2\beta_n\beta_Z-\beta_n\beta_{Nd}-1)n-\beta_n^2\beta_{Nd}-\beta_n}{(n+\beta_Zn^2+\beta_n\beta_{Nd}n+\beta_n)^2} \right) \bar{u}y^p + \frac{1}{(1-\tau_w)} (?),$$

$$\frac{d}{d\delta}(\bar{\rho}) = \frac{\tau_w}{(1-\tau_w)} > 0,$$

$$\frac{d}{dg}(\bar{\rho}) = \frac{1}{(1-\tau_w)} > 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau_w}(\bar{\rho}) &= -\frac{1}{(1-\tau_w)^2} \frac{(n+\beta_n)}{n+\beta_Zn^2+\beta_n\beta_{Nd}n+\beta_n} \bar{u}y^p + \frac{(n+\delta+g)}{(1-\tau_w)^2} = -\frac{1}{(1-\tau_w)^2} (y^d - (n + \delta + g)) = \\ &= -\frac{1}{(1-\tau_w)^2} (\bar{c}) < 0. \end{aligned}$$

Pozostałe pochodne cząstkowe względem analizowanych parametrów są równe zero.

Wyniki analizy wrażliwości wartości powyższych zmiennych oraz wskaźnika inflacji: $\bar{\pi} = \mu - n$, stopy zysku z kapitału rzeczowego: $\bar{\rho} = \bar{y}^e - \bar{U}\bar{u}y^p - \delta$ i stosunku podaży pracy do popytu na pracę: $L/L^d = 1/\bar{V}$ na zmiany wartości wybranych parametrów modelu przedstawia tabela 1.2.1. Znak (+) w tabeli oznacza, że wartość danej zmiennej w stanie stacjonarnym rośnie ze wzrostem wybranego parametru, znak (-), że maleje. Znak (?) oznacza, że ze względu na postać równania, zależności nie można jednoznacznie określić.

Tabela 1.2.1. Analiza wrażliwości stanu stacjonarnego na zmiany parametrów modelu

	$\beta_n \uparrow$	$\beta_Z \uparrow$	$\beta_{Nd} \uparrow$	$\bar{u} \uparrow$	$y^p \uparrow$	$n \uparrow$	$\delta \uparrow$	$g \uparrow$	$\tau_w \uparrow$	$\tau_c \uparrow$	$\bar{V} \uparrow$	$\mu \uparrow$
$\omega L/Y$?	-	-	+	+	?	-	-	+	0	0	0
L/L^d	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-	0
Y^d/Y	?	-	-	0	0	?	0	0	0	0	0	0
C/Y	?	-	-	+	+	?	-	-	0	0	0	0
I/Y	0	0	0	-	-	+	+	0	0	0	0	0
G/Y	0	0	0	-	-	0	0	+	0	0	0	0
B/pY	?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	0	?
$\bar{\pi}$	0	0	0	0	0	-	0	0	0	0	0	+
$\bar{\rho}$?	+	+	+	+	?	-	+	-	0	0	0

Źródło: opracowanie własne.

Analiza przedstawiona w tabeli 1.2.1 w połączeniu ze wzorami zaprezentowanymi w podrozdziale 1.1.3, opisującymi stan stacjonarny prowadzi, do kilku interesujących wniosków na temat zależności tych proporcji od parametrów modelu.

1. Proporcje między zmiennymi ilościowymi modelu nie zależą od stopy wzrostu nominalnej podaży pieniądza μ , co jest potwierdzeniem neutralności pieniądza. Co ciekawe, stopa ta

ma jednak wpływ na stosunek długu publicznego do wielkości produkcji w stanie stacjonarnym:

$$\frac{d}{d\mu} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{-\left(\bar{m} + \mu \frac{d\bar{m}}{d\mu}\right)(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c(\bar{\rho} + \mu - n)) - (g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w U \bar{u} y^p - \mu \bar{m}) \tau_c}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c(\bar{\rho} + \mu - n))^2}.$$

gdzie $\frac{d\bar{m}}{d\mu} = -1$.

2. Z postaci pochodnych określających wpływ stopy równomiernego wzrostu n (równej stopie wzrostu wydajności pracy) możemy stwierdzić, że wzrost tej stopy jest wynagradzany wzrostem udziału inwestycji w PKB w stanie stacjonarnym:

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{I}{Y} \right) = \frac{1}{\bar{u} y^p}.$$

Wzrost n , nie wpływa natomiast na stosunek podaży pracy do popytu na pracę ani na konsumpcję sektora publicznego w stosunku do PKB w stanie stacjonarnym:

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{L}{L^d} \right) = \frac{d}{dn} \left(\frac{G}{Y} \right) = 0.$$

Warto też odnotować, że wzrost n zmniejsza wartość wskaźnika inflacji w stanie stacjonarnym:

$$\frac{d}{dn} (\bar{\pi}) = -1.$$

Ze względu na dość skomplikowane wzory określające wartości pochodnych innych zmiennych tj. udziału wynagrodzeń w PKB, udziału konsumpcji prywatnej w PKB, udziału popytu w PKB i stopy zysku z kapitału rzeczowego, nie można jednoznacznie określić wpływu wzrost wydajności pracy na wartości tych zmiennych w stanie stacjonarnym. Niemniej jednak poniżej spróbujemy analitycznie określić ich znak.

Spójrzmy na pochodną udziału wynagrodzeń w PKB względem wydajności pracy:

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{\omega L}{Y} \right) = \frac{1}{(1 - \tau_w)} \left(\frac{(1 + \beta_n \beta_{Nd} - \beta_Z) n^2 + (\beta_n - 2\beta_n \beta_Z - \beta_n \beta_{Nd} - 1) n - \beta_n^2 \beta_{Nd} - \beta_n}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n)^2} - \frac{1}{\bar{u} y^p} \right). \quad (1.2.91)$$

Aby określić znak pochodnej (1.2.91), w pierwszej kolejności sprawdzimy kiedy pochodna ta jest równa zero:

$$(1 + \beta_n \beta_{Nd} - \beta_Z) n^2 + (\beta_n - 2\beta_n \beta_Z - \beta_n \beta_{Nd} - 1) n - \beta_n^2 \beta_{Nd} - \beta_n - \frac{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n)^2}{\bar{u} y^p} = 0 \quad (1.2.92)$$

Równanie (1.2.92) jest równaniem kwadratowym ze względu na zmienną n , które wygodniej jest zapisać w postaci:

$$an^2 + bn + c = 0. \quad (1.2.93)$$

gdzie

$$a = (1 + \beta_n \beta_{Nd} - \beta_Z) \quad (1.2.94)$$

$$b = (\beta_n - 2\beta_n \beta_Z - \beta_n \beta_{Nd} - 1) \quad (1.2.95)$$

$$c = -\beta_n^2 \beta_{Nd} - \beta_n - \frac{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n)^2}{\bar{u}y^p} < 0 \quad (1.2.96)$$

Jeśli założymy, że:

$$a = (1 + \beta_n \beta_{Nd} - \beta_Z) > 0,$$

to wyróżnik trójmianu kwadratowego równania (1.2.93) jest dodatni:

$$\Delta = b^2 - 4ac > 0,$$

a iloczyn pierwiastków tego równania jest ujemny:

$$n_1 n_2 = \frac{c}{a} < 0.$$

Oznacza to, że równanie (1.2.93) ma dwa rozwiązania rzeczywiste, z czego jedno jest dodatnie, a drugie ujemne.

Rozwiązania równania $an^2 + bn + c = 0$ mają postać:

$$n_1, n_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

więc $n_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} < 0$, a zatem $-b < \sqrt{\Delta}$. Oznacza to, że

$$n_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} > \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a} = \frac{-\beta_n + 2\beta_n \beta_Z + \beta_n \beta_{Nd} + 1}{1 + \beta_n \beta_{Nd} - \beta_Z} = \frac{\beta_n (2\beta_Z + \beta_{Nd} - 1) + 1}{1 + \beta_n \beta_{Nd} - \beta_Z},$$

z czego dalej wynika, że jeżeli $2\beta_Z \beta_n > \beta_n - \beta_Z$, to $n_2 > 1$.

Przy założeniu, że $0 < n < 1$ z powyższej analizy wynika, że przy warunkach:

$$\left. \begin{array}{l} 1 + \beta_n \beta_{Nd} - \beta_Z > 0 \\ \beta_n - 2\beta_n \beta_Z - \beta_n \beta_{Nd} - 1 < 0 \\ 2\beta_Z \beta_n > \beta_n - \beta_Z \end{array} \right\} \quad (1.2.97)$$

pochozna (1.2.91) jest ujemna, a w konsekwencji oznacza to, że wzrost n wpływa negatywnie na udział wynagrodzeń w PKB w stanie stacjonarnym. Podobne wnioski, przy powyższych założeniach, płyną z analizy pochodnych:

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{C}{Y} \right) = \frac{(1 + \beta_n \beta_{Nd} - \beta_Z)n^2 + (\beta_n - 2\beta_n \beta_Z - \beta_n \beta_{Nd} - 1)n - \beta_n^2 \beta_{Nd} - \beta_n}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n)^2} - \frac{1}{\bar{u}y^p}$$

$$\frac{d}{dn} \left(\frac{Y^d}{Y} \right) = \frac{(1 + \beta_n \beta_{Nd} - \beta_Z)n^2 + (\beta_n - 2\beta_n \beta_Z - \beta_n \beta_{Nd} - 1)n - \beta_n^2 \beta_{Nd} - \beta_n}{(n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n)^2},$$

Oznacza to, że zwiększenie stopy równomiernego wzrostu (stopy wzrostu wydajności pracy) n wpływa negatywnie także na wartość stosunku Y^d/Y popytu do PKB oraz stosunku C/Y konsumpcji prywatnej do PKB w stanie stacjonarnym.

Wzrost stopy równomiernego wzrostu n (wydajności pracy) prowadzi do wzrostu stopy zysku z kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym. Przedstawia to poniższa analiza pochodnej:

$$\frac{d}{dn}(\bar{\rho}) = -\frac{\tau_w}{(1-\tau_w)} \left(\frac{(1+\beta_n\beta_N n^d - \beta_Z)n^2 + (\beta_n - 2\beta_n\beta_Z - \beta_n\beta_N n^d - 1)n - \beta_n^2\beta_N n^d - \beta_n}{(n+\beta_Z n^2 + \beta_n\beta_N n^d + \beta_n)^2} \right) \bar{u}y^p + \frac{1}{(1-\tau_w)} .$$

Powyższą pochodną możemy zapisać, wykorzystując $\frac{d}{dn}\left(\frac{Y^d}{Y}\right)$:

$$\frac{d}{dn}(\bar{\rho}) = -\frac{\tau_w}{(1-\tau_w)} \frac{d}{dn}\left(\frac{Y^d}{Y}\right) \bar{u}y^p + \frac{1}{(1-\tau_w)} > 0,$$

gdzie $\frac{d}{dn}\left(\frac{Y^d}{Y}\right) < 0$ przy założeniach (1.2.97).

Określenie wpływu n na stosunek długu publicznego do PKB, podobnie jak w przypadku powyższych zmiennych, wymaga przyjęcia kilku założeń. Wynika to z postaci pochodnej:

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{B}{pY}\right) = \frac{-\left(\tau_c \frac{d\bar{\rho}}{dn} + \tau_w \bar{u}y^p \frac{d\bar{u}}{dn}\right)(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c(\bar{\rho} + \bar{\pi})) + (g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{u}y^p)(1 - \tau_c)\left(1 - \frac{d\bar{\rho}}{dn}\right)}{(n - \bar{\rho} + \xi + \tau_c(\bar{\rho} + \bar{\pi}))^2} .$$

Na przykład, jeżeli τ_c oraz τ_w są odpowiednio małe, to:

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{B}{pY}\right) > 0 .$$

Co oznacza, że w sytuacji zwiększenia n i przy niskich podatkach τ_c oraz τ_w rośnie dług publiczny w stosunku do PKB.

3. Zgodnie z równaniem $C = (1 - \tau_w)\omega L^d$ konsumpcja sektora prywatnego równa jest wynagrodzeniom pracowników najemnych opodatkowanym stawką τ_w . Pomimo tego, jak wynika z równań (1.2.70) i (1.2.60), udział tej konsumpcji w PKB nie zależy od stawki τ_w . Z kolei, jak wynika z (1.2.58), stawka podatkowa τ_w wpływa na udział wynagrodzeń przed opodatkowaniem w PKB, chociaż same koszty pracy ωL^d bezpośrednio od τ_w nie zależą.

4. Jak wynika z (1.2.66) stopa zysku z kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym również zależy od stawki podatku od wynagrodzeń τ_w , chociaż stawka ta nie ma bezpośredniego wpływu na wielkość zysku będącą różnicą między wielkością produkcji a kosztami pracy i deprecjacją kapitału rzeczowego. Warte odnotowania jest również to, że na stopę zysku z kapitału rzeczowego mają wpływ parametry reakcji β_n , β_Z i $\beta_N n^d$, od których zależy nadwyżka produkcji ponad oczekiwany popyt.

5. Jedyną zmienną zależną od dwóch stawek podatkowych jest stosunek długu publicznego do PKB:

$$\frac{d}{d\tau_w}\left(\frac{B}{pY}\right) = -\frac{\bar{u}y^p}{(n + \xi - (1 - \tau_c)\bar{\rho} + \bar{\pi}\tau_c)} ,$$

$$\frac{d}{d\tau_c} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{-\bar{\rho}(n-\bar{\rho}+\xi+\tau_c(\bar{\rho}+\bar{\pi}))-(g-\tau_c\bar{\rho}-\tau_w U\bar{u}y^p-\mu\bar{m})(\bar{\rho}+\bar{\pi})}{(n-\bar{\rho}+\xi+\tau_c(\bar{\rho}+\bar{\pi}))^2}.$$

Jeżeli $n + \xi + \bar{\pi}\tau_c < (1 - \tau_c)\bar{\rho}$, to wzrost stawki podatkowej τ_w zwiększy wartość stosunku długu publicznego do PKB w stanie stacjonarnym.

Jeżeli oprócz $n + \xi + \bar{\pi}\tau_c < (1 - \tau_c)\bar{\rho}$ założymy, że $g - \tau_c\bar{\rho} - \tau_w U\bar{u}y^p - \mu\bar{m} < 0$, to wzrost stawki τ_c zwiększa wartość stosunku długu publicznego do PKB w stanie stacjonarnym.

6. Z analizy przedstawionej w tabeli 1.2.1 oraz pochodnych analizowanych zmiennych w stanie stacjonarnym wynika, że wzrost wartości parametru reakcji β_n (reakcja produkcji na odchylenie popytu od podaży zapasów) nie zmienia wartości zmiennych: L/L^d , I/Y , G/Y oraz $\bar{\pi}$. Natomiast wpływ zmiany wartości parametru reakcji β_n na pozostałe badane zmienne (za wyjątkiem zmiennej B/pY) zależy od różnicy wartości parametrów reakcji: $(\beta_Z - \beta_{Nd})$ (β_Z - reakcja produkcji na zmianę oczekiwanego popytu, β_{Nd} - pożądany stosunek zapasów do oczekiwanego popytu). Jeśli różnica ta jest dodatnia/ujemna, to wzrost wartości parametru β_n zwiększa/zmniejsza wartości zmiennych: $\omega L^d/Y$, Y^d/Y , C/Y oraz $\bar{\rho}$ w stanie stacjonarnym. Ze wzoru pochodnej zmiennej B/pY względem parametru β_n trudno ustalić wpływ zmiany wartości tego parametru na wartość tej zmiennej w stanie stacjonarnym.

7. Wzrost wartości parametru reakcji β_Z wpływa negatywnie na wartość udziału płac w PKB w stanie stacjonarnym oraz na stosunek popytu do PKB w stanie stacjonarnym. A pozytywnie wpływa jedynie na zysk z kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym (zob. tabela 1.2.1). Z powodu dość skomplikowanego wzoru pochodnej zmiennej B/pY względem parametru β_Z trudno jednoznacznie ocenić wpływ wartości tego parametru reakcji na wartość tej zmiennej B/pY w stanie stacjonarnym. Taką samą reakcją badanych zmiennych w stanie stacjonarnym powoduje zmiana wartości parametru reakcji β_{Nd} .

W rozdziale czwartym na podstawie danych o gospodarce polskiej empirycznie sprawdzimy wpływ wartości niektórych parametrów reakcji na zmienną B/pY w stanie stacjonarnym, czego nie mogliśmy zrobić analitycznie ze względu na dość skomplikowane wzory pochodnych tej zmiennej w stanie stacjonarnym.

Podsumowanie

W ramach niniejszego rozdziału przedstawiono ulepszoną wersję modelu KMG. Zastosowane modyfikacje równań modelu KMG poprawiły ich interpretację ekonomiczną

co sprawiło, że nowy model w porównaniu z jego starszymi wersjami lepiej opisuje funkcjonowanie gospodarki. Ważnym wynikiem tego rozdziału jest to, że modyfikacje pozwoliły zachować możliwość przekształcenia modelu do postaci intensywnej oraz jednoznaczne wyznaczenie jego stanu stacjonarnego, co jest niezbędne do wykazania stabilności modelu przedstawionej w trzecim rozdziale pracy. W wyniku wprowadzonych modyfikacji pojawiły się nowe sprzężenia zwrotne zwiększając tym samym złożoność modelu co miało swoje pozytywne oraz negatywne konsekwencje w kolejnych etapach badania modelu. Pozytywną konsekwencją jest to, że zwiększona liczba interakcji między zmiennymi lepiej odzwierciedla rzeczywistą gospodarkę a tym samym na podstawie modelu można dokładniej badać jej zachowania. Natomiast negatywną konsekwencją, która ujawnia się podczas analizy modelu w postaci intensywnej, są skomplikowane wzory, których analiza matematyczna jest bardzo trudno lub niemożliwa. Dopiero analiza empiryczna pozwala ocenić niektóre własności modelu. Analiza empiryczna została przedstawiona w rozdziale czwartym pracy. Modyfikacje wpłynęły także na wartości zmiennych w stanie stacjonarnym modelu w postaci intensywnej. W porównaniu z poprzednimi wersjami modelu KMG we wzorach opisujących stan stacjonarny pojawia się równanie określające nominalną stopę procentową w stanie stacjonarnym zależną od parametrów modelu. W starszych modelach KMG stopa ta w stanie stacjonarnym jest zmienną egzogeniczną. Jak zobaczymy w rozdziale trzecim, modyfikacja modelu polegająca na wprowadzeniu stawek podatkowych (których w ogóle nie było we wcześniejszych wersjach modelu KMG) otwiera możliwości badania nie tylko stanu stacjonarnego modelu od wysokości stawek podatkowych, ale także możliwości badania wpływu tych stawek na stabilność modelowanej gospodarki.

Rozdział 2

Model typu Keynesa – Metzlera - Goodwina z regułą Taylora i kredytem inwestycyjnym

W ramach tego rozdziału przedstawimy drugą wersję modelu KMG. Większość równań tej wersji modelu jest identyczna z równaniami modelu z rozdziału pierwszego. W szczególności zachowujemy niemal wszystkie modyfikacje oryginalnych równań modelu KMG opisane w poprzednim rozdziale. Niemniej, model prezentowany poniżej różni się istotnie od modelu z rozdziału pierwszego. Zasadnicza różnica dotyczy opisu funkcjonowania rynku pieniężnego, a w szczególności założeń o czynnikach wpływających na kształtowanie się stopy procentowej. W modelu prezentowanym w tym rozdziale stopa procentowa kształtuje się zgodnie z tzw. regułą Taylora. Z tego względu analizowany model nazywać będziemy modelem KMGT.

Druga istotna różnica polega na wprowadzeniu do modelu KMG kredytu inwestycyjnego, co umożliwi pokazanie jakim zakresie inwestycje sektora prywatnego finansowane są z jego zysków po opodatkowaniu, a w jakim z kredytu (w modelu z rozdziału pierwszego wyprowadzona była jedynie równość inwestycji i oszczędności krajowych, która ma charakter tożsamości zachodzącej ex post).

Zarówno wprowadzenie do modelu KMG reguły Taylora jak i kredytu inwestycyjnego nie jest oryginalnym pomysłem autora²⁷. Nowością jest natomiast to, że obecnie reguła Taylora oraz kredyt inwestycyjny zostały wkomponowane do nowego, zmodyfikowanego modelu KMG zaprezentowanego w rozdziale pierwszym, co ma swoje poważne konsekwencje.

W rozprawie w odniesieniu do modelu KMGT podejmowane będą te same zagadnienia badawcze co w przypadku modelu KMG z rozdziału pierwszego. Zbadamy, czy nowy model KMGT można sprowadzić do postaci intensywnej, czy istnieje jego stan stacjonarny i czy można udowodnić jego lokalną, asymptotyczną stabilność. Na koniec oba modele zostaną przetestowane empirycznie na podstawie danych o gospodarce polskiej.

²⁷ Model KMG z regułą Taylora prezentowany jest w Asada i in. (2003, rozdział 6) oraz Chiarella i in. (2005, rozdział 9). Model KMG z kredytem inwestycyjnym znaleźć można m.in. w Charpe i in. (2011, rozdział 4).

2.1. Reguła Taylora, kredyt inwestycyjny i ogólne zadłużenie netto w modelu KMG

W modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza z rozdziału pierwszego podaż pieniądza (ilość pieniądza w obiegu) rośnie wykładniczo ze stopą μ . Aby było to możliwe, identycznie musi rosnać popyt na pieniądź zależny od wielkości oczekiwanego popytu i stopy procentowej (zob. rozdz. 1, pkt. 1.1.4). To z kolei wymaga odpowiedniego kształtowania stopy procentowej bądź to w wyniku bezpośrednich zmian stopy procentowej banku centralnego bądź też poprzez odpowiednie operacje otwartego rynku. W każdym z tych przypadków wysokość stopy procentowej jest podporządkowana celowi, jakim jest kontrola ilości pieniądza w obiegu. Kierunek przyczynowo – skutkowy tej sytuacji możemy zapisać jako:

$$M \rightarrow r.$$

Takie postrzeganie funkcjonowania rynku pieniężnego, choć ciągle obecne w podręcznikach makroekonomii, staje się coraz bardziej odległe od rzeczywistości. Obecnie większość banków centralnych nie zwraca już wielkiej uwagi na agregaty monetarne typu M1 czy M2 i w swojej polityce pieniężnej skupia się bezpośrednio na stopie procentowej, przyjmując różne reguły jej kształtowania (zob. Chiarella (2005, rozdział 8) i Taylor (2015)). W rezultacie zależność przyczynowo – skutkowa w polityce pieniężnej ulega odwróceniu – celem staje się stopa procentowa, a skutkiem podaż pieniądza (ilość pieniądza w obiegu):

$$r \rightarrow M.$$

Najczęściej omawianą w literaturze regułą kształtowania stopy procentowej jest reguła Taylora, której autorem jest profesor Uniwersytetu Stanforda John B. Taylor²⁸. Reguła Taylora jest jednym z narzędzi prowadzenia polityki pieniężnej wykorzystywanych przez współczesne banki centralne²⁹. Regule tej poświęcamy punkt 2.1.1.

2.1.1. Reguła Taylora kształtowania stopy procentowej

W swojej regule Taylor uzależnił wysokość krótkookresowej, nominalnej stopy procentowej od odchylenia inflacji od docelowego poziomu inflacji (celu inflacyjnego banku

²⁸ Po raz pierwszy reguła Taylora została przedstawiona w pracy Taylora (1993), s.195-214.

²⁹ Inne sposoby określania wysokości nominalnej stopy procentowej oparte na regułach to m.in.: klasyczna reguła Friedmana dla bazy monetarnej, reguła oparta wyłącznie na stopie inflacji, reguła luki bezrobocia, reguła Calvo (więcej zob. Przybylska-Mazur (2013)).

centralnego) oraz od procentowego odchylenia PKB od jego poziomu potencjalnego (od tzw. luki produkcyjnej). Równanie opisujące tę zależność ma postać:

$$r = \bar{R} + \alpha_1(\hat{p}^{(4)} - \bar{\pi})\hat{p}^{(4)} + \alpha_2\tilde{y}, \quad (2.1.1)$$

gdzie r to nominalna stopa procentowa banku centralnego (np. stopa referencyjna lub redyskontowa), \bar{R} - długookresowa realna stopa procentowa, $\hat{p}^{(4)}$ - poziom inflacji w poprzednich czterech kwartałach mierzony deflatorem PKB ³⁰, $\bar{\pi}$ - pożądany poziom wskaźnika inflacji (cel inflacyjny). Symbol \tilde{y} oznacza lukę produkcyjną (nazywana także: luką popytową lub dochodową) opisana równaniem:

$$\tilde{y} = \frac{Y - Y^p}{Y} \cdot 100\%,$$

gdzie Y to rzeczywisty, aktualny poziom produkcji, a Y^p - poziom potencjalny. Symbole α_1, α_2 to dodatnie współczynniki reakcji stopy procentowej na wartości zmiennych $\hat{p}^{(4)}$ - $\bar{\pi}$ i \tilde{y} .

Z reguły Taylora (2.1.1) wynika zalecenie stosowania przez władze monetarne bardziej restrykcyjnej polityki pieniężnej, czyli podwyższenie stopy procentowej w sytuacji, gdy inflacja $\hat{p}^{(4)}$ przewyższa cel inflacyjny $\bar{\pi}$. Jeśli inflacja $\hat{p}^{(4)}$ jest poniżej celu inflacyjnego, to wskazane jest obniżenie stopy procentowej, a więc rozluźnienie polityki pieniężnej. Równocześnie, gdy wzrost gospodarczy jest słaby lub gospodarka doświadcza recesji (ujemna wartość luki produkcyjnej \tilde{y}), bank centralny powinien obniżyć stopę procentową aby stymulować wzrost gospodarczy. Gdy poziom produkcji jest wyższy od potencjalnego (dodatnia wartość luki produkcyjnej \tilde{y}) i mamy do czynienia z tak zwanym przegrzaniem koniunktury prowadzącym do wzrostu cen, bank centralny powinien podnosić stopę procentową, aby ograniczać popyt i tym samym inflację ³¹.

³⁰ Deflator PKB to stosunek nominalnego PKB (w cenach bieżących) do realnego PKB (w cenach stałych, z pewnego roku bazowego). Wskaźnik inflacji liczony na podstawie deflatora to stopa wzrostu tego deflatora.

³¹ Banki centralne przy stosowaniu reguły Taylora natrafiają na problemy, ponieważ nie znają dokładnej realnej stopy równowagi, a pomiary poziomów wzrostu gospodarczego i inflacji obarczone są błędami. Należy pamiętać, że modele ekonometryczne stanowią tylko uproszczone opisy rzeczywistości. Dlatego też przyjmuje się, że reguła Taylora nie może być mechaniczną formą prowadzenia polityki pieniężnej, ale powinna stanowić punkt odniesienia dla podejmowania decyzji przez banki centralne. W praktyce wiele banków centralnych stosuje regułę Taylora do ustalania poziomu stóp procentowych, lecz żaden nie przyjął jej oficjalnie jako narzędzia służącego do tego celu (Wojtyła (2004)).

Stosując bezpośrednio regułę Taylora w takiej formie jak określona równaniem (2.1.1), władze monetarne narażają gospodarkę na gwałtowne zmiany nominalnej stopy procentowej spowodowane szokami gospodarczymi (np. w wyniku gwałtownej zmiany inflacji \hat{p} lub załamania produkcji wynikająca z (2.1.1) duża, skokowa zmiana stopy procentowej mogłaby okazać się szkodliwa dla gospodarki. Z tego względu lepsza wydaje się propozycja, aby zmiany stopy procentowej wynikające z określonej sytuacji gospodarczej były rozłożone w czasie i dzięki temu bardziej wygładzone. Taka właśnie zmodyfikowana reguła Taylora została zaproponowana w Chiarella i in. (2005, rozdział 9, s. 378). Regułę tę opisuje równanie różniczkowe

$$\dot{r} = -\beta_{i_r}(r - \bar{r}) + \beta_{i_p}(\hat{p} - \bar{\pi}) + \beta_{i_u}(u - \bar{u}), \quad (2.1.2)$$

gdzie:

$r - \bar{r}$ - odchylenie bieżącej nominalnej stopy procentowej r od jej pożądanej wysokości \bar{r} ,
 $\hat{p} - \bar{\pi}$ - odchylenie wskaźnika bieżącej inflacji (stopy wzrostu cen) \hat{p} od wskaźnika pożądanej inflacji $\bar{\pi}$ (celu inflacyjnego),

$u - \bar{u}$ - odchylenie wskaźnika bieżącego wykorzystania zdolności produkcyjnych u od jego normalnego (pożądanego) poziomu \bar{u} ,

$\beta_{i_r}, \beta_{i_p}, \beta_{i_u}$ - dodatnie współczynniki pokazujące siłę wpływu odchyłeń $r - \bar{r}, \hat{p} - \bar{\pi}, u - \bar{u}$ na zmianę stopy procentowej, wyrażoną pochodną $\dot{r} = dr/dt$.

Warto podkreślić, że w sytuacji, gdy znany jest pożądany poziom inflacji $\bar{\pi}$, ustalenie pożądanej nominalnej stopy procentowej \bar{r} jest równoznaczne z ustaleniem pożądanej realnej stopy procentowej \bar{R} , gdyż $\bar{R} = \bar{r} - \bar{\pi}$ ³².

Z reguły Taylora postaci (2.1.2) wynikają praktycznie te same wnioski dla polityki pieniężnej banku centralnego co z reguły (2.1.1). Po pierwsze, bank centralny powinien dążyć do utrzymywania nominalnej stopy procentowej na poziomie zbliżonym do pożądanej nominalnej stopy procentowej \bar{r} , co przy równoczesnym dążeniu do utrzymywania inflacji w otoczeniu celu inflacyjnego $\bar{\pi}$, oznacza dążenie do stabilizowania

³² Stopę procentową \bar{R} można też określić mianem naturalnej stopy procentowej. Koncepcja takiej stopy pochodzi od Knuta Wicksella (1936), który za naturalną stopę procentową uznał realną stopę procentową, przy której inwestycje równe są oszczędnościom, a system znajduje się w równowadze rozumianej jako stabilność pieniądza (więcej na temat naturalnej stopy procentowej zob. np. w Winek i Robak (2003) oraz Brzoza-Brzezina (2003).)

realnej stopy procentowej wokół ustalonej, realnej stopy procentowej $\bar{R} = \bar{r} - \bar{\pi}$. Zgodnie z (2.1.2) oznacza to tendencję do obniżania stopy procentowej gdy $r > \bar{r}$ i jej podwyższania gdy $\hat{p} > \bar{\pi}$. Dodatkowo, celem banku centralnego powinna być również troska o stabilizowanie cyklu koniunkturalnego, wyrażająca się tendencją do podwyższania stopy procentowej i ograniczania popytu w przypadku nadmiernego wykorzystania zdolności produkcyjnych ($u > \bar{u}$) i obniżania stopy procentowej w przeciwnym przypadku.

Opisana powyżej reguła Taylora (2.1.2) kształtowania stopy procentowej zostanie dodana do równań analizowanego w dalszej części tego rozdziału nowego modelu KMG. Równocześnie wycofane zostaną przyjmowane w rozdziale pierwszym założenia o wykładniczym wzroście podaży pieniądza, nieliniowej funkcji popytu na pieniądź i stopie procentowej zapewniającej równowagę rynku pieniężnego (innymi słowy, przestają obowiązywać wszystkie równania z punktu 1.1.4 z rozdziału pierwszego).

2.1.2. Kredyt inwestycyjny, emisja obligacji i ogólne zadłużenie netto

W modelu KMG prezentowanym w pierwszym rozdziale pracy podaż pieniądza M (czyli ilość pieniądza w obiegu) jest zmienną potrzebną jedynie do modelowania dynamiki stopy procentowej, która to stopa wpływa na decyzje inwestycyjne sektora prywatnego. Stopa wzrostu podaży pieniądza wpływa ponadto na oczekiwania inflacyjne, które z kolei oddziałują na rzeczywistą inflację. W modelu brakuje natomiast równań wiążących bezpośrednio zmienną M lub jej przyrosty z dochodami do dyspozycji sektora prywatnego i jego popytem na dobra i usługi. Brak takich powiązań jest typowy nie tylko dla modelu KMG, ale jest cechą zdecydowanej większości modeli makroekonomicznych. Trudności związane z bardziej ścisłym powiązaniem podaży pieniądza z dochodami do dyspozycji sektora prywatnego i jego popytem mają swoje przyczyny zarówno w wymiarze koncepcyjnym jak też empirycznym. Dlatego też coraz częściej w monetarnych modelach makroekonomicznych znika kategoria podaży pieniądza, a pojawiają się kredyty udzielane gospodarstwom domowym

lub przedsiębiorstwom, które łatwo powiązać z ich dochodami do dyspozycji³³. Oczywiście udzielone kredyty wpływają na ilość pieniądza w obiegu, ale niekoniecznie muszą być z nią utożsamiane. Warto też dodać, że rezygnacja z rozpatrywania podaży pieniądza jest też

³³ Interesujący przykład modelu z kredytem konsumpcyjnym pracowników najemnych znaleźć można w Chiarella i in. (2014, rozdział 2)

ściśle powiązana z rezygnacją z modelowania stopy procentowej jako zmiennej równoważącej rynek pieniądza i wprowadzaniem w to miejsce innych reguł kształtowania stopy procentowej, takich jak reguła Taylora.

Wzorując się na modelu KMG z Charpe i in. (2011, rozdział 4) w prezentowanym w tym rozdziale modelu KMGT wprowadzamy nową zmienną Λ oznaczającą zadłużenie sektora prywatnego w sektorze bankowym z tytułu zaciągniętych kredytów. Pochodną $\dot{\Lambda}$ interpretujemy jako zmianę zadłużenia, równą saldu kredytów zaciągniętych i spłaconych przez ten sektor w danym okresie (momencie).

Inaczej niż w modelu KMG z rozdziału pierwszego, zakładamy, że obligacje rządowych nie kupuje sektor prywatny (niefinansowy) lecz banki, co oznacza, że banki kupując obligacje udzielają rządowi pożyczkę na sfinansowanie deficytu budżetowego. Podobnie jak w rozdziale pierwszym symbolem B oznaczamy dług publiczny (tym razem zadłużenie rządu w sektorze bankowym, a nie w sektorze prywatnym), a symbolem \dot{B} pochodną przedstawiającą zmianę długu publicznego (równą różnicy między wartością nowych obligacji wyemitowanych przez rząd i kupionych przez banki, a wartością starych obligacji wykupionych przez rząd).

Dla uproszczenia zakładamy jednakowe oprocentowanie obligacji i kredytów inwestycyjnych dla przedsiębiorstw, równe stopie procentowej kształtowanej zgodnie z regułą Taylora (2.1.2). Odsetki płacone przez sektor prywatny i rządowy wynoszą zatem odpowiednio $r\Lambda$ i rB . Działalność sektora bankowego (finansowego) ilustruje rys. 2.2.1



Rysunek 2.1.1. Schemat udzielania kredytów w modelu KMGT z kredytem inwestycyjnym

Źródło: opracowanie własne.

Wielkość pożyczek zaciąganych przez państwo w wyniku sprzedaży obligacji jest równa wielkości deficytu budżetowego, czyli

$$\dot{B} = pG + rB - pT. \quad (2.1.3)$$

Przy założeniu, że całość zysków sektora prywatnego po opodatkowaniu jest przeznaczana na inwestycje, wielkość kredytu inwestycyjnego spełnia równanie

$$\dot{\Lambda} = p(I - (1 - \tau_c)\rho K), \quad (2.1.4)$$

gdzie I oznacza nakłady inwestycyjne w ujęciu realnym, a $(1 - \tau_c)\rho K$ – zysk sektora prywatnego po opodatkowaniu w ujęciu realnym. Symbol ρ oznacza stopę zysku z kapitału rzeczowego, równą

$$\rho = \left(Y^d - \omega L^d - \delta K - \frac{r\Lambda}{p} \right) / K \quad (2.1.5)$$

Podobnie jak poprzednio, w prezentowanym dalej modelu KMGTT decyzja o wysokości nakładów inwestycyjnych zależy od wielu czynników i jest opisana następującym równaniem behawioralnym

$$I = i_1(\rho^e - \rho^o)K + i_2(u - \bar{u})K + i_3(\lambda^0 - \lambda)K + \hat{Y}^e K + \delta K. \quad (2.1.6)$$

Równanie (2.1.6) różni się od analogicznego równania z rozdziału pierwszego (zob. punkt 1.1.2) pod czterema względami. Pierwsza, najważniejsza różnica jest taka, że przedsiębiorcy decydując o wielkości inwestycji biorą pod uwagę aktualną wielkość swojego zadłużenia w stosunku do wartości kapitału, opisaną zmienną $\lambda = \Lambda/pK$ i porównują ją z naturalną wartością tego wskaźnika λ^0 , uważaną za bezpieczną. Jeżeli $\lambda > \lambda^0$, to jest powód skłaniający do ograniczania inwestycji. Po drugie, na wielkość inwestycji ma wpływ różnica między oczekiwaną stopą zysku z kapitału ρ^e a stopą zysku uważaną za normalną, oznaczoną symbolem ρ^o (poprzednio stopa zysku ρ^e była porównywana ze zmieniającą się w czasie realną stopą procentową). Trzecia różnica dotyczy tego, że obecnie (podobnie jak w (2.1.6)) oczekiwana stopa zysku zależy także od wysokości odsetek płaconych bankowi. Czwarta, najmniej istotna różnica, polega na pominięciu obecnego w poprzednim modelu parametru ξ przedstawiającego stałą w czasie premię za ryzyko związane z inwestowaniem w sferze realnej w porównaniu z zakupem obligacji rządowych.

Różnica

$$\dot{\Lambda} - r\Lambda \quad (2.1.7)$$

³⁴ Zysk z kapitału rzeczowego w liczniku ułamka (2.1.6) jest pomniejszany o spłatę odsetek od kredytu w ujęciu realnym $\frac{r\Lambda}{p}$, której nie ma w definicji analogicznego zysku w modelu z rozdziału pierwszego. Z drugiej strony, dochody kapitałowe sektora prywatnego w rozdziale pierwszym oprócz zysku z kapitału rzeczowego obejmują także dochód z odsetek od obligacji rządowych (W modelu z rozdziału pierwszego obligacje rządowe nie są kupowane przez banki lecz przez sektor prywatny (niefinansowy).)

przedstawia zmianę zasobów pieniężnych sektora prywatnego, równą różnicy między kredytami zaciągniętymi przez ten sektor w danym momencie (okresie) i kredytami spłaconymi wraz z odsetkami (zob. schemat 2.1.1).

Zapiszmy równanie $\dot{B} = pG + rB - pT$ w postaci

$$\dot{B} - rB = pG - pT. \quad (2.1.8)$$

Dodatnia różnica $\dot{B} - rB = pG - pT$ przedstawia przyrost zasobów pieniężnych sektora prywatnego wynikający z nadwyżki dochodów ze sprzedaży rządowi dóbr i usług nad zapłaconymi podatkami. Ujemna różnica przedstawia spadek takich zasobów.

Z powyższych spostrzeżeń wynika, że zmienna

$$\dot{M} = \dot{\Lambda} + \dot{B} - r(\Lambda + B) \quad (2.1.9)$$

przedstawia całkowity przyrost (lub spadek) zasobów pieniężnych sektora prywatnego w danym momencie (okresie). Przyrost ten jest równocześnie łącznym przyrostem zadłużenia obu sektorów, pomniejszonym o spłatę odsetek.

Zapiszmy zmienną \dot{M} z indeksem czasu: $\dot{M} = \dot{M}(t)$. Wówczas

$$\int_0^t \dot{M}(\tau) d\tau = M(t) - M(0). \quad (2.1.10)$$

Dodatnia wartość zmiennej $M = M(t)$ przedstawia zasób pieniężny sektora prywatnego w momencie t , równy całkowitemu zadłużeniu obu sektorów (prywatnego i rządowego) pomniejszonemu o wszystkie spłacone odsetki. Zmienną tę nazwiemy ogólnym zadłużeniem netto. W podpunkcie 2.2.4 tego rozdziału pokażemy, że na ścieżce równomiernego wzrostu wartość tego zadłużenia wynosi zero:

$$\bar{M} = 0 \quad (2.1.11)$$

Wynik powyższy jest oryginalnym rezultatem autora pokazującym, że wzrost gospodarki na ścieżce równomiernego wzrostu nie jest możliwy w warunkach ogólnego zadłużenia netto całej gospodarki (które nigdy nie zostaje spłacone). Wniosek ten wydaje się podobny do znanego z modeli optymalnego wzrostu typu Ramsay'a warunku znanego pod nazwą *no Ponzi game condition* (zob. np. Acemoglu (2009), str. 290). Warto dodać, że warunek $\bar{M} = 0$ można też wyprowadzić dla modelu KMG analizowanego w Charpe (2011, rozdział

³⁵ Do wyniku tego dochodzimy pokazując najpierw, że w stanie stacjonarnym zerowe jest ogólne zadłużenie netto na jednostkę kapitału w ujęciu nominalnym $\bar{m} = \frac{\bar{M}}{\bar{p}\bar{K}} = 0$, skąd, z uwagi na to, że $\bar{p}\bar{K} > 0$ wynika, że $\bar{M} = 0$ (zob. punkt 2.2.4, wzór (2.2.83b)).

4). Autorzy powyższej pracy jednak tego nie zauważyli. Problem wymaga z pewnością dalszych analiz w przyszłości.

2.2. Model KMGIT i jego stan stacjonarny

2.2.1. Kompletny układ równań modelu KMGIT z kredytem inwestycyjnym

Przedstawione w poprzednim punkcie nowe zmienne i nowe zależności są tymi, które odróżniają prezentowany poniżej model KMGIT od modelu KMG z poprzedniego rozdziału.

Pełne zestawienie równań modelu KMGIT przedstawia tabela 2.2.1.

Tabela 2.2.1. Model KMGIT z kredytem inwestycyjnym

DETERMINANTY POPYTU		
Lp.	Nazwa zmiennej	Równanie
1.	Popyt na produkt	$Y^d = C + I + G$
2.	Konsumpcja sektora prywatnego	$C = (1 - \tau_w)\omega L^d$
3.	Popyt na pracę	$L^d = Y/x$
4.	Stopa wzrostu wydajności pracy	$\hat{x} = n$
5.	Płaca realna i stopa wzrostu płacy realnej	$\omega = p, \hat{\omega} = \hat{w} - \hat{p}$
6.	Stopa wzrostu płac nominalnych	$\hat{w} = \beta_w(V - \bar{V}) + \kappa_w \hat{p} + (1 - \kappa_w)\pi^e + n$
7.	Stopa wzrostu cen	$\hat{p} = \beta_p(u - \bar{u}) + \kappa_p(\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p)\pi^e$
8.	Przyrost oczekiwanej stopy inflacji	$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e}(\alpha \hat{p} + (1 - \alpha)\bar{\pi} - \pi^e)$
9.	Stopa zatrudnienia	$V = \frac{L^d}{L}$, gdzie L – podaź pracy
10.	Wskaźnik wykorzystania potencjału produkcyjnego	$u = Y/Y^p$
11.	Produkcja potencjalna	$Y^p = y^p K$
12.	Przyrost kapitału rzeczowego	$\dot{K} = i_1(\rho^e - \rho^o)K + i_2(\bar{u} - u)K + i_3(\lambda^0 - \lambda)K + \hat{Y}^e K$
13.	Oczekiwana realna stopa zysku z kapitału rzeczowego Rzeczywista realna stopa zysku z kapitału rzeczowego	$\rho^e = \left(Y^e - \omega L^d - \delta K - \frac{r\Delta}{p} \right) / K$ $\rho = \left(Y^d - \omega L^d - \delta K - \frac{r\Delta}{p} \right) / K$
14.	Stopa wzrostu oczekiwanej sprzedaży	$\hat{Y}^e = \hat{\omega} + \beta_{y^e} \frac{Y^d - Y^e}{Y^e}$
15.	Popyt inwestycyjny	$I = \dot{K} + \delta K$
PRODUKCJA I ZAPASY		
16.	Produkcja	$Y = Y^e + \beta_z \hat{Y}^e + \beta_n(N^d - N)$
17.	Produkcja przeznaczona na zapasy	$Z = \beta_z \hat{Y}^e + \beta_n(N^d - N)$

18.	Pożądany poziom zapasów	$N^d = \beta_{N^d} Y^e$
19.	Zmiana rzeczywistego poziomu zapasów	$\dot{N} = Y - Y^d$
RYNEK PIENIĄDZA		
20.	Przyrost ogólnego zadłużenia netto	$\dot{M} = \dot{\Lambda} + \dot{B} - r(\Lambda + B)$
21.	Przyrost nominalnej stopy procentowej	$\dot{r} = -\beta_{i_r}(r - r^o) + \beta_{i_p}(\hat{p} - \bar{\pi}) + \beta_{i_u}(u - \bar{u})$.
BUDŻET PAŃSTWA		
22.	Podatki	$T = \tau_w \omega L^d + \tau_c \rho K$
23.	Popyt sektora rządowego	$G = gK$
24.	Deficyt budżetowy	$\dot{B} = pG + rB - pT$

Źródło: opracowanie własne.

2.2.2. Równość inwestycji i oszczędności

Podobnie jak w modelu KMG z rozdziału pierwszego (zob. (1.1.8)), równanie modelu KMGT z kredytem inwestycyjnym (2.1.6) opisuje jedynie, jakie czynniki wpływają na popyt inwestycyjny. Natomiast źródłem ich finansowania są oszczędności krajowe S . Na oszczędności krajowe składają się oszczędności sektora prywatnego S_p , sektora rządowego S_g oraz sektora finansowego S_b :

$$S = S_p + S_g + S_b. \quad (2.2.1)$$

W modelu KMGT zakładamy, że pracownicy najemni nie oszczędzają, a właściciele kapitału rzeczowego z kolei nie konsumują (podobnie jak w modelu KMG). Przyjmujemy zatem, że przedsiębiorcy całość opodatkowanych dochodów z kapitału rzeczowego przeznaczają na oszczędności. Możemy zatem zapisać, że realne oszczędności sektora prywatnego S_p wyraża równanie:

$$S_p = (1 - \tau_c)\rho K. \quad (2.2.2)$$

Kolejne źródło finansowania inwestycji krajowych stanowią oszczędności sektora publicznego S_g , które są różnicą między wpływami do budżetu z podatków T a jego wydatkami związanymi z konsumpcją publiczną i odsetkami z obligacji $G + \frac{rB}{p}$. A więc realne oszczędności sektora publicznego są równe:

$$S_g = T - \left(G + \frac{rB}{p}\right). \quad (2.2.3)$$

Trzecie źródło finansowania inwestycji stanowią oszczędności sektora bankowego S_b . Definiujemy je jako realną wartość wpływów z odsetek z obligacji i kredytów inwestycyjnych:

$$S_b = r \frac{B}{p} + r \frac{A}{p}. \quad (2.2.4)$$

Podsumowując, realne oszczędności całej gospodarki S są równe:

$$S = S_p + S_g + S_b.$$

W wyniku kolejnych podstawień można pokazać, że realne inwestycje netto równe są realnym oszczędnościom krajowym, czyli:

$$\dot{K} = S. \quad (2.2.5)$$

Wyprowadzenie równania (2.2.5)

Podstawiając do (2.2.1) równania (2.2.2), (2.2.3) oraz (2.2.4), otrzymujemy:

$$S = \rho K - \tau_c \rho K + T - \left(G + \frac{r^B}{p} \right) + r \frac{B}{p} + r \frac{A}{p}. \quad (2.2.6)$$

Następnie podstawiamy do (2.2.6) kolejno równanie $\rho K = Y^d - \omega L^d - \delta K - r \frac{A}{p}$:

$$S = Y^d - \omega L^d - \delta K - r \frac{A}{p} - \tau_c \rho K + T - \left(G + \frac{r^B}{p} \right) + r \frac{B}{p} + r \frac{A}{p}$$

oraz $Y^d = C + I + G + \delta K$:

$$S = C + I + G + \delta K - \omega L^d - \delta K - r \frac{A}{p} - \tau_c \rho K + T - \left(G + \frac{r^B}{p} \right) + r \frac{B}{p} + r \frac{A}{p}$$

i $C = (1 - \tau_w)\omega L^d$, $T = \tau_w \omega L^d + \tau_c \rho K$ otrzymując:

$$S = (1 - \tau_w)\omega L^d + I + G + \delta K - \omega L^d - \delta K - r \frac{A}{p} - \tau_c \rho K + \\ + \tau_w \omega L^d + \tau_c \rho K - \left(G + \frac{r^B}{p} \right) + r \frac{B}{p} + r \frac{A}{p}.$$

Po redukcji wyrazów podobnych ostatecznie mamy:

$$S = \dot{K}. \quad (2.2.7)$$

2.2.3. Model KMGT w postaci intensywnej

W tym podrozdziale przedstawimy model KMGT w postaci intensywnej. Aby to zrobić, musimy najpierw zdefiniować zmienne przedstawiające proporcje między zmiennymi wyjściowymi modelu.

Definiujemy zatem następujące zmienne modelu KMGT w postaci intensywnej:

- płace realne w stosunku do wydajności pracy lub inaczej udział płac w PKB $U = \frac{\omega}{x}$,
- pracochłonność pełnego zatrudnienia (stosunek efektywnej pracy do kapitału rzeczowego) $l = \frac{xL}{K}$,
- ogólne zadłużenie netto $m = \frac{M}{pK}$,

- oczekiwana sprzedaż na jednostkę kapitału rzeczowego $y^e = \frac{y^e}{K}$,
- wielkość zapasów na jednostkę kapitału rzeczowego $v = \frac{N}{K}$,
- stosunek podaży obligacji do wielkości kapitału rzeczowego $b = \frac{B}{pK}$.
- stosunek zadłużenia do nominalnej wartości kapitału rzeczowego $\lambda = \frac{\Lambda}{pK}$.

Wyprowadzenie równań modelu w postaci intensywnej

Pierwszym równaniem modelu KMGT z kredytem inwestycyjnym w postaci intensywnej jest równanie opisujące stopę wzrostu stosunku płac realnych do wydajności pracy \hat{U} (stosunek wynagrodzeń do PKB). Aby wyznaczyć stopę wzrostu \hat{U} , skorzystamy z wcześniej zdefiniowanych równań opisujących rzeczywistą stopę inflacji \hat{p} oraz stopę wzrostu płac nominalnych \hat{w} :

$$\hat{p} = \beta_p(u - \bar{u}) + \kappa_p(\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p)\pi^e, \quad (2.3.1)$$

$$\hat{w} = \beta_w(V - \bar{V}) + \kappa_w\hat{p} + (1 - \kappa_w)\pi^e + n. \quad (2.3.2)$$

Równania (2.3.1) i (2.3.2) możemy zapisać równoważnie następująco:

$$\hat{p} = \kappa \left(\kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \beta_p \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + \pi^e, \quad (2.3.3)$$

$$\hat{w} = \kappa \left(\beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \kappa_w \beta_p \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + \pi^e + n, \quad (2.3.4)$$

gdzie $\kappa = \frac{1}{1 - \kappa_w \kappa_p}$. Wykorzystując definicję zmiennej przedstawiającą płace realne w stosunku do wydajności pracy $U = \frac{\omega}{x}$ możemy wyznaczyć jej stopę wzrostu:

$$\hat{U} = \hat{w} - \hat{p} - \hat{x}. \quad (2.3.5)$$

Podstawiając do (2.3.5) równanie (2.3.4) i (2.3.3) oraz stopę wzrostu wydajności pracy $\hat{x} = n$, otrzymujemy pierwsze równanie modelu w postaci intensywnej:

$$\hat{U} = \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p (1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) \quad (2.3.6)$$

gdzie $\kappa = \frac{1}{1 - \kappa_w \kappa_p}$, $\kappa_w \kappa_p \neq 1$.

Drugim równaniem modelu jest równanie opisujące stopę wzrostu pracochłonności pełnego zatrudnienia ($l = \frac{xL}{K}$), co zapisujemy jako:

$$\hat{l} = \hat{x} + \hat{L} - \hat{K}. \quad (2.3.7)$$

Dzieląc obustronnie równanie opisujące przyrost kapitału rzeczowego (zob. równanie (2.2.5)):

$$\dot{K} = i_1(\rho^e - \rho^o)K + i_2\left(\frac{y}{y^p} - \bar{u}\right)K + \hat{Y}^e K$$

przez kapitał rzeczowy K , dostajemy równanie opisujące stopę wzrostu kapitału rzeczowego:

$$\hat{K} = i_1(\rho^e - \rho^o) + i_2\left(\frac{y}{y^p} - \bar{u}\right) + i_3(\bar{\lambda} - \lambda) + \hat{Y}^e, \quad (2.3.8)$$

gdzie $\hat{Y}^e = \hat{\omega} + \beta_{Y^e} \frac{Y^d - Y^e}{Y^e}$ oraz $\rho^e = y^e - Uy - \delta - r\lambda$.

Podstawiając do (2.3.7) stopę wzrostu podaży pracy $\hat{L} = 0$, stopę wzrostu wydajności pracy $\hat{x} = n$, oraz (2.3.8), otrzymujemy trzecie równanie modelu w postaci intensywnej:

$$\begin{aligned} \hat{l} = & -i_1(\rho^e - \rho^o) - i_2\left(\frac{y}{y^p} - \bar{u}\right) - i_3(\lambda^0 - \lambda) - \\ & -\kappa\left(\beta_w(1 - \kappa_p)\left(\frac{y}{l} - \bar{V}\right) - \beta_p(1 - \kappa_w)\left(\frac{y}{y^p} - \bar{u}\right)\right) - \beta_{Y^e}\left(\frac{Y^d}{Y^e} - 1\right). \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Trzecie równanie modelu KMGTT w postaci intensywnej opisuje dynamikę ogólnego zadłużenia netto na jednostkę kapitału w ujęciu nominalnym $m = \frac{M}{pK}$. Aby je wyprowadzić

korzystamy z (2.1.9) otrzymując

$$\begin{aligned} \dot{m} = \frac{\dot{M}pK - M(\dot{p}K)}{(pK)^2} = \frac{\dot{M}}{pK} - m \frac{(\dot{p}K)}{pK} = \frac{\dot{\Lambda} + \dot{B} - r(\Lambda + B)}{pK} - m(\hat{p} + \hat{K}) = \\ = \frac{\dot{\Lambda} + \dot{B} - r(\Lambda + B)}{pK} - m(\hat{p} + \hat{K}). \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

Następnie do (2.3.10) podstawiamy (2.1.4) oraz (2.1.5):

$$\begin{aligned} = \frac{pI - p(1 - \tau_c)\rho K + pG + rB - pT - r(\Lambda + B)}{pK} - m(\hat{p} + \hat{K}) = \\ = \frac{I}{K} - (1 - \tau_c)\rho + g + rb - \frac{T}{K} - r(\lambda + b) - m(\hat{p} + \hat{K}), \end{aligned}$$

po przekształceniach otrzymując równanie:

$$\dot{m} = \hat{K} - \rho + g - \frac{\tau_w \omega L^d}{K} - r\lambda - m(\hat{p} + \hat{K}). \quad (2.3.11)$$

Podstawiając do (2.3.11) stopę wzrostu kapitału rzeczowego: $\hat{K} = n - \hat{l}$ (wzór wynika z równania (2.3.7) i założenia $\hat{L} = 0$) oraz $\frac{\omega L^d}{K} = Uy$, ostatecznie otrzymujemy równanie:

$$\dot{m} = n - \hat{l} - \rho^e + g - \tau_w Uy - r\lambda - m(\hat{p} + n - \hat{l}), \quad (2.3.12)$$

gdzie \hat{p} oraz \hat{l} opisane są przez równania, odpowiednio, (2.3.3) i (2.3.9) (do (2.3.12) nie podstawiamy równań zmiennych \hat{p} oraz \hat{l} ze względu na dość rozległe wzory tych zmiennych).

Czwarte równanie modelu KMGTT w postaci intensywnej przedstawia zmianę oczekiwań inflacyjnych:

$$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e}(\alpha \hat{p} + (1 - \alpha)\bar{\pi} - \pi^e). \quad (2.3.13)$$

Piąte równanie modelu opisuje stopę wzrostu oczekiwanego popytu na jednostkę kapitału rzeczowego $y^e = \frac{Y^e}{K}$. Z definicji tej zmiennej mamy:

$$\hat{y}^e = \hat{Y}^e - \hat{K}. \quad (2.3.14)$$

Podstawiając do (2.3.14) kolejno: $\hat{K} = n - \hat{l}$, $\hat{Y}^e = \hat{\omega} + \beta_{y^e} \frac{Y^d - Y^e}{Y^e}$,

$$\hat{\omega} = \kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p(1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + n, \text{ dostajemy piąte równanie}$$

modelu:

$$\dot{y}^e = y^e \left(\kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p(1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) + \hat{l} \right). \quad (2.3.15)$$

Szóste równanie opisuje przyrost zapasów na jednostkę kapitału rzeczowego:

$$\dot{v} = \frac{NK - N\hat{K}}{K^2}, \quad (2.3.16)$$

gdzie $N = Y - Y^d$, $\hat{K} = n - \hat{l}$, $v = \frac{N}{K}$, $Z = \beta_Z \dot{Y}^e + \beta_n(N^d - N)$, $y = \frac{Y}{K}$, oraz $y^d = \frac{Y^d}{K}$.

W konsekwencji podstawień definicji powyższych zmiennych otrzymujemy:

$$\dot{v} = y - y^d - v(n - \hat{l}). \quad (2.3.17)$$

Siódmym równaniem modelu w postaci intensywnej jest równanie opisujące przyrost obligacji na jednostkę kapitału rzeczowego:

$$\dot{b} = \frac{\dot{B}Kp - B(\dot{K}p)}{(Kp)^2}. \quad (2.3.18)$$

Po kolejnych przekształceniach równanie (2.3.18) ma postać:

$$\dot{b} = \frac{\dot{B}Kp - B(\dot{K}p)}{(Kp)^2} = \frac{\dot{B}}{Kp} - \frac{B}{Kp} \frac{(\dot{K}p)}{Kp} = \frac{pG + rB - pT}{Kp} - b \frac{(\dot{K}p)}{Kp}$$

Ostatecznie:

$$\dot{b} = g + rb - \frac{T}{K} - b(\hat{K} + \hat{p}). \quad (2.3.19)$$

Po podstawieniu do (2.3.19) $\hat{K} = n - \hat{l}$, $T = \tau_w \omega L^d + \tau_c \rho^e K$ otrzymujemy siódme równanie modelu:

$$\dot{b} = g + rb - \tau_c \rho - \tau_w U y - b(n - \hat{l} + \hat{p}). \quad (2.3.20)$$

Ósme równanie przedstawia przyrost zadłużenia firm w stosunku do nominalnej wartości kapitału rzeczowego $\lambda = \frac{\dot{\Lambda}}{pK}$. Korzystając z definicji zmiennej λ , stopę wzrostu zadłużenia firm w stosunku do nominalnej wartości kapitału rzeczowego zapisujemy jako:

$$\hat{\lambda} = \hat{\Lambda} - \hat{p} - \hat{K} \quad . \quad (2.3.21)$$

Podstawiając $\hat{\Lambda} = \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda}$ oraz $\hat{\lambda} = \frac{\dot{\lambda}}{\lambda}$ do (2.3.21), mamy:

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} - \hat{p} - \hat{K} \quad . \quad (2.3.22)$$

Mnożąc obustronnie (2.3.22) przez λ , dostajemy:

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \lambda - (\hat{p} + \hat{K}) \lambda.$$

Kolejne przekształcenia prowadzą do:

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \cdot \frac{\Lambda}{pK} - (\hat{p} + \hat{K}) \lambda.$$

Ostatecznie otrzymujemy wzór opisujący przyrost zadłużenia firm w stosunku do kapitału rzeczowego:

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\Lambda}}{pK} - (\hat{p} + \hat{K}) \lambda \quad . \quad (2.3.23)$$

Z równania budżetowego $pI = p(1 - \tau_c)\rho K + \dot{\Lambda}$ możemy wyznaczyć równanie opisujące przyrost zadłużenia firm:

$$\dot{\Lambda} = pI - p(1 - \tau_c)\rho K \quad . \quad (2.3.24)$$

Podstawiając (2.3.24) do (2.3.23), otrzymujemy:

$$\dot{\lambda} = \frac{pI - p(1 - \tau_c)\rho K}{pK} - (\hat{p} + \hat{K}) \lambda \quad . \quad (2.3.25)$$

W kolejnych przekształceniach doprowadzamy równanie (2.3.25) do postaci:

$$\dot{\lambda} = (1 - \lambda)\hat{K} - (1 - \tau_c)\rho - \hat{p}\lambda \quad . \quad (2.3.26)$$

Podstawiając do (2.3.26) stopę wzrostu kapitału rzeczowego $\hat{K} = n - \hat{l}$, ostatecznie otrzymujemy ósme równanie modelu w postaci intensywnej:

$$\dot{\lambda} = (1 - \lambda)(n - \hat{l}) - (1 - \tau_c)\rho - \hat{p}\lambda \quad . \quad (2.3.27)$$

Ostatnie, dziewiąte równanie modelu w postaci intensywnej stanowi reguła Taylora przedstawiająca przyrost stopy procentowej (zob. (2.1.2)):

$$\dot{r} = -\beta_{i_r}(r - r^o) + \beta_{i_p}(\hat{p} - \bar{\pi}) + \beta_{i_u}\left(\frac{y}{y^p} - \bar{u}\right) \quad . \quad (2.3.28)$$

Ostatecznie dostajemy model KMGT z kredytem inwestycyjnym w postaci intensywnej opisany układem dziewięciu nieliniowych równań różniczkowych:

$$\dot{U} = U\kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p(1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) \quad (2.3.29)$$

$$\begin{aligned} \dot{l} = l \left(-i_1(\rho^e - \rho^o) - i_2 \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) - i_3(\lambda^0 - \lambda) \right) - \\ - l \left(\kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p(1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) - \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right) \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

$$\dot{m} = n - \hat{l} - \rho + g - \tau_w U y - r\lambda - m(\hat{p} + n - \hat{l}) \quad (2.3.31)$$

$$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e}(\alpha \hat{p} + (1 - \alpha)\bar{\pi} - \pi^e) \quad (2.3.32)$$

$$\dot{y}^e = y^e \left(\beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) + \hat{l} \right) \quad (2.3.33)$$

$$\dot{v} = y - y^d - v(n - \hat{l}) \quad (2.3.34)$$

$$\dot{b} = g + rb - \tau_c \rho - \tau_w U y - b(n - \hat{l} + \hat{p}) \quad (2.3.35)$$

$$\dot{\lambda} = (1 - \lambda)(n - \hat{l}) - (1 - \tau_c)\rho - \hat{p}\lambda \quad (2.3.36)$$

$$\dot{r} = -\beta_{i_r}(r - r^o) + \beta_{i_p}(\hat{p} - \bar{\pi}) + \beta_{i_u} \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \quad (2.3.37)$$

gdzie

$$\rho^e = y^e - U y - \delta - r\lambda, \quad \kappa = \frac{1}{1 - \kappa_w \kappa_p}, \quad \hat{p} = \kappa \left(\kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \beta_p \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + \pi^e,$$

$$\rho = y^d - U y - \delta - r\lambda.$$

Popyt na jednostkę kapitału y^d i produkcja na jednostkę kapitału y powiązane są następującym układem równań liniowych:

$$\begin{aligned} y^d = (1 - \tau_w)yU + i_1(y^e - yU - \delta - r\lambda - \rho^o) + i_2(u - \bar{u}) + i_3(\lambda^0 - \lambda) + \delta + g + \\ + \kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p(1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \end{aligned} \quad (2.3.38)$$

$$\begin{aligned} y = y^e + \beta_n \beta_{N^d} y^e - \beta_n v + \\ + y^e \beta_z \left(\kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p(1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right) \end{aligned} \quad (2.3.39)$$

Po rozwiązaniu układu (2.3.38) - (2.3.39) otrzymujemy

$$y = \frac{AF - CE}{AD - BE}, \quad (2.3.40)$$

$$y^d = \frac{CD - BF}{AD - BE}, \quad (2.3.41)$$

gdzie

$$A = \left(1 - \frac{\beta y^e}{y^e}\right),$$

$$B = \left(i_1 U - \frac{i_2}{y^p} - \frac{\kappa \beta_w (1 - \kappa_p)}{l} + \frac{\kappa \beta_p (1 - \kappa_w)}{y^p} - (1 - \tau_w) U\right),$$

$$C = i_1 (y^e - \delta - r\lambda - \rho^o) - i_2 \bar{u} + i_3 (\lambda^0 - \lambda) + n + g + \delta + \\ + \kappa (\beta_p (1 - \kappa_w) \bar{u} - \beta_w (1 - \kappa_p) \bar{V}) - \beta y^e,$$

$$D = \left(1 - \frac{y^e \beta_Z \kappa \beta_w (1 - \kappa_p)}{l} + \frac{y^e \beta_Z \kappa \beta_p (1 - \kappa_w)}{y^p}\right),$$

$$E = -\beta_Z \beta y^e,$$

$$F = y^e \left(1 + \beta_n \beta_{N^d} + \beta_Z (\kappa \beta_p (1 - \kappa_w) \bar{u} - \kappa \beta_w (1 - \kappa_p) \bar{V}) + n - \beta y^e\right) - \beta_n v.$$

Uwaga 2. Z (2.3.29)-(2.3.37) można zauważyć, że realna podaż na jednostkę kapitału rzeczowego m oraz obligacje na jednostkę kapitału rzeczowego b nie wpływają na pozostałe zmienne modelu w postaci intensywnej. A więc analizę modelu KMGT z kredytem inwestycyjnym w postaci intensywnej (2.3.29)-(3.3.37) można przeprowadzić osobno dla układu (2.3.29)-(2.3.37) bez równań (2.3.31) i (2.3.35) oraz dla układu dwóch równań (2.3.31) i (2.3.35).

2.2.4. Stan stacjonarny modelu KMGT

W tej części rozdziału wyznaczymy stan stacjonarny modelu KMGT z kredytem inwestycyjnym. Aby to zrobić, skorzystamy z definicji stanu stacjonarnego.

Definicja. Stanem stacjonarnym modelu w postaci intensywnej (2.3.29)-(2.3.37) nazywamy taki nieujemny wektor $(\bar{U}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{b}, \bar{\lambda}, \bar{r})$, dla którego prawa strona układu równań (2.3.29)-(2.3.37) jest równa zero oraz rzeczywista inflacja w stanie stacjonarnym ma wartość równą wartości celu inflacyjnego $\bar{\pi}$.

Udowodnienie istnienia stanu stacjonarnego modelu sprowadza się zatem do wyznaczenia zestawu dziewięciu wartości zmiennych będącego rozwiązaniem układu równań (2.3.29)-(2.3.37), dla którego prawa strona równań (2.3.29)-(2.3.37) jest równa zero oraz rzeczywista inflacja w stanie stacjonarnym ma wartość równą wartości celu inflacyjnego $\bar{\pi}$.

Po przyrównaniu prawej strony układu równań (2.3.29)-(2.3.37) do zera otrzymujemy układ:

$$0 = U \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p (1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) \quad (2.3.42)$$

$$0 = l \left(-i_1(\rho^e - \rho^o) - i_2 \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) - i_3(\lambda^0 - \lambda) \right) - \\ - l \left(\kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p(1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) - \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right) \quad (2.3.43)$$

$$0 = n - y^e + Uy + \delta + g - \tau_w Uy - m(\hat{p} + n) \quad (2.3.44)$$

$$0 = \beta_{\pi^e}(\alpha \hat{p} + (1 - \alpha)\bar{\pi} - \pi^e) \quad (2.3.45)$$

$$0 = y^e \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \quad (2.3.46)$$

$$0 = y - y^d - vn \quad (2.3.47)$$

$$0 = g + rb - \tau_c \rho - \tau_w Uy - b(n + \hat{p}) \quad (2.3.48)$$

$$0 = (1 - \lambda)n - (1 - \tau_c)\rho^e - \hat{p}\lambda \quad (2.3.49)$$

$$0 = -\beta_{i_t}(r - r^o) + \beta_{i_p}(\hat{p} - \bar{\pi}) + \beta_{i_u} \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \quad (2.3.50)$$

Zgodnie z tym, że $\hat{l} = 0$, z czego wynika $\hat{l} = 0$ oraz z $\hat{l} = n - \hat{K}$ (zob. (2.3.37)), mamy:

$$\hat{K} = n. \quad (2.3.51)$$

Oznacza to, że w stanie stacjonarnym kapitał rzeczowy rośnie ze stałą stopą wzrostu równą n .

Z równania (2.3.45) wynika, że:

$$\hat{p} = \frac{\pi^e - (1 - \alpha)\bar{\pi}}{\alpha}. \quad (2.3.52)$$

Przyjmując, że w stanie stacjonarnym aktualna inflacja jest równa $\bar{\pi}$, z (2.3.52) mamy:

$$\frac{\pi^e - (1 - \alpha)\bar{\pi}}{\alpha} = \bar{\pi}. \quad (2.3.53)$$

Z (2.3.53) mamy:

$$\bar{\pi}^e = \bar{\pi}. \quad (2.3.54)$$

Tak więc w stanie stacjonarnym oczekiwania inflacyjne pokrywają się z rzeczywistą stopą inflacji:

$$\bar{\pi}^e = \hat{p} = \bar{\pi}. \quad (2.3.55)$$

Następnie z (2.3.46), przy założeniu $y^e > 0$ oraz $\beta_{y^e} > 0$, otrzymujemy:

$$y^d = y^e. \quad (2.3.56)$$

Oznacza to, że w stanie stacjonarnym popyt na jednostkę kapitału jest równy oczekiwanej sprzedaży na jednostkę kapitału.

Podstawiając do równania $\hat{p} = \kappa \left(\kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \beta_p \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + \pi^e$ wniosek $\bar{\pi}^e = \hat{p} = \bar{\pi}$, po przekształceniach otrzymujemy:

$$\left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) = - \frac{\beta_p}{\kappa_p \beta_w} \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right). \quad (2.3.57)$$

Podstawiając do (2.3.42) równanie (2.3.57), otrzymujemy:

$$0 = U \kappa \left(- (1 - \kappa_p) \frac{\beta_p}{\kappa_p} \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) - \beta_p (1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right). \quad (2.3.58)$$

Równanie (2.3.58) przy założeniu $U, \kappa, \beta_p > 0$ oraz $\kappa_p, \kappa_w \neq 1$ ma rozwiązanie gdy:

$$\left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) = 0. \quad (2.3.59)$$

Oznacza to, że w stanie stacjonarnym produkcja na jednostkę kapitału jest równa:

$$\bar{y} = \bar{u} y^p. \quad (2.3.60)$$

Z (2.3.60) i definicji wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej $u = \frac{y}{y^p}$ wynika także, że w stanie stacjonarnym wskaźnik wykorzystania mocy produkcyjnej jest równy jego naturalnej wartości $u = \bar{u}$.

Podstawiając (2.3.60) do (2.3.58), otrzymujemy pracochłonność pełnego zatrudnienia w stanie stacjonarnym:

$$\bar{l} = \frac{\bar{u} y^p}{\bar{V}}. \quad (2.3.61)$$

Podstawiając $\frac{y}{y^p} = \bar{u}$ i $\hat{p} = \bar{\pi}$ do (2.3.50), dostajemy:

$$\bar{r} = r^o. \quad (2.3.62)$$

gdzie r^o – to parametr modelu oznaczający wartość nominalnej stopy procentowej w stanie stacjonarnym (naturalna stopa procentowa) (zob. (2.1.2)).

Z równania (2.3.47) możemy wyznaczyć wartość zmiennej v w stanie stacjonarnym:

$$\bar{v} = \frac{y - y^d}{n} = \frac{\bar{u} y^p - y^d}{n}. \quad (2.3.63)$$

W równaniu (2.3.63) nie znamy jedynie wartości zmiennej y^d w stanie stacjonarnym.

W celu wyznaczenia tej wartości podstawimy do (2.3.39):

$$y = y^e + \beta_n \beta_{Nd} y^e - \beta_n v + \\ + y^e \beta_z \left(\kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p (1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right).$$

równania: $\frac{y}{l} = \bar{V}$, $\frac{y}{y^p} = \bar{u}$, $\bar{y} = \bar{u} y^p$ oraz $y^d = y^e$. Po tych podstawieniach oraz przekształceniach otrzymujemy:

$$\bar{u}y^p = y^d + \beta_n\beta_{Nd}y^d - \beta_nv + y^d\beta_zn \quad (2.3.64)$$

Z (2.3.64) możemy wyznaczyć zmienną v :

$$v = \frac{y^d(1+\beta_n\beta_{Nd}+\beta_zn)-\bar{u}y^p}{\beta_n} \quad (2.3.65)$$

Porównując (2.3.63) oraz (2.3.65), otrzymujemy:

$$\frac{\bar{u}y^p - y^d}{n} = \frac{y^d(1+\beta_n\beta_{Nd}+\beta_zn)-\bar{u}y^p}{\beta_n} \quad (2.3.66)$$

Z (2.3.66) możemy wyznaczyć popyt w stosunku do kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym:

$$\bar{y}^d = \frac{\beta_n+n}{(1+\beta_n\beta_{Nd}+\beta_zn)n+\beta_n} \bar{u}y^p = \gamma\bar{y} \quad (2.3.67)$$

gdzie $\gamma = \frac{\beta_n+n}{(1+\beta_n\beta_{Nd}+\beta_zn)n+\beta_n}$, $\bar{y} = \bar{u}y^p$.

A więc z (2.3.67) oraz (2.3.56) wynika, że:

$$\bar{y}^e = \gamma\bar{y} \quad (2.3.68)$$

Podstawiając do (2.3.63) równanie (2.3.67), możemy wyznaczyć wartość zmiennej v w stanie stacjonarnym:

$$\bar{v} = \frac{\bar{y}-\gamma\bar{y}}{n} = \frac{1-\gamma}{n} \bar{y} \quad (2.3.69)$$

Popyt na jednostkę kapitału rzeczowego możemy zapisać jako sumę:

$$y^d = c + \hat{K} + \delta + g \quad (2.3.70)$$

gdzie $c = \frac{C}{K}$, $\hat{K} = \frac{I}{K}$, $g = \frac{G}{K}$.

W stanie stacjonarnym $\hat{K} = n$ (zob. (2.3.51)), czyli równanie (2.3.70) w stanie stacjonarnym ma postać:

$$\bar{y}^d = c + n + \delta + g \quad (2.3.71)$$

gdzie $\bar{y}^d = \gamma\bar{y}$.

Z (2.3.71) możemy wyznaczyć stosunek konsumpcji sektora prywatnego do kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym:

$$\bar{c} = \bar{y}^d - n - \delta - g \quad (2.3.72)$$

Dzieląc równanie $C = (1 - \tau_w)\omega L^d$ przez kapitał rzeczowy K , otrzymujemy:

$$c = (1 - \tau_w)yU \quad (2.3.73)$$

W stanie stacjonarnym równanie (2.3.73) ma postać:

$$\bar{c} = (1 - \tau_w)\bar{y}\bar{U} \quad (2.3.74)$$

Z równania (2.3.74) możemy wyznaczyć udział płac w PKB w stanie stacjonarnym:

$$\bar{U} = \frac{\bar{c}}{(1-\tau_w)\bar{y}}, \quad (2.3.75)$$

gdzie $\bar{c} = \bar{y}^d - n - \delta - g$.

Aby wyznaczyć stosunek zadłużenia do nominalnej wartości kapitału firm w stanie stacjonarnym, $\bar{\lambda}$, skorzystamy z równań (2.3.43) oraz (2.3.49). Równanie (2.3.43) po przekształceniach można zapisać w postaci:

$$i_3(\lambda^o - \lambda) = -i_1(\rho^e - \rho^o) . \quad (2.3.76)$$

Natomiast z równania (2.3.49) możemy wyznaczyć ρ^e :

$$\rho^e = \frac{(1-\lambda)n - \bar{\pi}\lambda}{1-\tau_c} . \quad (2.3.77)$$

Podstawiając (2.3.77) do (2.3.76), otrzymujemy równanie:

$$i_3(\lambda^o - \lambda) = -i_1 \left(\frac{(1-\lambda)n - \bar{\pi}\lambda}{1-\tau_c} - \rho^o \right), \quad (2.3.78)$$

którego rozwiązaniem jest wartość zmiennej λ w stanie stacjonarnym:

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda^o i_3(1-\tau_c) + n i_1 - i_1 \rho^o (1-\tau_c)}{i_3(1-\tau_c) + n i_1 - \bar{\pi} i_1} . \quad (2.3.79)$$

Znając wartość zmiennej λ w stanie stacjonarnym, z (2.3.77) możemy wyznaczyć oczekiwany zysk w stanie stacjonarnym:

$$\bar{\rho}^e = \frac{(1-\bar{\lambda})n}{(1-\tau_c)} . \quad (2.3.80)$$

W stanie stacjonarnym mamy $y^d = y^e$, a więc z definicji zmiennych $\rho^e = y^e - Uy - \delta - r\lambda$, $\rho = y^d - Uy - \delta - r\lambda$ wynika, że w stanie stacjonarnym oczekiwana stopa zysku z kapitału rzeczowego jest równa rzeczywistej wartości stopy zysku z kapitału rzeczowego:

$$\bar{\rho}^e = \bar{\rho} . \quad (2.3.81)$$

Aby stan stacjonarny istniał, musi być spełnione równanie:

$$\bar{\rho} = \bar{y}^d - \bar{U}\bar{y} - \delta - r^o \bar{\lambda} \quad (2.3.82a)$$

gdzie r^o to parametr oznaczający wartość nominalnej stopy procentowej w stanie stacjonarnym.

Z (2.3.82a) wynika, że aby stan stacjonarny istniał i był jedyny, parametr r^o musi mieć wartość:

$$r^o = \frac{\bar{y}^d - \bar{U}\bar{y} - \delta - \bar{\rho}}{\bar{\lambda}} . \quad (2.3.82b)$$

Na podstawie (2.3.62) oraz (2.3.82b) możemy wywnioskować, że od przyjętej wartości parametru r^o (docelowa nominalna stopa procentowa) zależy istnienie stanu stacjonarnego modelu KMGT.

Z (2.3.44) $0 = n - \rho^e + \delta + g - \tau_w \bar{U} \bar{y} - m(\bar{\pi} + n)$ możemy wyznaczyć wartość zmiennej m w stanie stacjonarnym:

$$\bar{m} = \frac{n - \bar{y}^d + (1 - \tau_w) \bar{U} \bar{y} + \delta + g}{n + \bar{\pi}}. \quad (2.3.83a)$$

Podstawiając do (2.3.83a) $\bar{y}^d = \bar{c} + n + \delta + g$ (2.3.71) oraz $\bar{c} = (1 - \tau_w) \bar{y} \bar{U}$ otrzymujemy:

$$\bar{m} = \frac{n - (\bar{c} + n + \delta + g) + \bar{c} + \delta + g}{n + \bar{\pi}} = 0. \quad (2.3.83b)$$

A z (2.3.48) $0 = g + rb - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{y} - b(n + \bar{\pi})$ możemy wyznaczyć wartość zmiennej b w stanie stacjonarnym:

$$\bar{b} = \frac{(g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{y})}{n + \bar{\pi} - \bar{r}}. \quad (2.3.84)$$

Podsumowując powyższe wyprowadzania, stan stacjonarny modelu KMGT w postaci intensywnej (2.3.29)-(2.3.37), przy założeniu, że w stanie stacjonarnym rzeczywista stopa inflacji jest równa celowi inflacyjnemu, opisują równania:

$$\bar{U} = \frac{\bar{c}}{(1 - \tau_w) \bar{u} y^p} \quad (2.3.85)$$

$$\bar{l} = \frac{\bar{u} y^p}{\bar{v}} \quad (2.3.86)$$

$$\bar{y}^d = \frac{\bar{u} y^p \beta_n + \bar{u} y^p n}{(1 + \beta_n \beta_{Nd} + \beta_{zn}) n + \beta_n}, \quad \bar{y}^e = \bar{y}^d, \quad (2.3.87)$$

$$\bar{\pi}^e = \bar{\pi}, \quad (2.3.88)$$

$$\bar{v} = \frac{\bar{u} y^p - \bar{y}^e}{n}, \quad (2.3.89)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda^o i_3 (1 - \tau_c) + n i_1 - i_1 \rho^o (1 - \tau_c)}{i_3 (1 - \tau_c) + n i_1 - \bar{\pi} i_1}, \quad (2.3.90)$$

$$\bar{r} = r^o = \frac{\bar{y}^d - \bar{U} \bar{y} - \delta - \bar{\rho}}{\bar{\lambda}}, \quad (2.3.91)$$

$$\bar{b} = \frac{g - \tau_c \bar{\rho} - \tau_w \bar{U} \bar{y}}{n + \bar{\pi} - \bar{r}}, \quad (2.3.92)$$

$$\bar{m} = 0, \quad (2.3.93)$$

$$\bar{y} = \bar{u} y^p, \quad (2.3.94)$$

$$\bar{\rho} = \frac{(1 - \bar{\lambda}) n}{(1 - \tau_c)}, \quad \bar{\rho}^e = \bar{\rho}, \quad (2.3.95)$$

$$\bar{c} = \bar{y}^d - n - \delta - g. \quad (2.3.96)$$

Z (2.3.85) - (2.3.96) wynika, że w gospodarce opisanej modelem KMGT z kredytem inwestycyjnym możliwy jest równomierny wzrost gospodarczy (istnieje stan stacjonarny) ze stopą wzrostu równą stopie wzrostu wydajności pracy n .

Jak wynika z (2.3.93) (dokładniej z (2.3.83)) na ścieżce równomiernego wzrostu ogólne zadłużenie netto na jednostkę kapitału w ujęciu nominalnym wynosi zero ($\bar{m} = \frac{\bar{M}}{\bar{p}\bar{K}} = 0$), skąd, z uwagi na to, że $\bar{p}\bar{K} > 0$, wynika, że także $\bar{M} = 0$. Pisaliśmy o tym już w zakończeniu punktu 2.1.2.

2.2.5. Analiza wrażliwości stanu stacjonarnego

Zaprezentowane w poprzednim punkcie wzory umożliwiają analizę wrażliwości stanu stacjonarnego na zmiany wartości parametrów modelu. Podobnie jak w rozdziale pierwszym, przed przystąpieniem do takiej analizy dokonamy przekształcenia tych wzorów tak, aby uzyskać wartości zmiennych na jednostkę produkcji (PKB), a nie na jednostkę kapitału, co uczyni analizę bardziej standardową. Przekształcenie powyższe łatwo uzyskujemy, korzystając z faktu, że w stanie stacjonarnym, jak wynika z równania $\bar{y} = \bar{u}y^p$, stosunek produkcji do kapitału trwałego określony jest wzorem:

$$\frac{Y}{K} = \bar{u}y^p. \quad (2.3.97)$$

W rezultacie wspomnianego przekształcenia wartości zmiennych modelu wyjściowego na jednostkę produkcji (PKB) spełniają w stanie stacjonarnym następujące równania:

stosunek całkowitego popytu finalnego do PKB:

$$\frac{Y^d}{Y} = \frac{\beta_n + n}{(1 + \beta_n \beta_{Nd} + \beta_{Zn})n + \beta_n}, \quad (2.3.98)$$

stosunek konsumpcji do PKB:

$$\frac{C}{Y} = \frac{\gamma \bar{u}y^p - (n + \delta + g)}{\bar{u}y^p}, \quad (2.3.99)$$

stosunek inwestycji do PKB:

$$\frac{I}{Y} = \frac{n + \delta}{\bar{u}y^p}, \quad (2.3.100)$$

stosunek konsumpcji publicznej do PKB:

$$\frac{G}{Y} = \frac{g}{\bar{u}y^p}, \quad (3.3.101)$$

stosunek długu publicznego (obligacji) do PKB

$$\frac{B}{pY} = \frac{g - \tau_c \bar{p} - \tau_w \frac{\gamma \bar{u}y^p - (n + \delta + g)}{(1 - \tau_w)}}{(n + \bar{\pi} - \bar{r})\bar{u}y^p} \quad (2.3.102)$$

stosunek długu prywatnego (kredytu inwestycyjnego) do PKB

$$\frac{\Lambda}{pY} = \frac{\lambda^0 i_3 (1 - \tau_c) + n i_1 - i_1 \rho^0 (1 - \tau_c)}{(i_3 (1 - \tau_c) + n i_1 - \bar{\pi} i_1)\bar{u}y^p} \quad (2.3.103)$$

Analizę wrażliwości przeprowadzono także dla zmiennych:

stopa zysku z kapitału rzeczowego

$$\bar{\rho} = \frac{(1-\bar{\lambda})n}{(1-\tau_c)}, \quad (2.3.104)$$

gdzie $\bar{\lambda} = \frac{\lambda^o i_3(1-\tau_c) + ni_1 - i_1 \rho^o(1-\tau_c)}{(i_3(1-\tau_c) + ni_1 - \bar{\pi} i_1) \bar{u} y^p}$

oraz

udział płac w PKB

$$\bar{U} = \frac{\gamma \bar{u} y^p - (n + \delta + g)}{(1 - \tau_w) \bar{u} y^p}, \quad (2.3.105)$$

gdzie $\gamma = \frac{\beta_n + n}{(1 + \beta_n \beta_{Nd} + \beta_Z n) n + \beta_n}$.

Wyniki analizy wrażliwości równowagowych wartości powyższych zmiennych na zmiany wartości wybranych parametrów modelu mających wpływ na wartości tych zmiennych przedstawia Tabela 2.3.2. Znak plus (+) w tabeli oznacza, że wartość danej zmiennej w stanie stacjonarnym rośnie ze wzrostem wartości wybranego parametru, znak minus (-) że maleje. Znak zapytania (?) oznacza, że ze względu na postać równania, zależności nie można jednoznacznie określić. Znaki te zostały ustalone na podstawie wzorów badanych zmiennych oraz ich pochodnych względem badanego parametru.

W przeprowadzonej analizie wrażliwości zbadano wpływ następujących parametrów na równowagę: β_n – parametr reakcji produkcji na odchylenie rzeczywistego poziomu zapasu od pożądanego, β_Z – parametr reakcji produkcji na przyrost oczekiwanej sprzedaży, β_{Nd} – pożądaný stosunek zapasów do oczekiwanej sprzedaży, \bar{u} – naturalny poziom wykorzystania mocy produkcyjnych, y^p – potencjalna efektywność kapitału (stosunek maksymalnej produkcji Y^p do kapitału), n – stopa wzrostu wydajności pracy, δ – współczynnik deprecjacji kapitału, g – stosunek popytu sektora rządowego do kapitału, τ_w, τ_c – stawki podatkowe, \bar{V} – stopa zatrudnienia, $\bar{\pi}$ – wskaźnik inflacji.

Tabela 2.3.2. Analiza wrażliwości stanu równowagi modelu w postaci intensywnej

	β_n	β_Z	β_{Nd}	\bar{u}	y^p	n	δ	g	τ_w	τ_c	\bar{V}	$\bar{\pi}$
$\frac{\omega L}{Y}$?	-	-	+	+	-	-	-	+	0	0	0
$\frac{Y^d}{Y}$?	-	-	0	0	-	0	0	0	0	0	0
$\frac{C}{Y}$?	-	-	+	+	-	-	-	0	0	0	0

$\frac{I}{\bar{Y}}$	0	0	0	-	-	+	+	0	0	0	0	0
$\frac{G}{\bar{Y}}$	0	0	0	-	-	0	0	0	0	0	0	0
$\frac{B}{p\bar{Y}}$?	?	?	?	?	?	?	?	?	?	0	-
$\bar{\rho}$?	?	?	+	+	?	0	0	0	?	0	-
$\frac{\Lambda}{p\bar{Y}}$	0	0	0	-	-	?	0	0	0	?	0	+

Źródło: opracowanie własne.

Analiza przedstawiona w Tabeli 2.3.2 w połączeniu ze wzorami opisującymi stan stacjonarny prowadzi do kilku interesujących wniosków na temat zależności tych proporcji od parametrów modelu.

1. Im większa stopa wzrostu wydajności pracy n , tym mniejszy udział konsumpcji w PKB (2.3.99) oraz udział płac w PKB (2.3.105), a większy udział inwestycji w PKB (2.3.100).
2. Udział konsumpcji w PKB nie zależy od stawki podatkowej τ_w . Z kolei, jak wynika z (2.3.105), stawka ta wpływa pozytywnie na udział wynagrodzeń w PKB. Konsumpcja natomiast zależy od tej stawki, a wynagrodzenia nie, co oznacza, że wartość PKB w stanie stacjonarnym zależy od stawki podatkowej τ_w .
3. Jak wynika z równania (2.3.104) stopa zysku z kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym zależy od stawki podatku od wynagrodzeń τ_w , chociaż stawka ta nie ma bezpośredniego wpływu na wielkość zysku z kapitału rzeczowego. Jednak stawka ta wpływa na konsumpcję sektora prywatnego będącą składnikiem całkowitego popytu, który wpływa na stopę zysku z kapitału rzeczowego. Wyjaśnia to, dlaczego stawka τ_w wpływa na stopę zysku z kapitału. Stopa zysku z kapitału rzeczowego w stanie stacjonarnym bezpośrednio zależy ponadto od stawki podatku od zysku z kapitału rzeczowego τ_c . Warto odnotowania jest również to, że na stopę zysku z kapitału mają wpływ wartości parametrów reakcji β_n , β_z i β_{Nd} , od których zależy nadwyżka produkcji ponad oczekiwaną sprzedaż. Jednak na podstawie wzoru zmiennej oraz jej pochodnej trudno określić, jaki jest wpływ wartości tych parametrów na tę stopę. Niemniej jednak można to ocenić za pomocą metody empirycznej.
4. Stosunek zadłużenia do PKB w stanie stacjonarnym jest powiązany ze wszystkimi stawkami podatkowymi, a także ze stopą wzrostu wydajności pracy. Jednak postać równania (2.3.103) określającego tę zmienną nie pozwala na dokładną ocenę wpływu wartości tych parametrów na tę zmienną.

5. Podobnie jak w modelu KMG z rozdziału pierwszego, na podstawie wzoru zmiennej b (stosunek podaży obligacji do PKB) można ustalić jedynie kierunek wpływu stopy inflacji w stanie stacjonarnym na tę zmienną. Jak wynika z Tabeli 2.3.2, wzrost stopy inflacji w stanie stacjonarnym przyczynia się do zmniejszenia stosunku podaży obligacji do PKB. Wpływ wartości pozostałych parametrów może zostać zbadany metodami empirycznymi.

Podsumowanie

W rozdziale tym przedstawiono kolejną autorską wersję modelu KMG. Zaprezentowany model jest modyfikacją modelu KMG przedstawionego w rozdziale pierwszym. Pierwsza modyfikacja polega na uwzględnieniu w modelu dodatkowego źródła finansowania inwestycji prywatnych jakim jest kredyt inwestycyjny. Druga dotyczy zmiany sposobu wyznaczania nominalnej stopy procentowej. W nowej wersji modelu stopa ta zależy od równania Taylora.

Kolejne modyfikacje modelu KMG mają na celu uzyskanie lepszego opisu gospodarki, bardziej zbliżonego do rzeczywistości, lepiej oddającego rzeczywiste zależności zachodzące w gospodarce. Przedstawiony model w porównaniu do modelu z rozdziału pierwszego (a także w porównaniu do oryginalnych modeli KMG) stanowi ulepszony opis funkcjonowania gospodarki, który pozwala, oprócz wyników jakościowych prezentowanych w tym rozdziale, uzyskiwać również ciekawe wyniki ilościowe, które zostaną przedstawione w rozdziale czwartym.

Rozdział 3

Stabilność stanów stacjonarnych modeli KMG i KMGT

3.1. Twierdzenie o stabilności równowagi w modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza

W dwóch poprzednich rozdziałach pracy przedstawiliśmy dwie autorskie wersje modelu KMG oraz przeanalizowaliśmy warunki istnienia i jednoznaczności stanów stacjonarnych tych modeli w postaci intensywnej. W niniejszym rozdziale zajmiemy się centralnym zagadnieniem pracy, jakim jest udowodnienie twierdzeń o lokalnej asymptotycznej stabilności tych stanów, co jest równoważne z wykazaniem zbieżności gospodarek opisanych równaniami modeli KMG w ich wyjściowych postaciach (tzn. nie w postaci intensywnej) do odpowiednich ścieżek równomiernego wzrostu ze stopą równą stopie wzrostu wydajności pracy (przy założonej zerowej stopie wzrostu podaży pracy).

Prezentację dowodów stabilności zaczniemy od dowodu stabilności modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza. Przed przystąpieniem do sformułowania twierdzenia o stabilności i prezentacji jego dowodu przypomnijmy intensywną postać pierwszej wersji modelu KMG, to znaczy autorskiej wersji zaprezentowanej w rozdziale pierwszym.

Model KMG z egzogeniczną podażą pieniądza składa się z następujących nieliniowych równań różniczkowych:

$$\begin{aligned}\dot{U} &= U\kappa\left(\beta_w(1-\kappa_p)\left(\frac{y}{l}-\bar{V}\right)-\beta_p(1-\kappa_w)\left(\frac{y}{y^p}-\bar{u}\right)\right)= \\ &= F_1(U, l, m, \pi^e, y^e, v, y, y^d)\end{aligned}\quad (3.1.1)$$

$$\begin{aligned}\dot{l} &= l\left(n-\left(\hat{U}+n+\beta_{y^e}\left(\frac{y^d}{y^e}-1\right)\right)-i_1\left(y^e-Uy-\delta-\left(\frac{hy^e}{m}-\pi^e\right)\right)-i_2\left(\frac{y}{y^p}-\bar{u}\right)\right)= \\ &= F_2(U, l, m, \pi^e, y^e, v, y, y^d)\end{aligned}\quad (3.1.2)$$

$$\begin{aligned}\dot{m} &= m\left(\mu-\pi^e-n-\kappa\left(\kappa_p\beta_w\left(\frac{y}{l}-\bar{V}\right)+\beta_p\left(\frac{y}{y^p}-\bar{u}\right)\right)+\hat{l}\right)= \\ &= F_3(U, l, m, \pi^e, y^e, v, y, y^d)\end{aligned}\quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned}\dot{\pi}^e &= \beta_{\pi^e}\left(\alpha\left(\kappa_p\beta_w\left(\frac{y}{l}-\bar{V}\right)+\beta_p\left(\frac{y}{y^p}-\bar{u}\right)+\pi^e\right)+(1-\alpha)(\mu-n)-\pi^e\right)= \\ &= F_4(U, l, m, \pi^e, y^e, v, y, y^d)\end{aligned}\quad (3.1.4)$$

$$\dot{y}^e = y^e\left(\hat{U}+n+\beta_{y^e}\left(\frac{y^d}{y^e}-1\right)-n+\hat{l}\right) =$$

$$= F_5(U, l, m, \pi^e, y^e, v, y, y^d) \quad (3.1.5)$$

$$\dot{v} = y - y^d - v(n - \hat{l})$$

$$= F_6(U, l, m, \pi^e, y^e, v, y, y^d) \quad (3.1.6)$$

$$\dot{b} = g + rb - \tau_c(y^d - Uy - \delta + rb) - \tau_w Uy - \mu m -$$

$$-b \left(n - \hat{l} + \kappa \left(\beta_p \left(\frac{y}{y^p} - u \right) + \kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) \right) + \pi^e \right) =$$

$$= F_7(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b, y, y^d) \quad (3.1.7)$$

gdzie $\kappa = \frac{1}{1 - \kappa_p \kappa_w}$.

W modelu (3.1.1) – (3.1.7) oprócz zmiennych, których pochodne występują po lewej stronie prezentowanych równań, mamy do czynienia także z dwiema dodatkowymi zmiennymi. Są to produkcja na jednostkę kapitału y oraz popyt na jednostkę kapitału y^d . Zmienne te powiązane są ze sobą oraz z pozostałymi zmiennymi modelu (3.1.1) – (3.1.7) następującym układem równań:

$$y = y^e + \beta_n \beta_{Nd} y^e - \beta_n v +$$

$$+ y^e \beta_z \left(\kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p (1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right) \quad (3.1.8)$$

$$y^d = (1 - \tau_w) y U + i_1 (y^e - y U - \delta - (r - \pi^e)) + i_2 (u - \bar{u}) + \delta + g +$$

$$+ \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p (1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \quad (3.1.9)$$

Rozwiązanie układu (3.1.8)-(3.1.9) można przedstawić w postaci:

$$y = \frac{AF - CE}{AD - BE}, \quad (3.1.10)$$

$$y^d = \frac{CD - BF}{AD - BE}, \quad (3.1.11)$$

gdzie

$$A = \left(1 - \frac{\beta_{y^e}}{y^e} \right),$$

$$B = \left(i_1 U - \frac{i_2}{y^p} - \frac{\kappa \beta_w (1 - \kappa_p)}{l} + \frac{\kappa \beta_p (1 - \kappa_w)}{y^p} - (1 - \tau_w) U \right),$$

$$C = i_1 \left(y^e - \delta - \xi - \left(\frac{h y^e}{m} - \pi^e \right) \right) - i_2 \bar{u} + n + g + \delta + \kappa \left(\beta_p (1 - \kappa_w) \bar{u} - \beta_w (1 - \kappa_p) \bar{V} \right) - \beta_{y^e},$$

$$D = \left(1 - \frac{y^e \beta_z \kappa \beta_w (1 - \kappa_p)}{l} + \frac{y^e \beta_z \kappa \beta_p (1 - \kappa_w)}{y^p} \right),$$

$$E = -\beta_z \beta_{y^e},$$

$$F = y^e \left(1 + \beta_n \beta_{Nd} + \beta_z \left(\kappa \beta_p (1 - \kappa_w) \bar{u} - \kappa \beta_w (1 - \kappa_p) \bar{V} + n - \beta_{y^e} \right) \right) - \beta_n v.$$

Po podstawieniu (3.1.10) – (3.1.11) do równań (3.1.1) – (3.1.7) otrzymujemy nieliniowy układ siedmiu równań różniczkowych, którego zmiennymi jest wyłącznie siedem zmiennych $(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b)$, których pochodne występują po lewej stronie tego układu.

Jak pokazaliśmy w rozdziale pierwszym, model (3.1.1) – (3.1.9) ma dokładnie jeden stan stacjonarny. Jak wykazano w rozdziale pierwszym wartości zmiennych w stanie stacjonarnym opisują następujące równania:

$$\bar{U} = \frac{\gamma \bar{u} y^p - (n + \delta + g)}{(1 - \tau_w) \bar{u} y^p} \quad (3.1.12)$$

$$\bar{l} = \frac{\bar{u} y^p}{\bar{v}} \quad (3.1.13)$$

$$\bar{m} = \gamma \frac{h \bar{u} y^p}{\bar{r}} \quad (3.1.14)$$

$$\bar{\pi}^e = \bar{\pi} = \mu - n \quad (3.1.15)$$

$$\bar{y}^e = \gamma \bar{u} y^p \quad (3.1.16)$$

$$\bar{v} = \frac{1 - \gamma}{n} \bar{u} y^p \quad (3.1.17)$$

$$\bar{b} = \frac{g - \tau_c \left(\gamma \bar{u} y^p - \frac{\bar{c}}{(1 - \tau_w)} - \delta \right) - \tau_w \frac{\bar{c}}{(1 - \tau_w)} - \mu \bar{m}}{n - \gamma \bar{u} y^p + \frac{\bar{c}}{(1 - \tau_w)} + \delta + \tau_c \left(\gamma \bar{u} y^p - \frac{\bar{c}}{(1 - \tau_w)} - \delta + \pi \right)} \quad (3.1.18)$$

gdzie

$$\gamma = \frac{n + \beta_n}{n + \beta_z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n}, \quad \bar{r} = \gamma \bar{u} y^p - \frac{\gamma \bar{u} y^p - (n + \delta + g)}{(1 - \tau_w)} - \delta + \mu - n, \quad \bar{c} = \gamma \bar{u} y^p -$$

$(n + \delta + g)$.

W dowodzie stabilności stanu stacjonarnego modelu (3.1.1) – (3.1.9) wykorzystamy równania (3.1.12) – (3.1.18).

Analizowany stan stacjonarny jest lokalnie asymptotycznie stabilny. Definicja takiej stabilności w odniesieniu do stanu stacjonarnego modelu KMG (3.1.1) - (3.1.9) jest następująca.

Definicja Stan stacjonarny $(\bar{U}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{b})$ modelu (3.1.1)-(3.1.9) jest lokalnie asymptotycznie stabilny, jeżeli istnieje takie jego otoczenie $U(\bar{U}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{b})$, że każda dopuszczalna trajektoria modelu (3.1.1)-(3.1.9), wychodząca ze stanu początkowego należącego do otoczenia $U(\bar{U}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{b})$ jest zbieżna do stanu stacjonarnego czyli:

$$(U_t, l_t, m_t, \pi_t^e, y_t^e, v_t, b_t) \rightarrow (\bar{U}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{b}), \text{ gdy } t \rightarrow \infty.$$

W dowodzenie stabilności przyjmować będziemy następujące założenia:

Założenie 3.1.1. Wartości parametrów reakcji $\beta_z, \beta_n, \alpha, \beta_p, \beta_w, \beta_{y^e} > 0$ są odpowiednio małe.³⁶

Parametry reakcje, o których mowa w założeniu 3.1.1 występują w równaniach:

- $Y = Y^e + \beta_z \dot{Y}^e + \beta_n (N^d - N)$ - równanie behawioralne produkcji
- $\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e} (\alpha \hat{p} + (1 - \alpha)(\mu - n) - \pi^e)$ - równanie dynamiki oczekiwań inflacyjnych
- $\hat{p} = \beta_p (u - \bar{u}) + \kappa_p (\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p) \pi^e$ - równanie dynamiki cen (inflacji)
- $\hat{w} = \beta_w (V - \bar{V}) + \kappa_w \hat{p} + (1 - \kappa_w) \pi^e + n$ - równanie dynamiki płac nominalnych
- $\hat{Y}^e = \hat{w} + \beta_{y^e} \frac{Y^d - Y^e}{Y^e}$ - stopa wzrostu oczekiwanego popytu.

Zgodnie z założeniem 3.1.1 produkcja Y jest określana głównie na podstawie oczekiwań popytowych Y^e , których stopa wzrostu \hat{Y}^e zależy z kolei przede wszystkim od stopy wzrostu płacy realnej $\hat{w} = \hat{w} - \hat{p}$. Z uwagi na to, że $1 - \alpha$ jest bliskie jedynce, zmiany oczekiwań inflacyjnych $\dot{\pi}^e$ są silnie stabilizowane przez stały czynnik $(\mu - n)$ odzwierciedlający inflację w stanie stacjonarnym. Ponadto odchylenia wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnych od jego normalnego poziomu $(u - \bar{u})$ w niewielkim stopniu wpływają na inflację \hat{p} , a odchylenia wskaźnika zatrudnienia od jego naturalnego poziomu $(V - \bar{V})$ słabo wpływają na dynamikę płacy nominalnej \hat{w} .

Założenie 3.1.2. Stopa wzrostu nominalnej podaży pieniądza μ nie przekracza stopy wzrostu wydajności pracy n , powiększonej o stopę deprecjacji kapitału δ :

$$\mu < n + \delta.$$

Założenie 3.1.2 możemy interpretować jako wymóg, aby w stanie stacjonarnym inflacja nie była wyższa od wskaźnika deprecjacji kapitału, gdyż w stanie stacjonarnym zachodzi:

$$\bar{\pi} = \mu - n$$

Uwaga. Założenie 3.1.2 staje się zbędne, jeżeli w definicji stanu stacjonarnego umieścimy wymóg, aby w stanie tym inflacja była zerowa. Wówczas założenie 3.1.2 redukuje się do nierówności:

³⁶ Odpowiednio mała wartość parametru oznacza, że wartość parametru musi być dostatecznie mała w porównaniu z innymi parametrami, aby uzyskać ujemne części rzeczywiste wartości własnych, co gwarantuje stabilność stanu stacjonarnego. Wartość "odpowiednio mała" jest uzależniona od innych wartości parametrów a podanie konkretnego przedziału wymaga dokładnej analizy matematycznej. Analogiczna uwaga odnosi się do kolejnych założeń, w których mowa o wartościach innych parametrów odpowiednio dużych lub odpowiednio bliskich 1.

$$-\delta < 0, \text{ czyli } \delta > 0.$$

Założenie 3.1.3. Wartość parametru reakcji $i_1 > 0$, występującego w równaniu popytu inwestycyjnego:

$$I = i_1(\rho^e - \xi - (r - \pi^e))K + i_2(u - \bar{u})K + \hat{Y}^e K + \delta K,$$

jest odpowiednio duża.

Zgodnie z Założeniem 3.1.3 popyt inwestycyjny jest bardzo wrażliwy na różnicę między oczekiwanym zyskiem z kapitału rzeczowego a oczekiwaną realną stopą procentową.

Założenie 3.1.4. Wartość parametru reakcji κ_p ($0 < \kappa_p < 1$), w równaniu dynamiki cen:

$$\hat{p} = \beta_p(u - \bar{u}) + \kappa_p(\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p)\pi^e,$$

jest odpowiednio bliska 1.

Zgodnie z Założeniem 3.1.4, stopa inflacji jest bardziej wrażliwa na różnicę między stopą wzrostu płac nominalnych \hat{w} a stopą wzrostu wydajności pracy $n = \dot{x}/x$ niż na oczekiwaną stopę inflacji π^e .

Założenie 3.1.5. Stopa wzrostu podaży pieniądza μ spełnia nierówność:

$$(1 - \tau_c)\bar{r} < \mu.$$

Założenie 3.1.6. Nominalna stopa procentowa w stanie stacjonarnym jest dodatnia:

$$\bar{r} = \frac{g + \mu - \tau_w(\mu - n - \delta + \gamma\bar{u}y^p)}{(1 - \tau_w)} > 0.$$

Warto zauważyć, że założenie 3.1.5 jest spełnione dla odpowiednio wysokiej stawki podatku od zysków z kapitału τ_c , natomiast założenie 3.1.6 jest spełnione dla odpowiednio niskiej stawki podatku od dochodów z pracy τ_w .

Założenia 3.1.1 - 3.1.6 pozwalają na przeprowadzenie dowodu następującego twierdzenia o stabilności modelu (3.1.1)-(3.1.7) i jego dowód, które jest jednym z dwóch głównych rezultatów teoretycznych rozprawy.

Twierdzenie 1. *Jeżeli spełnione są założenia 3.1.1 – 3.1.6, to stan stacjonarny modelu (3.1.1) – (3.1.9) jest lokalnie asymptotycznie stabilny.*

3.2. Dowód twierdzenia o stabilności modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza

3.2.1. Ogólna charakterystyka dowodu

Zgodnie z twierdzeniem o stabilności stanu stacjonarnego jednorodnego układu nieliniowych równań różniczkowych, w celu udowodnienia lokalnej asymptotycznej stabilności stanu stacjonarnego modelu (3.1.1) – (3.1.9) należy wykazać, że części

rzeczywiste wszystkich wartości własnych (pierwiastków charakterystycznych) macierzy Jacobiego J_7 rozpatrywanego modelu w stanie stacjonarnym $\bar{x} = (\bar{U}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{b})$ są ujemne. Aby to wykazać, macierz Jacobiego modelu w stanie stacjonarnym J_7 rozpatrywać będziemy jako ciągłą macierz funkcyjną parametrów: $\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_w, \beta_p$.

Punktem wyjścia dowodu stabilności jest wyjściowy Jacobian w stanie stacjonarnym J_7 z pierwiastkami λ_i . Aby wykazać, że wszystkie pierwiastki λ_i mają ujemne części rzeczywiste, zastosujemy tzw. metodę kaskady macierzy stabilnych (*cascade of stable matrices approach*) wykorzystaną przez Carla Chiarellę, Reinera Frankego, Petera Flaschela i Williego Semmlera w dowodzie stabilności ich wersji modelu KMG (Chiarella i in. (2006)). W przypadku stanu stacjonarnego modelu prezentowanego w niniejszej pracy metoda ta podzielona jest na cztery etapy. W pierwszym etapie wyznaczamy macierz Jacobiego w stanie stacjonarnym J_7 . W drugim etapie redukujemy wielomian charakterystyczny macierzy Jacobiego J_7 do wielomianu drugiego stopnia W_2^{000} poprzez wyzerowanie parametrów reakcji. Zerowanie parametrów odbywa się w trzech krokach: najpierw zerujemy wektor parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$, następnie parametr β_w , a na końcu parametr β_p . W kolejnym etapie wykazujemy, że otrzymany wielomian drugiego stopnia W_2^{000} ma pierwiastki o ujemnych częściach rzeczywistych. W ostatnim czwartym etapie wykazujemy, w oparciu o wynik etapu trzeciego, że wyjściowa macierz Jacobiego J_7 ma pierwiastki o ujemnych częściach rzeczywistych poprzez stopniowe przywracanie dodatnich wartości wcześniej wyzerowanych parametrów.

Macierz Jacobiego modelu (3.1.1) – (3.1.9) w stanie stacjonarnym w ogólnym ujęciu ma postać:

$$J_7 = \begin{pmatrix} F_{1U} & F_{1l} & F_{1m} & F_{1\pi^e} & F_{1y^e} & F_{1v} & F_{1b} \\ F_{2U} & F_{2l} & F_{2m} & F_{2\pi^e} & F_{2y^e} & F_{2v} & F_{2b} \\ F_{3U} & F_{3l} & F_{3m} & F_{3\pi^e} & F_{3y^e} & F_{3v} & F_{3b} \\ F_{4U} & F_{4l} & F_{4m} & F_{4\pi^e} & F_{4y^e} & F_{4v} & F_{4b} \\ F_{5U} & F_{5l} & F_{5m} & F_{5\pi^e} & F_{5y^e} & F_{5v} & F_{5b} \\ F_{6U} & F_{6l} & F_{6m} & F_{6\pi^e} & F_{6y^e} & F_{6v} & F_{6b} \\ F_{7U} & F_{7l} & F_{7m} & F_{7\pi^e} & F_{7y^e} & F_{7v} & F_{7b} \end{pmatrix}. \quad (3.1.19)$$

Elementy macierzy J_7 to pochodne funkcji występujących po prawej stronie równań (3.1.1)–(3.1.7), liczone w stanie stacjonarnym $\bar{x} = (\bar{U}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{b})$.

Wprowadźmy wektor zmiennych modelu:

$$X = (x_1 = U, x_2 = l, x_3 = m, x_4 = \pi^e, x_5 = y^e, x_6 = v, x_7 = b)$$

wtedy

$$F_i = F_i(X) \quad (i = 1, 2, \dots, 7)$$

a elementy macierzy J_7 w ogólnym zapisie mogą być przedstawione następująco:

$$F_{ij} = \left. \frac{\partial F_i(X)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 7),$$

gdzie indeks $i = 1, 2, \dots, 7$ odpowiada kolejnym funkcjom (3.1.1)-(3.1.7).

Wartości własne (pierwiastki charakterystyczne) $\lambda_1, \dots, \lambda_7$ macierzy J_7 są pierwiastkami równania charakterystycznego tej macierzy postaci:

$$W_7(\lambda) = \det(J_7 - \lambda I) = 0. \quad (3.1.20)$$

3.2.2. Macierz Jacobiego modelu

W dowodzie stabilności stanu stacjonarnego interesować nas będą w pierwszej kolejności wartości pochodnych $F_{ij} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}$ macierzy Jacobiego (3.1.19) z wyzerowanym wektorem trzech parametrów reakcji:

$$\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0. \quad (3.1.21)$$

Macierz takich pochodnych zapisywać będziemy następująco

$$J_7^0 = J_7(\beta = 0). \quad (3.1.22)$$

W analogiczny sposób oznaczać będziemy poszczególne elementy macierzy J_7^0 :

$$F_{ij}^0 = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} (\beta = 0), \quad (i, j = 1, \dots, 7), \quad (3.1.23)$$

gdzie, podobnie jak wcześniej

$$x_1 = U, \quad x_2 = l, \quad x_3 = m, \quad x_4 = \pi^e, \quad x_5 = y^e, \quad x_6 = v, \quad x_7 = b.$$

Z uwagi na skomplikowaną postać równań (3.1.1)-(3.1.7) z dodatkowymi równaniami (3.1.10)-(3.1.11) wyznaczenie wszystkich pochodnych F_{ij}^0 polegające, zgodnie z definicją (3.1.23), na wcześniejszym wyznaczeniu pochodnych F_{ij} , a następnie wyzerowaniu w nich parametrów opisanych wektorem $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$, byłoby bardzo uciążliwe. Jednakże z uwagi na złożoną postać funkcji $F_1(\cdot), \dots, F_7(\cdot)$ z układu (3.1.1)-(3.1.7) oraz rozwiązania (3.1.10)-(3.1.11) układu równań (3.1.8)-(3.1.9), pochodne F_{ij}^0 możemy otrzymać w prostszy sposób, najpierw zerując parametry β_n, β_z, α w równaniach (3.1.1) – (3.1.7) oraz (3.1.10)-(3.1.11), a dopiero później licząc pochodne tak zmodyfikowanych funkcji $F_1(\cdot), \dots, F_7(\cdot)$ względem zmiennych x_j .

Uzasadnieniem powyższego postępowania jest niżej przedstawiony Lemat 1. W celu jego ścisłego sformułowania wprowadźmy zapis

$$F_i(\cdot) = F_i(X, \beta) , \quad (i = 1, \dots, 7),$$

podkreślając, że wartość każdej funkcji $F_i(\cdot)$ zależy od wektora zmiennych

$$X = (x_1 = U, x_2 = l, x_3 = m, x_4 = \pi^e, x_5 = y^e, x_6 = v, x_7 = b)$$

oraz od wektora parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$.

Symbolem $F_i(X, 0)$ oznaczmy funkcję $F_i(\cdot) = F_i(X, \beta)$ z wyzerowanym wektorem parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$ (także w równaniach (3.1.10) - (3.1.11), które podstawiane są do funkcji $F_i(\cdot) = F_i(X, \beta)$ w miejsce zmiennych y i y^d), a symbolem

$$\left. \frac{\partial F_i(X, 0)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}$$

wartość pochodnej tej funkcji w stanie stacjonarnym $\bar{x} = (\bar{U}, \bar{l}, \bar{m}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{b})$.

Lemat 1. $F_{ij}^0 = \left. \frac{\partial F_i(X, \beta)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} (\beta = 0) = \left. \frac{\partial F_i(X, 0)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} , \quad (i, j = 1, \dots, 7)$

Dowód.

Funkcje $F_i(X, \beta)$ występujące po prawej stronie równań (3.1) - (3.7) w ogólnym zapisie możemy przedstawić w postaci:

$$F_i(X, \beta) = f_i^1(X, \beta)y + f_i^2(X, \beta)y^d + f_i^3(X, \beta), \quad (3.1.24)$$

gdzie

$$f_i^k(X, \beta) \text{ dla } (k = 1, 2, 3; i = 1, 2, \dots, 7) \quad (3.1.25)$$

są funkcjami, które liniowo zależą od elementów wektora $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$, natomiast

$$y = y(X, \beta) , y^d = y^d(X, \beta)$$

są funkcjami (3.1.10) – (3.1.11) .

Funkcje $f_i^k(X, \beta)$ można przedstawić jako sumę dwóch funkcji

$$f_i^k(X, \beta) = f_i^{k1}(X, \beta) + f_i^{k2}(X)$$

gdzie $f_i^{k1}(X, \beta)$ zależy liniowo od elementów wektora $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$, a $f_i^{k2}(X)$ w ogóle nie zależy od β . Jeżeli $\beta = 0$, to $f_i^{k1}(X, \beta) = f_i^{k1}(X, 0) = 0$ i w konsekwencji

$$\left. \frac{\partial f_i^k(X, 0)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} = \left. \frac{\partial f_i^{k2}(X)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} . \quad (3.1.26)$$

Z faktu, że $f_i^{k_1}(X, \beta)$ zależy liniowo od elementów wektora $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$ wynika, że jeżeli najpierw policzymy pochodną $\left. \frac{\partial f_i^k(X, \beta)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}$ dla $\beta > 0$, a następnie wyzerujemy wektor β , to otrzymamy pochodną równą (3.1.26). Tożsamość tę przedstawia równanie

$$\left. \frac{\partial f_i^k(X, \beta)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} (\beta = 0) = \left. \frac{\partial f_i^k(X, 0)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} = \left. \frac{\partial f_i^{k_2}(X)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} \quad (3.1.27)$$

Funkcje $y = y(X, \beta)$, $y^d = y^d(X, \beta)$ wobec (3.1.10) - (3.1.11) możemy przedstawić w postaci:

$$y(X, \beta) = \frac{g_1(X, \beta) + g_2(X)}{h_1(X, \beta) + h_2(X)}, \quad (3.1.28)$$

$$y^d(X, \beta) = \frac{k_1(X, \beta) + k_2(X)}{h_1(X, \beta) + h_2(X)}, \quad (3.1.29)$$

gdzie $g_2(X)$, $k_2(X)$, $h_2(X)$ – są funkcjami wektora X , których wartość nie zależy od wektora parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$. Funkcja $h_1(X, \beta)$ jest funkcją liniową względem parametrów β_n, β_z, α , natomiast funkcje $g_1(X, \beta)$ i $k_1(X, \beta)$ są wielomianami stopnia drugiego względem powyższych parametrów. W rezultacie funkcje $y = y(X, \beta)$, $y^d = y^d(X, \beta)$ są funkcjami wymiernymi względem parametrów β_n, β_z, α . Funkcje (3.1.28)-(3.1.29) są określone dla $\beta = 0$ i przyjmują postać:

$$y(X, 0) = \frac{g_2(X)}{h_2(X)}, \quad y^d(X, 0) = \frac{k_2(X)}{h_2(X)}.$$

Określone są także ich pochodne cząstkowe w stanie stacjonarnym

$$\left. \frac{\partial y(X, 0)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}, \quad \left. \frac{\partial y^d(X, 0)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}. \quad (3.1.30)$$

Co więcej, z przedstawionych powyżej własności funkcji $g_1(X, \beta)$, $k_1(X, \beta)$ i $h_1(X, \beta)$ wynika, że jeżeli najpierw policzymy pochodne $\left. \frac{\partial y(X, \beta)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}$, $\left. \frac{\partial y^d(X, \beta)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}$ dla $\beta > 0$, a następnie wyzerujemy wektor β , to otrzymamy pochodne (3.1.30). Tak więc

$$\left. \frac{\partial y(X, \beta)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} (\beta = 0) = \left. \frac{\partial y(X, 0)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}, \quad (3.1.31)$$

$$\left. \frac{\partial y^d(X, \beta)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} (\beta = 0) = \left. \frac{\partial y^d(X, 0)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}. \quad (3.1.32)$$

Z (3.1.24), (3.1.27) oraz (3.1.31)-(3.1.32) dostajemy ostatecznie, że

$$F_{ij}^0 = \left. \frac{\partial F_i(X, \beta)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} (\beta = 0) = \left. \frac{\partial F_i(X, 0)}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}, \quad (i, j = 1, \dots, 7).$$

■

Korzystając z **lematu 1**, wyznaczmy poniżej pochodne cząstkowe $F_{ij}^0 = \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \Big|_{x=\bar{x}} (\beta = 0)$

w stanie stacjonarnym przy wyzerowanym wektorze parametrów reakcji $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$, tworzące macierz Jacobiego J_7^0 .

Rozpocniemy od przypomnienia, że funkcje $F_i(\cdot) = F_i(X, \beta)$, ($i = 1, \dots, 7$), gdzie

$$X = (x_1 = U, x_2 = l, x_3 = m, x_4 = \pi^e, x_5 = y^e, x_6 = v, x_7 = b),$$

występujące po prawej stronie równań (3.1) – (3.7), są funkcjami złożonymi, w których funkcjami wewnętrznymi są funkcje $y = y(X, \beta)$, $y^d = y^d(X, \beta)$, będące rozwiązaniem układu (3.1.8) - (3.1.9) postaci

$$y = y^e + \beta_n \beta_{N^d} y^e - \beta_n v + y^e \beta_z \left(\kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p (1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right),$$

$$y^d = (1 - \tau_w) y U + i_1 \left(y^e - y U - \delta - \xi - \left(\frac{h y^e}{m} - \pi^e \right) \right) + i_2 (u - \bar{u}) + \delta + g + \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p (1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right),$$

opisane równaniami (3.1.10) – (3.1.11).

Do wyznaczenia pochodnych F_{ij}^0 konieczne jest zatem wcześniejsze wyznaczenie pochodnych funkcji $y = y(X, \beta)$, $y^d = y^d(X, \beta)$ i wyzerowanie w nich wektora parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$. Tak otrzymane pochodne w (3.1.31) – (3.1.32) oznaczyliśmy symbolami

$$\frac{\partial y(X, \beta)}{\partial x_j} \Big|_{x=\bar{x}} (\beta = 0) \text{ i } \frac{\partial y^d(X, \beta)}{\partial x_j} \Big|_{x=\bar{x}} (\beta = 0) .$$

W dalszej części dowodu stabilności dla wygody używać będziemy prostszego zapisu tych pochodnych, przyjmując, że

$$\frac{\partial y^0}{\partial x_i} \Big|_{x=\bar{x}} = \frac{\partial y(X, \beta)}{\partial x_j} \Big|_{x=\bar{x}} (\beta = 0) \text{ i } \frac{\partial y^{d0}}{\partial x_i} \Big|_{x=\bar{x}} = \frac{\partial y^d(X, \beta)}{\partial x_j} \Big|_{x=\bar{x}} (\beta = 0) . \quad (3.1.33)$$

Zgodnie z (3.1.31) – (3.1.32) pochodne (3.1.33) są tożsame z analogicznymi pochodnymi funkcji $y = y(X, \beta)$, $y^d = y^d(X, \beta)$, w których wektor $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$ zostaje wyzerowany przed wyznaczeniem pochodnych. Tak więc

$$\frac{\partial y^0}{\partial x_i} \Big|_{x=\bar{x}} = \frac{\partial y(X, 0)}{\partial x_j} \Big|_{x=\bar{x}} , \quad \frac{\partial y^{d0}}{\partial x_i} \Big|_{x=\bar{x}} = \frac{\partial y^d(X, 0)}{\partial x_j} \Big|_{x=\bar{x}} . \quad (3.1.34)$$

Pochodne te można wyznaczyć wprost ze wzorów (3.1.10) – (3.1.11), jednak z uwagi na postać występujących w nich funkcji A, B, C, D, E (zob. (3.1.10)-(3.1.11)) jest to dość uciążliwe. Z tego względu pochodne te wyznaczymy, korzystając z układu równań otrzymanego z (3.1.8) – (3.1.9) po wyzerowaniu wektora parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$, postaci:

$$y = y^e \quad (3.1.35)$$

$$y^d = \quad (3.1.36)$$

$$= \frac{(1-\tau_w)y^e U + i_1 \left(y^e - y^e U - \delta - \xi - \left(\frac{h y^e}{m} - \pi^e \right) \right) + i_2 \left(\frac{y^e}{y^p} - \bar{u} \right) + \delta + g}{\left(1 - \frac{\beta y^e}{y^e} \right)} +$$

$$+ \frac{\kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) \left(\frac{y^e}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p (1 - \kappa_w) \left(\frac{y^e}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + n - \beta_{y^e}}{\left(1 - \frac{\beta y^e}{y^e} \right)}.$$

Pochodne funkcji y i y^d dla wyzerowanych parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$ w stanie stacjonarnym są zatem następujące:

$$\frac{\partial y^0}{\partial y^e} \Big|_{x=\bar{x}} = 1, \quad \frac{\partial y^0}{\partial \pi^e} \Big|_{x=\bar{x}} = \frac{\partial y^0}{\partial l} \Big|_{x=\bar{x}} = \frac{\partial y^0}{\partial m} \Big|_{x=\bar{x}} = \frac{\partial y^0}{\partial U} \Big|_{x=\bar{x}} = \frac{\partial y^0}{\partial v} \Big|_{x=\bar{x}} = \frac{\partial y^0}{\partial b} \Big|_{x=\bar{x}} = 0,$$

$$\frac{\partial y^{d0}}{\partial U} \Big|_{x=\bar{x}} = \frac{1 - \tau_w - i_1}{\bar{u} y^p - \beta_{y^e}} (\bar{u} y^p)^2, \quad \frac{\partial y^{d0}}{\partial l} \Big|_{x=\bar{x}} = - \frac{\kappa \beta_w (1 - \kappa_p) \bar{V}^2}{\bar{u} y^p - \beta_{y^e}}, \quad \frac{\partial y^{d0}}{\partial v} \Big|_{x=\bar{x}} = \frac{\partial y^{d0}}{\partial b} \Big|_{x=\bar{x}} = 0,$$

$$\frac{\partial y^{d0}}{\partial m} \Big|_{x=\bar{x}} = \frac{i_1 \bar{r}^2}{(\bar{u} y^p - \beta_{y^e}) h}, \quad \frac{\partial y^{d0}}{\partial \pi^e} \Big|_{x=\bar{x}} = \frac{i_1 \bar{u} y^p}{\bar{u} y^p - \beta_{y^e}},$$

$$\frac{\partial y^{d0}}{\partial y^e} \Big|_{x=\bar{x}} = \frac{\bar{u} y^p \left((1 - \tau_w) U + (1 - U - \frac{\bar{r}}{\bar{u} y^p}) i_1 + \frac{i_2}{y^p} + \kappa \left(\frac{\beta_w (1 - \kappa_p)}{\bar{u} y^p} \bar{V} - \frac{\beta_p (1 - \kappa_w)}{y^p} \right) \right) - \beta_{y^e}}{\bar{u} y^p - \beta_{y^e}}.$$

Po wyznaczeniu wyżej przedstawionych wartości pochodnych funkcji (3.1.35)-(3.1.36) dla $\beta = 0$ możemy przejść do wyznaczenia elementów macierzy J_7^0 . Przykładowo pokażemy sposób wyznaczenia dwóch pierwszych elementów tej macierzy, czyli pochodnych F_{1u}^0 i F_{1l}^0 . Zgodnie z lematem 1 w funkcjach, których pochodne liczymy, wyzerowane są parametry opisane wektorem parametrów β . Pierwszym krokiem wyznaczenia F_{1u}^0 jest obliczenie pochodnej funkcji F_1 względem zmiennej U . Z (3.1.1) wynika, że (Zgodnie z lematem 1 w F_1 przed wyznaczeniem pochodnej zewnętrznej funkcji F_1 możemy wyzerować parametry opisane wektorem parametrów β):

$$\frac{\partial F_1}{\partial U} = \frac{\partial}{\partial U} \left(U \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \beta_p (\kappa_w - 1) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \beta_p (\kappa_w - 1) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + \quad (3.1.37) \\
&+ U \kappa \left(\left(\frac{\beta_w (1 - \kappa_p)}{l} \right) + \left(\frac{\beta_p (\kappa_w - 1)}{y^p} \right) \right) \frac{\partial y}{\partial U}.
\end{aligned}$$

Następnie do obliczonej pochodnej zewnętrznej w (3.1.37) podstawiamy wartości zmiennych U, l, m, π, y, v w stanie stacjonarnym, otrzymując

$$\left. \frac{\partial F_1^0}{\partial U} \right|_{x=\bar{x}} = \kappa \frac{\bar{u} y^p - (n + \delta + g) \left(\frac{\beta_w (1 - \kappa_p)}{\bar{u} y^p} \bar{V} + \frac{\beta_p (\kappa_w - 1)}{y^p} \right) \frac{\partial y}{\partial U}}{(1 - \tau_w) \bar{u} y^p} \bigg|_{x=\bar{x}}$$

z uwagi na to, że zgodnie z $\left. \frac{\partial y}{\partial U} \right|_{x=\bar{x}} = 0$ dostajemy:

$$F_{1u} = \left. \frac{\partial F_1}{\partial U} \right|_{x=\bar{x}} = 0. \quad (3.1.38)$$

Przejdźmy do wyznaczenia pochodnej F_{1l}^0 . Podobnie jak przy obliczaniu F_{1u}^0 pierwszym krokiem wyznaczenia F_{1l}^0 jest obliczenie pochodnej funkcji F_1 , tym razem względem zmiennej l :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F_1}{\partial l} &= \frac{\partial}{\partial l} \left(U \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \beta_p (\kappa_w - 1) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) \right) = \\
&= U \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) \frac{\frac{\partial y}{\partial l} l - y}{l^2} + \beta_p (\kappa_w - 1) \frac{\frac{\partial y}{\partial l}}{y^p} \right). \quad (3.1.39)
\end{aligned}$$

Następnie do obliczonej pochodnej zewnętrznej:

$$\frac{\partial F_1}{\partial l} = U \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) \frac{\frac{\partial y}{\partial l} l - y}{l^2} + \beta_p (\kappa_w - 1) \frac{\frac{\partial y}{\partial l}}{y^p} \right)$$

podstawiamy wartości zmiennych U, l, m, π, y, v, b w stanie stacjonarnym oraz wyznaczoną wcześniej wartość pochodnej $\frac{\partial y}{\partial l}$ w stanie stacjonarnym dla wyzerowanego wektora parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$, równą:

$$\left. \frac{\partial y^0}{\partial l} \right|_{x=\bar{x}} = 0.$$

Po przekształceniach ostatecznie otrzymujemy:

$$F_{1l}^0 = -\bar{U} \kappa \beta_w (1 - \kappa_p) \frac{\bar{V}^2}{\bar{u} y^p}. \quad (3.1.40)$$

W podobny sposób wyznaczamy pozostałe elementy macierzy Jacobiego J_7^0 , licząc pochodne funkcji (3.1.1) – (3.1.7) względem zmiennych $U, l, m, \pi^e, y^e, v, b$ w stanie stacjonarnym dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$. Pełny wykaz tych pochodnych prezentujemy poniżej. Dla uproszczenia zapisu stosujemy następujące podstawienia:

$$y_{ye}^d = \frac{\bar{u}y^p \left((1-\tau_w)\bar{U} + i_1\bar{U} + \frac{i_2}{y^p} + \kappa \left(\frac{\beta_w(1-\kappa_p)}{\bar{u}y^p} \bar{V} - \frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p} \right) - i_1 + \frac{i_1}{\bar{u}y^p} \bar{r} + \beta_{ye} \right)}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}},$$

$$\bar{r} = \bar{u}y^p - \frac{\bar{u}y^p - (n+\delta+g)}{(1-\tau_w)} - \delta + \mu - n,$$

$$\bar{U} = \frac{\bar{u}y^p - (n+\delta+g)}{(1-\tau_w)\bar{u}y^p}.$$

Elementy pierwszej wiersza macierzy J_7^0 stanowią wartości pochodnych w stanie stacjonarnym dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$ obliczonych dla funkcji:

$$F_1(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b, y, y^d) = U\kappa \left(\beta_w(1-\kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p(1-\kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right).$$

Pochodne te opisane są przez następujące wzory:

$$F_{1u}^0 = 0, \quad F_{1l}^0 = -\bar{U}\kappa\beta_w(1-\kappa_p)\frac{\bar{V}^2}{\bar{u}y^p},$$

$$F_{1m}^0 = 0, \quad F_{1\pi^e}^0 = 0, \quad F_{1y^e}^0 = \bar{U}\kappa \left(\frac{\beta_w(1-\kappa_p)}{\bar{u}y^p} \bar{V} - \frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p} \right), \quad F_{1v}^0 = F_{1b}^0 = 0.$$

Elementy drugiej wiersza macierzy J_7^0 stanowią wartości pochodnych w stanie stacjonarnym dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$ obliczonych dla funkcji:

$$F_2(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b, y, y^d) = \\ = l \left(n - \left(\hat{U} + n + \beta_{ye} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right) - i_1 \left(y^e - Uy - \delta - \xi - \left(\frac{hy^e}{m} - \pi^e \right) \right) - i_2 \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right).$$

Pochodne te opisane są przez następujące wzory:

$$F_{2u}^0 = -\frac{(\bar{u}y^p)^2}{\bar{V}} \left(\frac{(1-\tau_w)\beta_{ye} - i_1\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right), \quad F_{2l}^0 = \kappa\beta_w(1-\kappa_p)\bar{V} \left(\frac{\bar{u}y^p - 2\beta_{ye}}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right),$$

$$F_{2m}^0 = -\frac{i_1}{\bar{V}h} \left(\frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right) \left(\bar{u}y^p - \frac{\bar{u}y^p - (n+\delta+g)}{(1-\tau_w)} - \delta + \mu - n \right)^2,$$

$$F_{2\pi^e}^0 = \frac{i_1}{\bar{V}} \frac{-(\bar{u}y^p)^2}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}},$$

$$F_{2y^e}^0 = -\frac{\bar{u}y^p}{\bar{V}} \left(\kappa \left(\frac{\beta_w(1-\kappa_p)}{\bar{u}y^p} \bar{V} - \frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p} \right) + \beta_{ye} \left(\frac{y^{d,e}-1}{\bar{u}y^p} \right) + i_1 \left(1 - \bar{U} - \frac{\bar{r}}{\bar{u}y^p} \right) + \frac{i_2}{y^p} \right),$$

$$F_{2v}^0 = F_{2b}^0 = 0.$$

Elementy trzeciego wiersza macierzy J_7^0 stanowią wartości pochodnych w stanie stacjonarnym dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$ obliczonych dla funkcji:

$$F_3(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b, y, y^d) = m \left(\mu - \pi^e - n - \kappa \left(\kappa_p\beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \beta_p \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + \hat{l} \right).$$

Pochodne te opisane są przez następujące wzory:

$$F_{3u}^0 = -\frac{h}{\bar{r}} (\bar{u}y^p)^2 \left(\frac{\beta_{ye} - \tau_w \beta_{ye} - i_1 \bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right),$$

$$F_{3l}^0 = \frac{h}{\bar{r}} \kappa \beta_w \bar{V}^2 \left(\frac{\bar{u}y^p - 2\beta_{ye} + \kappa_p \beta_{ye}}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right),$$

$$F_{3m}^0 = -i_1 \left(\bar{u}y^p - \frac{\bar{u}y^p - (n + \delta + g)}{(1 - \tau_w)} - \delta + \mu - n \right) \left(\frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right),$$

$$F_{3\pi^e}^0 = -\frac{h\bar{u}y^p}{\bar{r}} \left(1 + \frac{i_1 \bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right),$$

$$F_{3y^e}^0 = -\frac{h\bar{u}y^p}{\bar{r}} \left(\frac{\kappa \beta_w}{\bar{u}y^p} \bar{V} + \frac{\kappa_w \kappa \beta_p}{y^p} + \beta_{ye} \left(\frac{y_{ye}^d - 1}{\bar{u}y^p} \right) + i_1 \left(1 - \bar{U} - \frac{\bar{r}}{\bar{u}y^p} \right) + \frac{i_2}{y^p} \right),$$

$$F_{3v}^0 = F_{3b}^0 = 0.$$

Elementy czwartego wiersza macierzy J_7^0 stanowią wartości pochodnych w stanie stacjonarnym dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$ obliczonych dla funkcji:

$$\begin{aligned} F_4(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b, y, y^d) = \\ = \beta_{\pi^e} \left(\alpha \left(\kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \beta_p \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) + \pi^e \right) + (1 - \alpha)(\mu - n) - \pi^e \right) \end{aligned}$$

Pochodne te opisane są przez następujące wzory:

$$F_{4U}^0 = 0, \quad F_{4l}^0 = 0, \quad F_{4m}^0 = 0, \quad F_{4\pi^e}^0 = -\beta_{\pi^e}, \quad F_{4y^e}^0 = 0, \quad F_{4v}^0 = 0, \quad F_{4b}^0 = 0.$$

Elementy piątego wiersza macierzy J_7^0 stanowią wartości pochodnych w stanie stacjonarnym dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$ obliczonych dla funkcji:

$$F_5(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b, y, y^d) = y^e \left(\hat{U} + n + \beta_{ye} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) - n + \hat{l} \right)$$

Pochodne te opisane są przez następujące wzory:

$$F_{5u}^0 = (\bar{u}y^p)^2 i_1,$$

$$F_{5l}^0 = 0,$$

$$F_{5m}^0 = -\frac{i_1}{h} \left(\bar{u}y^p - \frac{\bar{u}y^p - (n + \delta + g)}{(1 - \tau_w)} - \delta + \mu - n \right)^2,$$

$$F_{5\pi^e}^0 = -i_1 \bar{u}y^p,$$

$$F_{5y^e}^0 = \beta_{ye} + \kappa \beta_p (1 - \kappa_w) \bar{u} - \bar{u}y^p i_1 \left(1 - \bar{U} - \frac{\bar{r}}{\bar{u}y^p} \right) - \bar{u}y^p \frac{i_2}{y^p},$$

$$F_{5v}^0 = 0, \quad F_{5b}^0 = 0.$$

Elementy szóstego wiersza macierzy J_7^0 stanowią wartości pochodnych w stanie stacjonarnym dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$ obliczonych dla funkcji:

$$F_6(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b, y, y^d) = y - y^d - v(n - \hat{l}).$$

Pochodne opisane są przez następujące wzory:

$$F_{6u}^0 = -\frac{1-\tau_w-i_1}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}(\bar{u}y^p)^2, \quad F_{6l}^0 = -\frac{\kappa\beta_w(1-\kappa_p)\bar{V}^2}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}},$$

$$F_{6m}^0 = -\frac{i_1\bar{r}^2}{(\bar{u}y^p-\beta_{ye})h}, \quad F_{6\pi^e}^0 = -\frac{i_1\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}},$$

$$F_{6y^e}^0 = 1 - \frac{\bar{u}y^p\left((1-\tau_w)\bar{U}+i_1\bar{U}+\frac{i_2}{y^p}+\kappa\left(\frac{\beta_w(1-\kappa_p)\bar{V}}{\bar{u}y^p}-\frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p}\right)-i_1+\frac{\bar{r}i_1}{\bar{u}y^p}+\beta_{ye}\right)}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}},$$

$$F_{6v}^0 = -n, \quad F_{6b}^0 = 0.$$

Elementy siódmego wiersza macierzy J_7^0 stanowią wartości pochodnych w stanie stacjonarnym dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$ obliczonych dla funkcji:

$$\frac{\partial y^{d0}}{\partial U}\Big|_{x=\bar{x}} = \frac{1-\tau_w-i_1}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}(\bar{u}y^p)^2, \quad \frac{\partial y^{d0}}{\partial l}\Big|_{x=\bar{x}} = -\frac{\kappa\beta_w(1-\kappa_p)\bar{V}^2}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}, \quad \frac{\partial y^{d0}}{\partial v}\Big|_{x=\bar{x}} = \frac{\partial y^{d0}}{\partial b}\Big|_{x=\bar{x}} = 0,$$

$$\frac{\partial y^{d0}}{\partial m}\Big|_{x=\bar{x}} = \frac{i_1\bar{r}^2}{(\bar{u}y^p-\beta_{ye})h}, \quad \frac{\partial y^{d0}}{\partial \pi^e}\Big|_{x=\bar{x}} = \frac{i_1\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}},$$

$$\frac{\partial y^{d0}}{\partial y^e}\Big|_{x=\bar{x}} = \frac{\bar{u}y^p\left((1-\tau_w)U+(1-U-\frac{\bar{r}}{\bar{u}y^p})i_1+\frac{i_2}{y^p}+\kappa\left(\frac{\beta_w(1-\kappa_p)\bar{V}}{\bar{u}y^p}-\frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p}\right)\right)-\beta_{ye}}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}.$$

$$F_7(U, l, m, \pi^e, y^e, v, b, y, y^d) =$$

$$= g + \frac{hy^e}{m}b - \tau_c(y^d - Uy - \delta + \frac{hy^e}{m}b) - \tau_w Uy - b\left(n - \hat{l} + \kappa\left(\beta_p\left(\frac{y}{y^p} - u\right) + \kappa_p\beta_w\left(\frac{y}{l} - \bar{V}\right)\right) + \pi^e\right).$$

$$F_{7u}^0 = -\tau_c\left(\frac{1-\tau_w-i_1}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}(\bar{u}y^p)^2 - Uy\right) - \tau_w y - \bar{b}\bar{u}y^p\left(\frac{(1-\tau_w)\beta_{ye}-i_1\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}\right),$$

$$F_{7l}^0 = -\tau_c(y_l^d) - \bar{b}\kappa\beta_w\left(\left(1-\kappa_p\right)\left(\frac{\bar{u}y^p-2\beta_{ye}}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}\right)\frac{\bar{V}^2}{\bar{u}y^p} + \kappa_p\left(\frac{\bar{u}y^p}{l^2}\right)\right),$$

$$F_{7m}^0 = -\frac{hy^e}{m^2}b - \tau_c\left(\frac{i_1\bar{r}^2}{(\bar{u}y^p-\beta_{ye})h} - \frac{hy^e}{m^2}b\right) - \tau_w Uy - \bar{b}\frac{i_1}{h}\left(\frac{1}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}\right)\left(\bar{u}y^p - \frac{\bar{u}y^p-(n+\delta+g)}{(1-\tau_w)} - \delta + \mu - n\right)^2,$$

$$F_{7\pi^e}^0 = -\tau_c\left(\frac{i_1\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}\right) - \bar{b}i_1\frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}},$$

$$F_{7y^e}^0 = \frac{h}{m}b - \tau_c\left(y_{y^e}^d - U + \frac{h}{m}b\right) - \tau_w U - b\left(-\hat{l}_{y^e} + \kappa\left(\beta_p\left(\frac{1}{y^p}\right) + \kappa_p\beta_w\left(\frac{1}{l}\right)\right)\right),$$

$$\text{gdzie } \hat{l}_{y^e} = -\left(\kappa\left(\frac{\beta_w(1-\kappa_p)}{\bar{u}y^p}\bar{V} - \frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p}\right) + \beta_{ye}\left(\frac{y_{y^e}^d-1}{\bar{u}y^p}\right) + i_1\left(1 - \bar{U} - \frac{\bar{r}}{\bar{u}y^p}\right) + \frac{i_2}{y^p}\right)$$

$$\text{oraz } y_{y^e}^d = \frac{\bar{u}y^p\left((1-\tau_w)U+(1-U-\frac{\bar{r}}{\bar{u}y^p})i_1+\frac{i_2}{y^p}+\kappa\left(\frac{\beta_w(1-\kappa_p)\bar{V}}{\bar{u}y^p}-\frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p}\right)\right)-\beta_{ye}}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}.$$

$$F_{7v}^0 = 0,$$

$$F_{7b}^0 = (1 - \tau_c)\bar{r} - \mu.$$

Jak wynika z przedstawionych powyżej obliczeń, macierz J_7^0 ma następującą strukturę z punktu widzenia jej elementów zerowych.

$$J_7^0 = \begin{pmatrix} 0 & F_{1l}^0 & 0 & 0 & F_{1ye}^0 & 0 & 0 \\ F_{2u}^0 & F_{2l}^0 & F_{2m}^0 & F_{2\pi e}^0 & F_{2ye}^0 & 0 & 0 \\ F_{3u}^0 & F_{3l}^0 & F_{3m}^0 & F_{3\pi e}^0 & F_{3ye}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{4\pi e}^0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{5u}^0 & 0 & F_{5m}^0 & F_{5\pi e}^0 & F_{5ye}^0 & 0 & 0 \\ F_{6u}^0 & F_{6l}^0 & F_{6m}^0 & F_{6\pi e}^0 & F_{6ye}^0 & F_{6v}^0 & 0 \\ F_{7u}^0 & F_{7l}^0 & F_{7m}^0 & F_{7\pi e}^0 & F_{7ye}^0 & 0 & F_{7b}^0 \end{pmatrix}. \quad (3.1.41)$$

3.2.3. Redukcja stopni wielomianów

Lemat 2. Macierz J_7^0 ma trzy ujemne wartości własne $\lambda_1^0 = -\beta_{\pi e} < 0$, $\lambda_2^0 = -n < 0$ oraz $\lambda_3^0 = (1 - \tau_c)\bar{r} - \mu < 0$.

Dowód lematu 2

Po rozwinięciu wielomian charakterystyczny W_7^0 macierzy Jacobiego J_7^0 możemy przedstawić w postaci

$$W_7^0(\lambda) = \det(J_7^0 - \lambda I) = (F_{7b}^0 - \lambda)(F_{4\pi e}^0 - \lambda)(F_{6v}^0 - \lambda) \cdot W_4^0(\lambda) \quad (3.1.42)$$

gdzie

$$W_4^0(\lambda) = \det(J_4^0 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & F_{1l}^0 & 0 & F_{1ye}^0 \\ F_{2u}^0 & F_{2l}^0 - \lambda & F_{2m}^0 & F_{2ye}^0 \\ F_{3u}^0 & F_{3l}^0 & F_{3m}^0 - \lambda & F_{3ye}^0 \\ F_{5u}^0 & 0 & F_{5m}^0 & F_{5ye}^0 - \lambda \end{pmatrix} \quad (3.1.43)$$

jest wielomianem czwartego stopnia zmiennej λ .

Z (3.1.42) oraz postaci pochodnych F_{7b}^0 , $F_{4\pi e}^0$, F_{6v}^0 wynika natychmiast, że wielomian $W_7^0(\lambda)$ ma trzy ujemne pierwiastki rzeczywiste:

$$\lambda_1^0 = -\beta_{\pi e} < 0, \lambda_2^0 = -n < 0 \text{ oraz } \lambda_3^0 = (1 - \tau_c)\bar{r} - \mu < 0 \text{ (założenie 3.1.5)}. \quad (3.44)$$

■

Pozostałe cztery pierwiastki λ_4^0 , λ_5^0 , λ_6^0 , λ_7^0 wielomianu $W_7^0(\lambda)$ są równocześnie pierwiastkami wielomianu $W_4^0(\lambda)$.

Założmy dodatkowo, że oprócz wektora $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$ także $\beta_w = 0$ i oznaczmy przez J_4^{00} macierz J_4^0 , w której $\beta_w = 0$.

Oznaczmy przez λ_4^{00} , λ_5^{00} , λ_6^{00} , λ_7^{00} pierwiastki wielomianu:

$$W_4^{00}(\lambda) = \det(J_4^{00} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 & F_{1y^e}^{00} \\ F_{2u}^{00} & -\lambda & F_{2m}^{00} & F_{2y^e}^{00} \\ F_{3u}^{00} & 0 & F_{3m}^{00} - \lambda & F_{3y^e}^{00} \\ F_{5u}^{00} & 0 & F_{5m}^{00} & F_{5y^e}^{00} - \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.1.45)$$

Z (3.1.45) wynika, że jeden z pierwiastków wielomianu $W_4^{00}(\lambda)$, oznaczmy go przez λ_4^{00} wartość równą zero:

$$\lambda_4^{00} = 0.$$

Równanie charakterystyczne macierzy J_4^{00} ma zatem postać

$$W_4^{00}(\lambda) = \lambda W_3^{00}(\lambda) = \lambda \cdot \det(J_3^{00} - \lambda I) = 0, \quad (3.1.46)$$

gdzie

$$J_3^{00} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_{1y^e}^{00} \\ F_{3u}^{00} & F_{3m}^{00} & F_{3y^e}^{00} \\ F_{5u}^{00} & F_{5m}^{00} & F_{5y^e}^{00} \end{pmatrix}. \quad (3.1.47)$$

Do założeń $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$, $\beta_w = 0$ dodajmy jeszcze, że $\beta_p = 0$ i oznaczmy przez J_4^{000} szczególną postać macierzy J_4^{00} odpowiadającą temu założeniu³⁷.

Rozpatrzmy wielomian

$$W_3^{000}(\lambda) = \det(J_3^{000} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ F_{3u}^{000} & F_{3m}^{000} - \lambda & F_{3y^e}^{000} \\ F_{5u}^{000} & F_{5m}^{000} & F_{5y^e}^{000} - \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.1.48)$$

Po rozwinięciu wielomian ten możemy przedstawić w postaci:

$$W_3^{000}(\lambda) = \lambda \cdot W_2^{000}(\lambda) = \lambda \cdot \det(J_2^{000} - \lambda I) \quad (3.1.49)$$

gdzie

$$J_2^{000} = \begin{pmatrix} F_{3m}^{000} & F_{3y^e}^{000} \\ F_{5m}^{000} & F_{5y^e}^{000} \end{pmatrix}$$

Jak wynika z (3.1.49), jeden z trzech pierwiastków λ_5^{000} , λ_6^{000} , λ_7^{000} wielomianu $W_3^{000}(\lambda)$ jest równy zero. Przyjmijmy, że

$$\lambda_5^{000} = 0.$$

³⁷ Dowód przeprowadza się w trzech krokach, ponieważ przy redukcji wielomianu wyjściowego w jednym kroku ($\beta, \beta_w, \beta_p = 0$) do wielomianu drugiego stopnia, otrzymamy dwie zerowe wartości własne i skorzystanie z faktu, że wyznacznik dowolnej macierzy równy jest iloczynowi jego wartości własnych, czyli pierwiastków charakterystycznych nie pozwoli ocenić czy pierwiastki te dla $\beta, \beta_w, \beta_p > 0$ mają ujemną część rzeczywistą.

Lemat 3. Oba pierwiastki λ_6^{000} i λ_7^{000} wielomianu $W_2^{000}(\lambda) = \det(J_2^{000} - \lambda I)$ albo są ujemne, albo mają ujemne części rzeczywiste.

Dowód lematu 3

Wartości własne macierzy J_2^{000} są pierwiastkami równania charakterystycznego:

$$\det(\lambda J_2^{000} - \lambda I) = 0 \quad (3.1.50)$$

równoważnego następującemu równaniu drugiego stopnia:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0 \quad (3.1.51)$$

o współczynnikach:

$$a_1 = -\text{tr} J_2^{000} = -(F_{3m}^{000} + F_{5y^e}^{000}), \quad (3.1.52)$$

$$a_2 = \det J_2^{000} = F_{3m}^{000} F_{5y^e}^{000} - F_{5m}^{000} F_{3y^e}^{000}, \quad (3.1.53)$$

gdzie

$$F_{3m}^{000} = -i_1 \bar{r} \left(\frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} \right),$$

$$F_{3y^e}^{000} = -\frac{h\bar{u}y^p}{\bar{r}} \left(\frac{\kappa\beta_w}{\bar{u}y^p} \bar{V} + \frac{\kappa_w\kappa\beta_p}{y^p} + \beta_{y^e} \left(\frac{y_{y^e}^d - 1}{\bar{u}y^p} \right) + i_1 \left(1 - \bar{U} - \frac{\bar{r}}{\bar{u}y^p} \right) + \frac{i_2}{y^p} \right),$$

$$F_{5y^e}^{000} = \beta_{y^e} - i_1(\delta - \mu + n) - \bar{u}i_2,$$

$$F_{5m}^{000} = -\frac{i_1}{h} \bar{r}^2.$$

Zgodnie z twierdzeniem Routha-Hurwitza wszystkie wartości własne macierzy (3.1.47) mają ujemne części rzeczywiste, wtedy i tylko wtedy gdy:

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0. \quad (3.1.54)$$

Aby udowodnić lemat 3, wystarczy zatem pokazać, że spełnione są nierówności (3.1.54).

Kluczowe znaczenie ma tutaj ustalenie znaków wszystkich pochodnych tworzących macierz J_2^{000} . Z założeń 2, 3 i 6 wynika, że $F_{3m}^{000} < 0$ oraz $F_{5y^e}^{000} < 0$. Stąd

$$a_1 = -\text{tr} J_2^{000} > 0. \quad (3.1.55)$$

W przypadku współczynnika $a_2 = \det J_2^{000} = F_{3m}^{000} F_{5y^e}^{000} - F_{5m}^{000} F_{3y^e}^{000}$, po podstawieniach, dostajemy najpierw skomplikowane wyrażenie:

$$\begin{aligned} a_2 &= -i_1 \bar{r} \left(\frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} \right) (\beta_{y^e} + i_1(\mu - n - \delta) - \bar{u}i_2) - \\ &\quad - \left(-\frac{i_1}{h} \bar{r}^2 \right) \left(-\frac{h\bar{u}y^p}{\bar{r}} \left(\beta_{y^e} \left(\frac{y_{y^e}^d - 1}{\bar{u}y^p} \right) - \frac{i_1}{\bar{u}y^p} (\mu - n - \delta) + \frac{i_2}{y^p} \right) \right) = \\ &= i_1 \bar{r} \left(-\left(\frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} \right) (\beta_{y^e} + i_1(\mu - n - \delta) - \bar{u}i_2) - \beta_{y^e} y_{y^e}^d + \beta_{y^e} + i_1(\mu - n - \delta) - i_2 \bar{u} \right) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= i_1 \bar{r} \left(-\left(\frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}}\right) \beta_{ye} - \left(\frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}}\right) i_1(\mu - n - \delta) + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}}\right) \bar{u}i_2 - \beta_{ye}y_{ye}^d + \beta_{ye} + i_1(\mu - n - \delta) - i_2\bar{u} \right) = \\
&= i_1 \bar{r} \left(\left(-\frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} - y_{ye}^d + 1\right) \beta_{ye} - i_1(\mu - n - \delta) \left(\frac{\beta_{ye}}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}}\right) + \bar{u}i_2 \frac{\beta_{ye}}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right) = \\
&\quad = i_1 \bar{r} \beta_{ye} \left(\left(-\frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} - y_{ye}^d + 1\right) + \frac{\bar{u}i_2 - i_1(\mu - n - \delta)}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right) = \\
&= i_1 \bar{r} \beta_{ye} \left(\frac{-\beta_{ye} - \bar{u}y^p + (n + \delta + g) + i_1(\delta - \mu + n) - \beta_{ye}\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} + \frac{i_1(\delta - \mu + n)}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right).
\end{aligned}$$

Po uproszczeniach ostatecznie otrzymujemy:

$$a_2 = i_1 \bar{r} \beta_{ye} \left(\frac{-\beta_{ye} - \bar{u}y^p + (n + \delta + g) + 2i_1(\delta - \mu + n) - \beta_{ye}\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right)$$

skąd wynika, że jeżeli parametr $i_1 > 0$ jest odpowiednio duży (założenie 3.1.3), spełniona jest nierówność $\delta - \mu + n > 0$ (założenie 3.1.2) oraz parametr $\beta_{ye} > 0$ jest odpowiednio mały (założenie 3.1.1) to

$$a_2 = \det J_2^{000} > 0. \quad (3.1.56)$$

Warunki (3.1.55) i (3.1.56), zgodnie z twierdzeniem Routha-Hurwitza (Gandolfo (2005, pp. 221 – 222)) implikują, że obie wartości własne λ_6^{000} oraz λ_7^{000} macierzy J_2^{000} mają ujemne części rzeczywiste. ■

3.2.4. Przywracanie dodatnich wartości parametrów reakcji

W dalszej części dowodu twierdzenia 1, zaczynając od lematu 3, będziemy stopniowo przywracać dodatnie wartości chwilowo wyzerowanych parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha)$, β_w , β_p i ponownie rozpatrywać wielomiany charakterystyczne wyższych stopni $W_3^{00}(\lambda)$, $W_4^0(\lambda)$, $W_7^0(\lambda)$, $W_7(\lambda)$, ustalając własności ich pierwiastków charakterystycznych (wartości własnych odpowiednich macierzy). W tym celu korzystać będziemy z lematu 3, z ciągłości wszystkich elementów macierzy J_3^{00} , J_4^0 , J_6^0 , J_6 względem parametrów $\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_w, \beta_p$, a także z ciągłości wartości własnych macierzy względem elementów macierzy. Ciągłość elementów wymienionych powyżej macierzy względem parametrów $\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_w, \beta_p$ wynika z analizy wzorów (3.1-3.7). Ciągłość wartości własnych macierzy względem elementów macierzy jest z kolei znanym faktem matematycznym. Korzystając z lematu 2 oraz znajomości elementów macierzy J_3^{00} , udowodnimy lemat 4.

Lemat 4. Dla odpowiednio małej wartości parametru $\beta_p > 0$ (i $\beta_w = 0$) wartości własne λ_5^{00} , λ_6^{00} , λ_7^{00} macierzy J_3^{00} , albo są liczbami ujemnymi, albo zespolonymi o ujemnej części rzeczywistej.

Dowód lematu 4

Porównajmy macierze:

$$J_3^{00} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_{1ye}^{00} \\ F_{3u}^{00} & F_{3m}^{00} & F_{3ye}^{00} \\ F_{5u}^{00} & F_{5m}^{00} & F_{5ye}^{00} \end{pmatrix} \text{ oraz } J_3^{000} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ F_{3u}^{000} & F_{3m}^{000} & F_{3ye}^{000} \\ F_{5u}^{000} & F_{5m}^{000} & F_{5ye}^{000} \end{pmatrix}.$$

Macierz J_3^{000} otrzymujemy z macierzy J_3^{00} przez wyzerowanie parametru reakcji $\beta_p > 0$ we wszystkich elementach macierzy J_3^{00} .

$$\text{Ponadto } J_3^{00} \rightarrow J_3^{000} \text{ gdy } \beta_p \rightarrow 0.$$

Zgodnie z (3.1.48) oraz (3.1.49)

$$W_3^{000}(\lambda) = \det(J_3^{000} - \lambda I) = \lambda \cdot \det(J_2^{000} - \lambda I), \quad (3.1.57)$$

co implikuje, że dwie wartości własne macierzy J_2^{000} są również wartościami własnymi macierzy J_3^{000} .

Z lematu 3 wiemy, że pierwiastki λ_6^{000} i λ_7^{000} wielomianu $W_2^{000}(\lambda) = \det(J_2^{000} - \lambda I)$ (otrzymanego dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$, $\beta_w = 0$ i $\beta_p = 0$), albo są ujemne, albo mają ujemne części rzeczywiste. W każdym z tych przypadków ich iloczyn jest liczbą rzeczywistą, dodatnią³⁸.

$$\lambda_6^{000} \cdot \lambda_7^{000} > 0. \quad (3.1.58)$$

Jak wynika z równania $W_3^{000}(\lambda) = \lambda W_2^{000}(\lambda)$ (zob. (3.1.49)) pierwiastki λ_6^{000} , λ_7^{000} są także pierwiastkami wielomianu $W_3^{000}(\lambda)$, którego trzecim pierwiastkiem jest $\lambda_5^{000} = 0$. Z uwagi na ciągłość macierzy J_3^{00} (zdefiniowanej dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$, $\beta_w = 0$ i $\beta_p > 0$) względem parametru $\beta_p \geq 0$, dla odpowiednio małej wartości $\beta_p > 0$ pierwiastki λ_6^{00} , λ_7^{00} wielomianu (odpowiadające pierwiastkom λ_6^{000} , λ_7^{000}) również, albo są ujemne, albo mają ujemne części rzeczywiste, skąd wynika, że także

$$\lambda_6^{00} \cdot \lambda_7^{00} > 0. \quad (3.1.59)$$

³⁸ Jeżeli pierwiastkami macierzy są liczby zespolone, to są to liczby zespolone sprzężone do siebie. Iloczyn liczby zespolonej i liczby do niej sprzężonej jest liczbą rzeczywistą nieujemną. Jeżeli liczba zespolona ma ujemną część rzeczywistą, to iloczyn tej liczby z liczbą sprzężoną do niej jest liczbą rzeczywistą dodatnią.

Z uwagi na to, że pierwiastki zespolone występują zawsze parami jako liczby zespolone sprzężone, trzeci pierwiastek wielomianu $W_3^{00}(\lambda)$, oznaczony symbolem λ_5^{00} , jest liczbą rzeczywistą. Aby udowodnić, że jest liczbą ujemną skorzystamy z faktu, że wyznacznik dowolnej macierzy równy jest iloczynowi jego wartości własnych, czyli pierwiastków charakterystycznych³⁹, a zatem

$$\det J_3^{00} = \lambda_5^{00} \cdot \lambda_6^{00} \cdot \lambda_7^{00}. \quad (3.1.60)$$

Wykażemy, że $\det J_3^{00} < 0$ co, wobec nierówności $\lambda_6^{00} \cdot \lambda_7^{00} > 0$ implikuje, że $\lambda_5^{00} < 0$.

Z (3.1.43) wynika, że wyznacznik (3.1.60) możemy przedstawić w postaci:

$$\det J_3^{00} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_{1ye}^{00} \\ F_{3u}^{00} & F_{3m}^{00} & F_{3ye}^{00} \\ F_{5u}^{00} & F_{5m}^{00} & F_{5ye}^{00} \end{pmatrix} = F_{1ye}^{00} \cdot \det \begin{pmatrix} F_{3u}^{00} & F_{3m}^{00} \\ F_{5u}^{00} & F_{5m}^{00} \end{pmatrix} \quad (3.1.61)$$

gdzie

$$F_{1ye}^{00} = \bar{U}\kappa \left(-\frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p} \right),$$

$$F_{3m}^{00} = -i_1 \left(\bar{u}y^p - \frac{\bar{u}y^p - (n+\delta+g)}{(1-\tau_w)} - \delta + \mu - n \right) \left(\frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right),$$

$$F_{3u}^{00} = -\frac{h}{\bar{r}} (\bar{u}y^p)^2 \left(\frac{\beta_{ye} - \tau_w \beta_{ye} - i_1 \bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right),$$

$$F_{5m}^{00} = -\frac{i_1}{h} \left(\bar{u}y^p - \frac{\bar{u}y^p - (n+\delta+g)}{(1-\tau_w)} - \delta + \mu - n \right)^2,$$

$$F_{5u}^{00} = (\bar{u}y^p)^2 i_1.$$

Po podstawieniach i uproszczeniach dostajemy:

$$\begin{aligned} \det J_3^{00} &= F_{1ye}^{00} (F_{3u}^{00} F_{5m}^{00} - F_{3m}^{00} F_{5u}^{00}) = \\ &= i_1 \bar{r} \bar{U} \kappa \left(-\frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p} \right) (\bar{u}y^p)^2 \left(\frac{((1-\tau_w)\beta_{ye})}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right). \end{aligned} \quad (3.1.62)$$

Wobec nierówności $0 < \kappa_w < 1$ oraz $0 < \tau_w < 1$ z (3.1.62) wynika, że dla odpowiednio małych wartości parametru $\beta_{ye} > 0$

$$\det J_3^{00} < 0.$$

³⁹ Wielomian charakterystyczny z definicji jest równy:

$$W(\lambda) = \det(J - \lambda I) = (A_1 - \lambda) \cdot \dots \cdot (A_n - \lambda).$$

Po wymnożeniu wyznacznika $\det(J - \lambda I)$ otrzymamy wielomian stopnia n , którego wyraz wolny jest równy iloczynowi wartości własnych. Tak więc $W(0) = \det(J) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$.

Stąd, biorąc pod uwagę (3.1.59) i (3.1.60), otrzymujemy, że dla odpowiednio małych wartości parametrów $\beta_p > 0$ i $\beta_{y^e} > 0$ trzecia wartość własna macierzy J_3^{00} jest liczbą ujemną $\lambda_5^{00} < 0$, a pierwiastki λ_6^{00} , λ_7^{00} , albo są ujemne, albo mają ujemne części rzeczywiste. ■

Ponizej, przywracając dodatnią wartość parametru β_w i korzystając z Lematu 4, udowodnimy lemat 5 dotyczący wartości własnych macierzy J_4^0 :

$$J_4^0 = \begin{pmatrix} 0 & F_{1l}^0 & 0 & F_{1y^e}^0 \\ F_{2u}^0 & F_{2l}^0 & F_{2m}^0 & F_{2y^e}^0 \\ F_{3u}^0 & F_{3l}^0 & F_{3m}^0 & F_{3y^e}^0 \\ F_{5u}^0 & 0 & F_{5m}^0 & F_{5y^e}^0 \end{pmatrix} \quad (3.1.62)$$

występujących w (3.1.41) - (3.1.42), zdefiniowane dla $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$, $\beta_p > 0$ oraz $\beta_w > 0$.

Lemat 5. Przy założeniach 3.1.1-3.1.6 dla odpowiednio małych wartości parametrów $\beta_p > 0$, $\beta_w > 0$ oraz $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) = 0$ wszystkie wartości własne λ_4^0 , λ_5^0 , λ_6^0 , λ_7^0 macierzy J_4^0 , albo są liczbami ujemnymi, albo zespolonymi o ujemnej części rzeczywistej.

Dowód lematu 5

Dowód lematu 5 jest podobny do dowodu lematu 4. Dowód zaczniemy od rozważenia macierzy:

$$J_4^{00} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & F_{1y^e}^{00} \\ F_{2u}^{00} & 0 & F_{2m}^{00} & F_{2y^e}^{00} \\ F_{3u}^{00} & 0 & F_{3m}^{00} & F_{3y^e}^{00} \\ F_{5u}^{00} & 0 & F_{5m}^{00} & F_{5y^e}^{00} \end{pmatrix},$$

która pojawia się w (3.1.42). Macierz J_4^{00} jest otrzymywana z J_4^0 poprzez zerowanie parametru β_w we wszystkich elementach macierzy J_4^0 . Poza tym mamy:

$$J_4^0 \rightarrow J_4^{00} \text{ gdy } \beta_w \rightarrow 0. \quad (3.1.63)$$

Zgodnie z (3.1.43)

$$W_4^{00}(\lambda) = \det(J_4^{00} - \lambda I) = \lambda \cdot \det(J_3^{00} - \lambda I) = \lambda \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & F_{1y^e}^{00} \\ F_{3u}^{00} & F_{3m}^{00} - \lambda & F_{3y^e}^{00} \\ F_{5u}^{00} & F_{5m}^{00} & F_{5y^e}^{00} - \lambda \end{pmatrix} \quad (3.1.64)$$

Z równania (3.1.64) wynika, że macierz J_4^{00} ma trzy wartości własne λ_5^{00} , λ_6^{00} , λ_7^{00} , które są identyczne z wartościami własnymi macierzy J_3^{00} . Jak pokazano w dowodzie lematu 4, dwie wartości własne λ_6^{00} i λ_7^{00} są liczbami ujemnymi lub liczbami zespolonymi z ujemnymi częściami rzeczywistymi. Trzecia wartość własna λ_5^{00} macierzy J_4^{00} jest liczbą ujemną,

$$\lambda_5^{00} < 0. \quad (3.1.65)$$

Z równania (3.1.65) wynika również, że czwarta wartość własna λ_4^{00} macierzy J_4^{00} jest równa zeru,

$$\lambda_4^{00} = 0. \quad (3.1.65)$$

Stąd, biorąc pod uwagę (3.1.63) i ciągłość wartości własnych macierzy J_4^0 względem jej elementów, dla odpowiednio małej wartości parametru $\beta_w > 0$ trzy wartości własne λ_5^0 , λ_6^0 , λ_7^0 macierzy J_4^0 (odpowiadające λ_5^{00} , λ_6^{00} , λ_7^{00}) są również liczbami ujemnymi lub zespolonymi z ujemnymi częściami rzeczywistymi. Pozostaje do zbadania czwarta wartość własna λ_4^0 macierzy J_4^0 odpowiadająca $\lambda_4^{00} = 0$ macierzy J_3^{00} .

W tym celu określimy znak wyznacznika:

$$\det J_4^0 = \lambda_4^0 \cdot \lambda_5^0 \cdot \lambda_6^0 \cdot \lambda_7^0, \quad (3.1.66)$$

wykorzystując nierówności:

$$\lambda_5^{00} < 0, \quad \lambda_6^{00} \cdot \lambda_7^{00} > 0 \quad (3.1.67)$$

(druga nierówność jest identyczna z (3.1.59)).

Z (3.1.64) wynika, że

$$\det J_4^0 = -F_{1l}^0 \cdot A_1 - F_{1ye}^0 \cdot A_2 \quad (3.1.68)$$

gdzie

$$F_{1l}^0 = -\bar{U}\kappa\beta_w(1 - \kappa_p) \frac{\bar{V}^2}{\bar{u}y^p} < 0, \quad F_{1ye}^0 = \bar{U}\kappa \left(\frac{\beta_w(1-\kappa_p)}{\bar{u}y^p} \bar{V} - \frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p} \right),$$

$$A_1 = \det \begin{pmatrix} F_{2u}^0 & F_{2m}^0 & F_{2ye}^0 \\ F_{3u}^0 & F_{3m}^0 & F_{3ye}^0 \\ F_{5u}^0 & F_{5m}^0 & F_{5ye}^0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \det \begin{pmatrix} F_{2u}^0 & F_{2l}^0 & F_{2m}^0 \\ F_{3u}^0 & F_{3l}^0 & F_{3m}^0 \\ F_{5u}^0 & 0 & F_{5m}^0 \end{pmatrix}.$$

Elementy wyznacznika A_1 i A_2 mają postać:

$$F_{2l}^0 = \kappa\beta_w(1 - \kappa_p) \bar{V} \left(\frac{\bar{u}y^p - 2\beta_{ye}}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right),$$

$$F_{1ye}^0 = \bar{U}\kappa \left(\frac{\beta_w(1-\kappa_p)}{\bar{u}y^p} \bar{V} - \frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p} \right),$$

$$F_{2m}^0 = -\frac{i_1}{\bar{V}h} \left(\frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right) \left(\bar{u}y^p - \frac{\bar{u}y^p - (n+\delta+g)}{(1-\tau_w)} - \delta + \mu - n \right)^2,$$

$$F_{2u}^0 = -\frac{(\bar{u}y^p)^2}{\bar{V}} \left(\frac{(1-\tau_w)\beta_{ye} - i_1 \bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right),$$

$$F_{2m}^0 = -i_1 \left(\bar{u}y^p - \frac{\bar{u}y^p - (n+\delta+g)}{(1-\tau_w)} - \delta + \mu - n \right) \left(\frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right),$$

$$F_{3u}^0 = -\frac{h}{\bar{r}} (\bar{u}y^p)^2 \left(\frac{\beta_{ye} - \tau_w \beta_{ye} - i_1 \bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right),$$

$$F_{3l}^0 = \frac{h}{\bar{r}} \kappa \beta_w \bar{V}^2 \left(\frac{\bar{u}y^p - 2\beta_{ye} + \kappa_p \beta_{ye}}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right),$$

$$F_{5m}^0 = -\frac{i_1}{h} \left(\bar{u}y^p - \frac{\bar{u}y^p - (n+\delta+g)}{(1-\tau_w)} - \delta + \mu - n \right)^2,$$

$$F_{5u}^0 = (\bar{u}y^p)^2 i_1,$$

$$F_{1l}^0 = -\bar{U} \kappa \beta_w (1 - \kappa_p) \frac{\bar{V}^2}{\bar{u}y^p}.$$

Z powyższych wzorów wynika, że pierwsza składowa wyznacznika $\det J_4^0$ jest równa $(-F_{1l} \cdot A_1)$ i zbieżna do zera, gdy $0 < \kappa_p < 1$ jest zbieżne do 1 (założenie 3.1.4).

Wyznacznik A_2 po rozwinięciu i uproszczeniu przyjmuje postać:

$$A_2 = F_{5u}(-F_{3l}F_{2m}) + F_{5m}(F_{2u}F_{3l}). \quad (3.1.69)$$

Podstawiając elementy wyznacznika A_2 do (3.1.69), po uproszczeniu otrzymujemy:

$$A_2 = (\bar{u}y^p)^2 i_1 \bar{r} \kappa \beta_w \bar{V} \left(\frac{\bar{u}y^p - 2\beta_{ye} + \kappa_p \beta_{ye}}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right) \frac{(1-\tau_w)\beta_{ye}}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}}. \quad (3.1.70)$$

Z (3.1.70) wynika, że jeśli wartość parametru reakcji $\beta_{ye} > 0$ jest odpowiednio mała (założenie 3.1.1), to:

$$A_2 > 0.$$

Jednocześnie, gdy $0 < \kappa_p < 1$ jest zbieżne do 1 (założenie 3.1.4), wtedy

$$F_{1ye}^0 = \bar{U} \kappa \left(\frac{\beta_w(1-\kappa_p)}{\bar{u}y^p} \bar{V} - \frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p} \right) < 0.$$

W konsekwencji, jeśli wartość $0 < \kappa_p < 1$ jest odpowiednio bliska 1 (założenie 3.1.4), a wartości parametrów $\beta_p > 0$, $\beta_w > 0$ i $\beta_{ye} > 0$ są odpowiednio małe (założenie 3.1.1), wtedy

$$\det J_4^0 = \lambda_4^0 \cdot \lambda_5^0 \cdot \lambda_6^0 \cdot \lambda_7^0 > 0. \quad (3.1.71)$$

Ponieważ $\lambda_5^{00} < 0$, to odpowiadająca jej wartość własna λ_5^0 macierzy J_4^0 dla odpowiednio małej wartości parametru $\beta_w > 0$ może być liczbą ujemną lub liczbą zespoloną z ujemną częścią rzeczywistą.

Jeżeli $\lambda_5^0 < 0$, to ze względu na ciągłość wartości własnych macierzy J_4^0 względem jej elementów, uwzględniając (3.1.63) i (3.1.67), dla odpowiednio małej wartości parametru $\beta_w > 0$ otrzymujemy:

$$\lambda_5^0 \cdot \lambda_6^0 \cdot \lambda_7^0 < 0, \quad (3.1.72)$$

co w świetle (3.1.71) implikuje, że $\lambda_4^0 < 0$.

Rozważmy drugą możliwość, to znaczy tę, że wartość własna λ_5^0 jest liczbą zespoloną z ujemną częścią rzeczywistą. Następnie, ponieważ zespolone wartości własne (pierwiastki wielomianu) zawsze pojawiają się jako liczby sprzężone, czwarta wartość własna λ_4^0 musi być sprzężoną wartością λ_5^0 mającą tę samą ujemną część rzeczywistą co λ_5^0 ⁴⁰.

Wcześniej wykazaliśmy, że λ_5^0 , λ_6^0 i λ_7^0 są liczbami ujemnymi lub zespolonymi z ujemnymi częściami rzeczywistymi. Tak więc powyższe dwie uwagi dotyczące λ_4^0 uzupełniają dowód lematu 5.

■

Aby dokończyć cały dowód twierdzenia 1 o lokalnej asymptotycznej stabilności stanu stacjonarnego modelu (3.1.1)-(3.1.9) zauważmy, że zgodnie z lematami 1 i 5 wszystkie wartości własne $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \lambda_3^0, \lambda_4^0, \lambda_5^0, \lambda_6^0, \lambda_7^0$ macierzy J_7^0 zdefiniowanej w (3.1.54) są liczbami ujemnymi lub zespolonymi z ujemnymi częściami rzeczywistymi, ponieważ

$$W_7^0(\lambda) = \det(J_7^0 - \lambda I) = ((1 - \tau_c)\bar{r} - \mu - \lambda)(-n - \lambda)(-\beta_{\pi^e} - \lambda) \cdot W_4^0(\lambda) \quad (3.1.73)$$

Macierz J_7^0 otrzymuje się z macierzy Jacobiego J_7 poprzez wyzerowanie wektora parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha) > 0$. Ponadto mamy:

$$J_7^0 \rightarrow J_7 \quad \text{gdy } \beta \rightarrow 0.$$

W związku z tym oraz z ciągłości wartości własnych macierzy J_7 względem jej elementów, możemy wnioskować, że wszystkie wartości własne $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6, \lambda_7$ macierzy Jacobiego J_7 są liczbami ujemnymi lub zespolonymi z ujemnymi częściami rzeczywistymi. Dowodzi to prawdziwości twierdzenia 1 o lokalnej, asymptotycznej stabilności modelu (3.1.1) – (3.1.9)

■

⁴⁰ Iloczyn sprzężonych liczb zespolonych $\lambda_4^0 = a + ib$ oraz $\lambda_5^0 = (a - ib)$ różnych od zera jest zawsze dodatnie, ponieważ $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 > 0$. Stąd w świetle (3.1.65) mamy $\lambda_4^0 \cdot \lambda_5^0 > 0$ oraz $\lambda_6^0 \cdot \lambda_7^0 > 0$, co oznacza, że $\det J_4^0 = \lambda_4^0 \cdot \lambda_5^0 \cdot \lambda_6^0 \cdot \lambda_7^0 > 0$.

3.3. Twierdzenie o stabilności modelu KMG z regułą Taylora i kredytem inwestycyjnym

W tym podrozdziale zajmiemy się udowodnieniem twierdzenia o lokalnej asymptotycznej stabilności stanu stacjonarnego modelu KMGT z kredytem inwestycyjnym.

Przed przystąpieniem do sformułowania twierdzenia o stabilności i prezentacji jego dowodu przypomnijmy intensywną postać modelu KMGT z kredytem inwestycyjnym z rozdziału drugiego.

Model KMGT z kredytem inwestycyjnym w postaci intensywnej

$$\dot{U} = U\kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p(1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right), \quad (3.2.1)$$

$$\dot{l} = l \left(\begin{array}{c} -i_1(\rho^e - \bar{\rho}) - i_2 \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) - i_3(\bar{\lambda} - \lambda) - \\ -\kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p(1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) - \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \end{array} \right), \quad (3.2.2)$$

$$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e} \left(\alpha \left(\kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \beta_p \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) + \pi^e \right) + (1 - \alpha)(\mu - n) - \pi^e \right), \quad (3.2.3)$$

$$\dot{y}^e = y^e \left(\hat{U} + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) - n + \hat{l} \right), \quad (3.2.4)$$

$$\dot{v} = y - y^d - v(n - \hat{l}), \quad (3.2.5)$$

$$\dot{\lambda} = (1 - \lambda)(n - \hat{l}) - (1 - \tau_c)\rho^e - \left(\kappa \left(\kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \beta_p \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + \pi^e \right) \lambda, \quad (3.2.6)$$

$$\dot{r} = -\beta_{i_r}(r - \bar{r}) + \beta_{i_p} \left(\kappa \left(\kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) + \beta_p \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + \pi^e - \bar{\pi} \right) + \beta_{i_u} \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right), \quad (3.2.7)$$

$$\dot{m} = n - \hat{l} - y^e + Uy + \delta + g - \tau_w Uy - m(\hat{p} + n - \hat{l}), \quad (3.2.8)$$

$$\dot{b} = g + rb - \tau_c \rho - \tau_w Uy - b(n - \hat{l} + \hat{p}), \quad (3.2.9)$$

gdzie $\rho^e = y^e - Uy - \delta - r\lambda$, $\rho = y^d - Uy - \delta - r\lambda$

oraz

$$y^d = (1 - \tau_w)yU + i_1(y^e - yU - \delta - r\lambda - \bar{\rho}) + i_2(u - \bar{u}) - i_3\lambda + \delta + g + \kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p(1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right), \quad (3.2.10a)$$

$$y = y^e + \beta_n \beta_{N^d} y^e - \beta_n v + y^e \beta_Z \left(\kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{V} \right) - \beta_p(1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right). \quad (3.2.10b)$$

Wartości zmiennych powyższego modelu w stanie stacjonarnym opisują następujące równania:

$$\begin{aligned}\bar{U} &= \frac{\bar{c}}{(1-\tau_w)\bar{u}y^p}, \quad \bar{l} = \frac{\bar{u}y^p}{\bar{v}}, \quad \bar{y}^e = \bar{y}^d = \frac{\beta_n+n}{(1+\beta_n\beta_{Nd}+\beta_Zn)^{n+\beta_n}}\bar{u}y^p, \\ \bar{v} &= \frac{\bar{u}y^p-\bar{y}^e}{n}, \quad \bar{\lambda} = \frac{n-(\bar{y}^d-\bar{U}\bar{y}-\delta)(1-\tau_c)}{n-\bar{r}(1-\tau_c)}, \quad \bar{r} = r^o = \frac{\bar{y}^d-\bar{U}\bar{y}-\delta-\bar{p}}{\bar{\lambda}}, \\ \bar{\pi}^e &= \bar{\pi}, \quad \bar{m} = 0, \quad \bar{b} = \frac{g-\tau_c\bar{p}-\tau_w\bar{U}\bar{y}}{n+\bar{\pi}-\bar{r}}, \\ \bar{y} &= \bar{u}y^p, \quad \bar{\rho}^e = \bar{\rho} = \frac{(1-\bar{\lambda})n}{(1-\tau_c)}, \quad \bar{c} = \bar{y}^d - n - \delta - g.\end{aligned}$$

Analizowany stan stacjonarny jest lokalnie asymptotycznie stabilny. Definicja takiej stabilności w odniesieniu do stanu stacjonarnego modelu KMG (3.2.1) - (3.2.10b) jest następująca.

Definicja Stan stacjonarny $(\bar{U}, \bar{l}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{\lambda}, \bar{r}, \bar{m}, \bar{b})$ modelu (3.2.1) – (3.2.10b) jest lokalnie asymptotycznie stabilny, jeżeli istnieje takie jego otoczenie $U(\bar{U}, \bar{l}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{\lambda}, \bar{r}, \bar{m}, \bar{b})$, że każda dopuszczalna trajektoria modelu (3.2.1) – (3.2.10b), wychodząca ze stanu początkowego należącego do otoczenia $U(\bar{U}, \bar{l}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{\lambda}, \bar{r}, \bar{m}, \bar{b})$, jest zbieżna do stanu stacjonarnego.

W dowodzenie stabilności przyjmować będziemy następujące założenia:

Założenie 3.2.1. Wartości parametrów reakcji $\beta_Z, \beta_n, \alpha, \beta_p, \beta_w, \beta_{i_p}, \beta_{i_u} > 0$ są odpowiednio małe.

Parametry reakcji, o których mowa w założeniu 3.2.1 występują w równaniach:

- $Y = Y^e + \beta_Z \dot{Y}^e + \beta_n(N^d - N)$ - równanie behawioralne produkcji
- $\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e}(\alpha \hat{p} + (1 - \alpha)(\mu - n) - \pi^e)$ - dynamika oczekiwań inflacyjnych
- $\hat{p} = \beta_p(u - \bar{u}) + \kappa_p(\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p)\pi^e$ - inflacja rzeczywista
- $\hat{w} = \beta_w(V - \bar{V}) + \kappa_w \hat{p} + (1 - \kappa_w)\pi^e + n$ - dynamika płac nominalnych
- $\dot{r} = -\beta_{i_r}(r - r_o) + \beta_{i_p}(\hat{p} - \bar{\pi}) + \beta_{i_u}(u - \bar{u})$ - zmiana nominalnej stopy procentowej.

Zgodnie z Założeniem 3.2.1 produkcja Y jest określana głównie na podstawie oczekiwań popytowych Y^e . Zmiany oczekiwań inflacyjnych $\dot{\pi}^e$ są silnie stabilizowane przez stały czynnik $(\mu - n)$ odzwierciedlający inflację w stanie stacjonarnym. Ponadto odchylenia wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnych od jego normalnego poziomu $(u - \bar{u})$ w niewielkim stopniu wpływają na inflację \hat{p} , a odchylenia wskaźnika zatrudnienia od jego naturalnego poziomu $(V - \bar{V})$ słabo wpływają na dynamikę płacy nominalnej \hat{w} . Wrażliwość nominalnej stopy procentowej r na odchylenia stopy wzrostu cen od stopy

inflacji w stanie stacjonarnym ($\hat{p} - \bar{\pi}$) oraz na odchylenia wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnych od jego normalnego poziomu ($u - \bar{u}$) jest niewielka.

Założenie 3.2.2. Wartości parametrów reakcji $i_2, i_3 > 0$, występujących w równaniu opisującym wielkość inwestycji:

$$\bullet \quad I = i_1(\rho^e - \bar{\rho})K + i_2(u - \bar{u})K + i_3(\bar{\lambda} - \lambda)K + \hat{Y}^e K,$$

są odpowiednio duże.

Zgodnie z Założeniem 3.2.3 przyjmuje się, że wielkość inwestycji silnie reaguje na odchylenia wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnych od jego normalnego poziomu ($u - \bar{u}$) oraz na różnicę między granicznym poziomem zadłużenia w stosunku do nominalnej wartości kapitału rzeczowego a rzeczywistą wartością całkowitego zadłużenia sektora prywatnego w stosunku do nominalnej wartości kapitału rzeczowego ($\bar{\lambda} - \lambda$).

Założenie 3.2.3 Wartość parametru reakcji κ_p ($0 < \kappa_p < 1$), występującego w równaniu dynamiki płac nominalnych:

$$\hat{p} = \beta_p(u - \bar{u}) + \kappa_p(\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p)\pi^e,$$

jest odpowiednio bliska 1.

Zgodnie z Założeniem 3.2.4, stopa inflacji jest bardziej wrażliwa na różnicę między tempem wzrostu płac nominalnych \hat{w} a tempem wzrostu wydajności pracy $n = \dot{x}/x$ niż na oczekiwaną stopę inflacji π^e .

Założenie 3.2.4. Wartość parametru reakcji β_{y^e} , występującego w równaniu opisującym stopę wzrostu oczekiwanej sprzedaży:

$$\hat{Y}^e = \hat{w} + \beta_{y^e} \frac{Y^d - Y^e}{Y^e},$$

jest odpowiednio duża (spełniona jest nierówność $\beta_{y^e} > \bar{u}y^p$).

Stopa wzrostu oczekiwanej sprzedaży \hat{Y}^e silnie reaguje na względny błąd oczekiwań dotyczących wielkości realnego popytu $(Y^d - Y^e)/Y^e$.

Założenie 3.2.5. Spełniona jest nierówność

$$\bar{r} < n - \bar{\pi}.$$

Zgodnie z Założeniem 3.2.5 nominalna stopa procentowa w stanie stacjonarnym jest mniejsza od różnicy między tempem wzrostu wydajności pracy a stopą inflacji w stanie stacjonarnym.

Twierdzenie 2. *Jeżeli spełnione są założenia 3.2.1-3.2.5, to stan stacjonarny modelu (3.2.1) – (3.2.10b) jest lokalnie asymptotycznie stabilny.*

3.4. Dowód twierdzenia o stabilności modelu KMG z regułą Taylora i kredytem inwestycyjnym

3.4.1. Ogólna charakterystyka dowodu

W celu udowodnienia twierdzenia 2 wykażemy, że części rzeczywiste wszystkich wartości własnych (pierwiastków charakterystycznych) macierzy Jacobiego J_9 rozpatrywanego modelu w stanie stacjonarnym $\bar{x} = (\bar{U}, \bar{l}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{\lambda}, \bar{r}, \bar{m}, \bar{b})$ są ujemne. Aby to wykazać, macierz Jacobiego modelu w stanie stacjonarnym J_9 rozpatrywać będziemy jako ciągłą macierz funkcyjną parametrów: $\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_{i_p}, \beta_{i_u}, \beta_w, \beta_p, \beta_{y^e}$.

Macierz Jacobiego modelu (3.2.1) – (3.1.10b) w stanie stacjonarnym w ogólnym ujęciu ma postać:

$$J_9 = \begin{pmatrix} F_{1u} & F_{1l} & F_{2\pi^e} & F_{1y^e} & F_{1v} & F_{1\lambda} & F_{1r} & F_{1m} & F_{1b} \\ F_{2u} & F_{2l} & F_{2\pi^e} & F_{2y^e} & F_{2v} & F_{2\lambda} & F_{2r} & F_{2m} & F_{2b} \\ F_{3u} & F_{3l} & F_{3\pi^e} & F_{3y^e} & F_{3v} & F_{3\lambda} & F_{3r} & F_{3m} & F_{3b} \\ F_{4u} & F_{4l} & F_{4\pi^e} & F_{4y^e} & F_{4v} & F_{4\lambda} & F_{4r} & F_{4m} & F_{4b} \\ F_{5u} & F_{5l} & F_{5\pi^e} & F_{5y^e} & F_{5v} & F_{5\lambda} & F_{5r} & F_{5m} & F_{5b} \\ F_{6u} & F_{6l} & F_{6\pi^e} & F_{6y^e} & F_{6v} & F_{6\lambda} & F_{6r} & F_{6m} & F_{6b} \\ F_{7u} & F_{7l} & F_{7\pi^e} & F_{7y^e} & F_{7v} & F_{7\lambda} & F_{7r} & F_{7m} & F_{7b} \\ F_{8u} & F_{8l} & F_{8\pi^e} & F_{8y^e} & F_{8v} & F_{8\lambda} & F_{8r} & F_{8m} & F_{8b} \\ F_{9u} & F_{9l} & F_{9\pi^e} & F_{9y^e} & F_{9v} & F_{9\lambda} & F_{9r} & F_{9m} & F_{9b} \end{pmatrix}. \quad (3.2.11)$$

Elementy macierzy J_9 stanowią wartości pochodnych funkcji występujących po prawej stronie równań (3.2.1) – (3.2.9), liczone w stanie stacjonarnym $\bar{x} = (\bar{U}, \bar{l}, \bar{\pi}^e, \bar{y}^e, \bar{v}, \bar{\lambda}, \bar{r}, \bar{m}, \bar{b})$. W ogólnym zapisie przedstawiamy je następująco:

$$F_{ij} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}, \quad (i, j = 1, 2, \dots, 9) \quad (3.2.12)$$

gdzie indeks $i = 1, 2, \dots, 9$ odpowiada kolejnym funkcjom (3.2.1) - (3.2.9), natomiast:

$$x_1 = U, \quad x_2 = l, \quad x_3 = \pi^e, \quad x_4 = y^e, \quad x_5 = v, \quad x_6 = \lambda, \quad x_7 = r, \quad x_8 = m, \quad x_9 = b.$$

Wartości własne (pierwiastki charakterystyczne) $\lambda_1, \dots, \lambda_9$ macierzy J_9 są pierwiastkami równania charakterystycznego tej macierzy postaci

$$W_9(\lambda) = \det(J_9 - \lambda I) = 0. \quad (3.2.13)$$

Aby wykazać, że wszystkie pierwiastki λ_i mają ujemne części rzeczywiste, zastosujemy podobnie jak w dowodzie twierdzenia 1 metodę kaskady macierzy stabilnych (*cascade of stable matrices approach*). Metoda ta podzielona jest na cztery etapy. W pierwszym etapie wyznaczamy macierz Jacobiego w stanie stacjonarnym J_9 . W drugim etapie redukujemy wielomian charakterystyczny macierzy Jacobiego J_9 do wielomianu drugiego

stopnia W_2^{000} poprzez wyzerowanie parametrów reakcji. Zerowanie parametrów odbywa się w trzech krokach: najpierw zerujemy wektor parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_{i_p}, \beta_{i_u})$, następnie parametr β_w , a na końcu parametr β_p . W kolejnym etapie wykazujemy, że otrzymany wielomian drugiego stopnia W_2^{000} ma pierwiastki o ujemnych częściach rzeczywistych. W ostatnim czwartym etapie wykazujemy, w oparciu o wynik etapu trzeciego, że wyjściowa macierz Jacobiego J_9 ma pierwiastki o ujemnych częściach rzeczywistych poprzez stopniowe przywracanie dodatnich wartości wcześniej wyzerowanych parametrów.

3.4.2. Macierz Jacobiego modelu

W dowodzie stabilności stanu stacjonarnego interesować nas będą w pierwszej kolejności wartości pochodnych $F_{ij} = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}}$ macierzy Jacobiego J_9 (3.2.11) z wyzerowanym wektorem pięciu parametrów reakcji:

$$\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_{i_p}, \beta_{i_u}) = 0 . \quad (3.2.14)$$

Macierz takich pochodnych zapisywać będziemy jako:

$$J_9^0 = J_9(\beta = 0) . \quad (3.2.15)$$

W analogiczny sposób oznaczać będziemy poszczególne elementy macierzy J_9^0 :

$$F_{ij}^0 = \left. \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right|_{x=\bar{x}} (\beta = 0) , \quad (i, j = 1, \dots, 9) \quad (3.2.16)$$

gdzie

$$x_1 = U, \quad x_2 = l, \quad x_3 = \pi^e, \quad x_4 = y^e, \quad x_5 = v, \quad x_6 = \lambda, \quad x_7 = r, \quad x_8 = m, \quad x_9 = b.$$

Z uwagi na specyficzną postać funkcji $F_1(\cdot), \dots, F_9(\cdot)$ z układu (3.2.1)-(3.2.9), korzystając z lematu 1, pochodne F_{ij}^0 otrzymujemy zerując parametry $\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_{i_p}, \beta_{i_u}$ w równaniach (3.2.1)-(3.2.9), a dopiero później licząc pochodne tak zmodyfikowanych funkcji $F_1(\cdot), \dots, F_9(\cdot)$ względem zmiennych x_j .

Tak więc Macierz Jacobiego J_9 z wyzerowanymi parametrami $\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_{i_p}, \beta_{i_u}$ ma postać:

$$J_9^0 = \begin{pmatrix} 0 & F_{1l}^0 & 0 & F_{1y^e}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{2u}^0 & F_{2l}^0 & F_{2\pi^e}^0 & F_{2y^e}^0 & 0 & F_{2\lambda}^0 & F_{2r}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{3\pi^e}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{4u}^0 & 0 & F_{4\pi^e}^0 & F_{4y^e}^0 & 0 & F_{4\lambda}^0 & F_{4r}^0 & 0 & 0 \\ F_{5u}^0 & F_{5l}^0 & F_{5\pi^e}^0 & F_{5y^e}^0 & F_{5v}^0 & F_{5\lambda}^0 & F_{5r}^0 & 0 & 0 \\ F_{6u}^0 & F_{6l}^0 & F_{6\pi^e}^0 & F_{6y^e}^0 & 0 & F_{6\lambda}^0 & F_{6r}^0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{7l}^0 & F_{7\pi^e}^0 & F_{7y^e}^0 & 0 & 0 & F_{7r}^0 & 0 & 0 \\ F_{8u}^0 & F_{8l}^0 & F_{8\pi^e}^0 & F_{8y^e}^0 & F_{8v}^0 & F_{8\lambda}^0 & F_{8r}^0 & F_{8m}^0 & F_{7b}^0 \\ F_{9u}^0 & F_{9l}^0 & F_{9\pi^e}^0 & F_{9y^e}^0 & F_{9v}^0 & F_{9\lambda}^0 & F_{9r}^0 & F_{9m}^0 & F_{9b}^0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.17)$$

Pochodne F_{ij}^0 wyznaczamy analogicznie jak w dowodzie stabilności modelu KMG z rozdziału pierwszego. Większość z pochodnych funkcji F_{ij}^0 ma podobną postać do pochodnych macierzy Jacobiego modelu (3.1.1)-(3.1.7), dlatego w tym dowodzie przedstawimy jedynie te wartości pochodnych F_{ij}^0 , które są niezbędne w dowodzie stabilności stanu stacjonarnego.

Uwaga 1. Z postaci funkcji F_1, F_2, \dots, F_9 występujących po prawej stronie układu (3.2.1)-(3.2.9) wynika, że są to funkcje różniczkowalne względem wszystkich zmiennych modelu, to znaczy zmiennych U, l, \dots, m, b , zarówno dla wartości parametrów reakcji $\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_{i_p}, \beta_{i_u} > 0$, jak i $\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_{i_p}, \beta_{i_u} = 0$.

Wielomian charakterystyczny $W_9^0(\lambda)$ macierzy Jacobiego J_9^0 ma postać:

$$W_9^0(\lambda) = \det(J_9^0 - \lambda I) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} -\lambda & F_{1l}^0 & 0 & F_{1y^e}^0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{2u}^0 & F_{2l}^0 - \lambda & F_{2\pi^e}^0 & F_{2y^e}^0 & 0 & F_{2\lambda}^0 & F_{2r}^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & F_{3\pi^e}^0 - \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{4u}^0 & 0 & F_{4\pi^e}^0 & F_{4y^e}^0 - \lambda & 0 & F_{4\lambda}^0 & F_{4r}^0 & 0 & 0 \\ F_{5u}^0 & F_{5l}^0 & F_{5\pi^e}^0 & F_{5y^e}^0 & F_{5v}^0 - \lambda & F_{5\lambda}^0 & F_{5r}^0 & 0 & 0 \\ F_{6u}^0 & F_{6l}^0 & F_{6\pi^e}^0 & F_{6y^e}^0 & 0 & F_{6\lambda}^0 - \lambda & F_{6r}^0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{7l}^0 & F_{7\pi^e}^0 & F_{7y^e}^0 & 0 & 0 & F_{7r}^0 - \lambda & 0 & 0 \\ F_{8u}^0 & F_{8l}^0 & F_{8\pi^e}^0 & F_{8y^e}^0 & F_{8v}^0 & F_{8\lambda}^0 & F_{8r}^0 & F_{8m}^0 - \lambda & F_{7b}^0 \\ F_{9u}^0 & F_{9l}^0 & F_{9\pi^e}^0 & F_{9y^e}^0 & F_{9v}^0 & F_{9\lambda}^0 & F_{9r}^0 & F_{9m}^0 & F_{9b}^0 - \lambda \end{pmatrix} \quad (3.2.18)$$

gdzie

$$F_{1l}^0 = -\bar{U}\kappa\beta_w(1 - \kappa_p)\frac{\bar{v}^2}{\bar{u}y^p},$$

$$F_{1y^e}^0 = \bar{U}\kappa\left(\frac{\beta_w(1 - \kappa_p)}{\bar{u}y^p}\bar{v} - \frac{\beta_p(1 - \kappa_w)}{y^p}\right),$$

$$F_{2u}^0 = -\frac{(\bar{u}y^p)^2}{\bar{v}}\left(\frac{(1 - \tau_w)\beta_{y^e} - i_1\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}}\right),$$

$$\begin{aligned}
F_{2l}^0 &= \kappa\beta_w(1-\kappa_p)\bar{V}\left(\frac{\bar{u}y^p-2\beta_{ye}}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}\right), \\
F_{2\pi^e}^0 &= \frac{i_1}{\bar{V}}\frac{-(\bar{u}y^p)^2}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}, \\
F_{2ye}^0 &= -\frac{\bar{u}y^p}{\bar{V}}\left(\kappa\left(\frac{\beta_w(1-\kappa_p)}{\bar{u}y^p}\bar{V}-\frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p}\right)+\beta_{ye}\left(\frac{y_{ye}^d-1}{\bar{u}y^p}\right)+i_1(1-\bar{U})+\frac{i_2}{y^p}\right), \\
F_{2\lambda}^0 &= (i_1\bar{r}+i_3)\frac{\bar{u}y^p}{\bar{V}}\left(\frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}\right), \\
F_{2r}^0 &= -\frac{\bar{u}y^p}{\bar{V}}\left(\frac{\bar{u}y^p-2\beta_{ye}}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}\right)i_1\lambda, \\
F_{3\pi^e} &= \beta_{\pi^e}(\alpha-1), \\
F_{4u}^0 &= (\bar{u}y^p)^2i_1, \\
F_{4\pi^e}^0 &= -i_1\bar{u}y^p, \\
F_{4ye}^0 &= \beta_{ye}+\kappa\beta_p(1-\kappa_w)\bar{u}-\bar{u}y^pi_1(1-\bar{U})-\bar{u}y^p\frac{i_2}{y^p}, \\
F_{4\lambda}^0 &= \bar{u}y^p(i_1r+i_3), \\
F_{4r}^0 &= \bar{u}y^pi_1\lambda, \\
F_{5u}^0 &= -\frac{1-\tau_w-i_1}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}(\bar{u}y^p)^2, \\
F_{5l}^0 &= -\frac{\kappa\beta_w(1-\kappa_p)\bar{V}^2}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}, \\
F_{5\pi^e}^0 &= -\frac{i_1\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}, \\
F_{5ye}^0 &= 1-\frac{\bar{u}y^p\left((1-\tau_w)\bar{U}+i_1\bar{U}+\frac{i_2}{y^p}+\kappa\left(\frac{\beta_w(1-\kappa_p)}{\bar{u}y^p}\bar{V}-\frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p}\right)-i_1+\frac{\bar{r}i_1}{\bar{u}y^p}+\beta_{ye}\right)}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}, \\
F_{5v}^0 &= -n, \\
F_{5\lambda}^0 &= (i_1\bar{r}+i_3)\frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}(1+v), \\
F_{5r}^0 &= i_1\lambda\frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}(1+v), \\
F_{6U}^0 &= \left(-\left(\frac{i_1\bar{u}y^p-(1-\tau_w)\beta_{ye}}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}\right)(1-\lambda)+(1-\tau_c)\right)\bar{u}y^p, \\
F_{6l}^0 &= \kappa\bar{V}^2\beta_w\left(\frac{-(1-\kappa_p)(1-\lambda)}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}+\frac{\kappa_p}{\bar{u}y^p}\lambda\right), \\
F_{6l}^0 &= \kappa\bar{V}^2\beta_w\left(\frac{1}{\bar{u}y^p}\lambda\right), \\
F_{6\pi^e}^0 &= -i_1\frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p-\beta_{ye}}(1-\lambda)-\lambda,
\end{aligned}$$

$$F_{6ye}^0 = (1 - \lambda)(-\hat{l}_{ye}) - (1 - \tau_c)(1 - U) - \left(\kappa \left(\kappa_p \beta_w \left(\frac{1}{l} \right) + \beta_p \left(\frac{1}{y^p} \right) \right) \right) \lambda,$$

gdzie
$$\hat{l}_{ye} = \left(-i_1(1 - U) - i_2 \left(\frac{1}{y^p} \right) - \kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p) \left(\frac{1}{l} \right) - \beta_p(1 - \kappa_w) \left(\frac{1}{y^p} \right) \right) - \beta_{ye} \frac{y_{ye}^d - 1}{\bar{u}y^p} \right)$$

oraz
$$\frac{y_{ye}^d - 1}{\bar{u}y^p} = \frac{(1 - \tau_w)U + (1 - U)i_1 + \frac{i_2}{y^p} + \kappa \left(\frac{\beta_w(1 - \kappa_p)}{\bar{u}y^p} \bar{v} - \frac{\beta_p(1 - \kappa_w)}{y^p} \right) - 1}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}},$$

$$F_{6\lambda}^0 = -n - (1 - \lambda)(i_1 r + i_3) \frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} + (1 - \tau_c)\bar{r} - \bar{\pi},$$

$$F_{6r}^0 = -i_1 \lambda \frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} (1 - \lambda) + (1 - \tau_c)\lambda,$$

$$F_{7l}^0 = \kappa \kappa_p \beta_w \frac{\beta_{ip} \bar{v}^2}{\bar{u}y^p},$$

$$F_{7\pi^e}^0 = \beta_{ip},$$

$$F_{7ye}^0 = \beta_{ip} \left(\kappa \left(\frac{\kappa_p \beta_w}{l} + \frac{\beta_p}{y^p} \right) \right) + \beta_{iu} \left(\frac{1}{y^p} \right),$$

$$F_{7r}^0 = -\beta_{ii}.$$

$$F_{8m}^0 = -(\bar{\pi} + n),$$

$$F_{9b}^0 = r - (n - \bar{\pi}).$$

3.4.3. Redukcja stopni wielomianów

Lemat 7. Macierz J_9^0 ma pięć ujemnych wartości własnych $\lambda_1 = -\beta_{\pi^e}$, $\lambda_2 = -n$, $\lambda_3 = -\beta_{ii}$, $\lambda_4 = -(\bar{\pi} + n)$ oraz $\lambda_5 = r - (n - \bar{\pi}) < 0$ (założenie 3.2.5).

Dowód lematu 7

Po rozwinięciu, wielomian W_9^0 możemy przedstawić w postaci:

$$W_9^0 = \det(J_9^0 - \lambda I) = (F_{3\pi^e}^0 - \lambda)(F_{5v}^0 - \lambda)(F_{7r}^0 - \lambda)(F_{8m}^0 - \lambda)(F_{9b}^0 - \lambda) \cdot W_4^0(\lambda) \quad (3.2.19)$$

gdzie

$$W_4^0(\lambda) = \det(J_4^0 - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & F_{1l}^0 & F_{1ye}^0 & 0 \\ F_{2u}^0 & F_{2l}^0 - \lambda & F_{2ye}^0 & F_{2\lambda}^0 \\ F_{4u}^0 & 0 & F_{4ye}^0 - \lambda & F_{4\lambda}^0 \\ F_{6u}^0 & F_{6l}^0 & F_{6ye}^0 & F_{6\lambda}^0 - \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.2.20)$$

Z (3.3.19) wynika natychmiast, że wielomian $W_9^0(\lambda)$ ma pięć ujemnych pierwiastków rzeczywistych:

$$\begin{aligned}\lambda_1^0 &= -\beta_{\pi^e} < 0, & \lambda_2^0 &= -n < 0, & \lambda_3^0 &= -\beta_{i_i} < 0, \\ \lambda_4 &= -(\bar{\pi} + n), & \lambda_5 &= r - (n - \bar{\pi}) < 0\end{aligned}\quad (3.2.21)$$

dla $\beta_{\pi^e}, n, \beta_{i_i}, \bar{\pi} > 0, r - (n - \bar{\pi}) < 0$ (założenie 3.2.5). ■

Pozostałe cztery pierwiastki $\lambda_6^0, \lambda_7^0, \lambda_8^0, \lambda_9^0$ wielomianu $W_9^0(\lambda)$ są równocześnie pierwiastkami wielomianu $W_4^0(\lambda)$.

Założmy dodatkowo, że oprócz wektora $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_{i_p}, \beta_{i_u})$ także parametr reakcji $\beta_w = 0$ i oznaczmy przez J_4^{00} macierz J_4^0 , w której $\beta_w = 0$. Oznaczmy przez $\lambda_6^{00}, \lambda_7^{00}, \lambda_8^{00}, \lambda_9^{00}$ pierwiastki wielomianu:

$$W_4^{00}(\lambda) = \det(J_4^{00} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & F_{1y^e}^{00} & 0 \\ F_{2u}^{00} & -\lambda & F_{2y^e}^{00} & F_{2\lambda}^{00} \\ F_{4u}^{00} & 0 & F_{4y^e}^{00} - \lambda & F_{4\lambda}^{00} \\ F_{6u}^{00} & 0 & F_{6y^e}^{00} & F_{6\lambda}^{00} - \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.2.22)$$

Z (3.2.22) wynika, że jeden z pierwiastków wielomianu $W_4^{00}(\lambda)$, oznaczmy go przez λ_6^{00} , jest równy zero :

$$\lambda_6^{00} = 0.$$

Równanie charakterystyczne macierzy J_4^{00} ma zatem postać

$$W_4^{00}(\lambda) = \lambda W_3^{00}(\lambda) = 0, \quad (3.2.23)$$

gdzie

$$W_3^{00}(\lambda) = \det(J_3^{00} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & F_{1y^e}^{00} & 0 \\ F_{4u}^{00} & F_{4y^e}^{00} - \lambda & F_{4\lambda}^{00} \\ F_{6u}^{00} & F_{6y^e}^{00} & F_{6\lambda}^{00} - \lambda \end{pmatrix} \quad (3.2.24)$$

Założmy dodatkowo, że oprócz $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_{i_p}, \beta_{i_u}) = 0$ i $\beta_w = 0$, również parametr β_p jest równy zero i oznaczmy przez J_4^{000} szczególną postać macierzy J_4^{00} odpowiadającą temu założeniu.

Rozpatrzmy wielomian:

$$W^{000}(\lambda) = \det(J_3^{000} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ F_{4u}^{000} & F_{4y^e}^{000} - \lambda & F_{4\lambda}^{000} \\ F_{6u}^{000} & F_{6y^e}^{000} & F_{6\lambda}^{000} - \lambda \end{pmatrix}, \quad (3.2.25)$$

Pierwiastki wielomianu $W^{000}(\lambda)$ to λ_7^{000} , λ_8^{000} , λ_9^{000} . Jeden z tych pierwiastków również ma wartość równą zero, np.

$$\lambda_7^{000} = 0.$$

Wielomian $W^{000}(\lambda)$ możemy zatem przedstawić w postaci:

$$W_3^{000}(\lambda) = \lambda W_2^{000}(\lambda) = 0, \quad (3.2.26)$$

gdzie

$$W_2^{000}(\lambda) = \det(J_2^{000} - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} F_{4y^e}^{000} - \lambda & F_{4\lambda}^{000} \\ F_{6y^e}^{000} & F_{6\lambda}^{000} - \lambda \end{pmatrix}. \quad (3.2.27)$$

Lemat 9. Oba pierwiastki λ_8^{000} i λ_9^{000} wielomianu $W_2^{000}(\lambda) = \det(J_2^{000} - \lambda I) = 0$, albo są ujemne, albo mają ujemne części rzeczywiste.

Dowód lematu 9

Pierwiastki wielomianu $W_2^{000}(\lambda)$ są rozwiązaniem równania:

$$\det(\lambda J_2^{000} - \lambda I) = 0 \quad (3.2.28)$$

równoważnego następującemu równaniu drugiego stopnia:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0, \quad (3.2.29)$$

gdzie

$$a_1 = -\text{tr } J_2^{000},$$

$$a_2 = \det J_2^{000}.$$

Zgodnie z twierdzeniem Routha - Hurwitza wszystkie wartości własne macierzy (3.2.27) mają ujemne części rzeczywiste, wtedy i tylko wtedy gdy spełnione są następujące nierówności:

$$a_1 > 0, \quad a_2 > 0. \quad (3.2.30)$$

W oparciu o przedstawione powyżej wzory możemy wyliczyć współczynniki a_1 , a_2 wielomianu (3.2.29):

$$a_1 = -\text{tr } J_2^{000} = -(F_{4y^e}^{000} + F_{6\lambda}^{000}), \quad (3.2.31)$$

$$a_2 = \det J_2^{000} = F_{4y^e}^{000} F_{6\lambda}^{000} - F_{4\lambda}^{000} F_{6y^e}^{000}. \quad (3.2.32)$$

Po podstawieniu do (3.2.31) wartości $F_{4y^e}^{000}$, $F_{6\lambda}^{000}$ otrzymujemy:

$$a_1 = -\left(\beta_{y^e} - \bar{u}y^p i_1(1 - \bar{U}) - \bar{u}i_2 - n - (1 - \lambda)(i_1\bar{r} + i_3) \frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} + (1 - \tau_c)\bar{r}\right).$$

Dla odpowiednio dużej wartości parametru $i_2 > 0$, spełniającej nierówność:

$$\frac{\left(\beta_{y^e} - \bar{u}y^p i_1(1 - \bar{U}) - n - (1 - \lambda)(i_1\bar{r} + i_3) \frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} + (1 - \tau_c)\bar{r}\right)}{\bar{u}} < i_2,$$

współczynnik a_1 ma wartość dodatnią ($a_1 > 0$).

Korzystając z (3.2.32), możemy wyznaczyć wartość współczynnika a_2 :

$$a_2 = \left(\beta_{y^e} - \bar{u}y^p i_1 (1 - U) - \bar{u}y^p \frac{i_2}{y^p} \right) \left(-n - (1 - \lambda)(i_1 r + i_3) \frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} + (1 - \tau_c)\bar{r} \right) - \\ - \bar{u}y^p (i_1 r + i_3) \left(\left(i_1 (1 - U) + i_2 \left(\frac{1}{y^p} \right) + \beta_{y^e} \frac{(1 - \tau_w)U + (1 - U)i_1 + \frac{i_2}{y^p} - 1}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} \right) (1 - \lambda) - (1 - \tau_c)(1 - U) \right)$$

Dla parametru $\beta_{y^e} > \bar{u}y^p$ oraz dla odpowiednio dużej wartości parametru i_2 współczynnik a_2 jest dodatni ($a_2 > 0$).

Z twierdzenia Routha – Hurwitza wynika zatem, że dla odpowiednio dużej wartości parametru $i_2 > 0$ oraz $\beta_{y^e} > \bar{u}y^p$, wartości własne λ_8^{00} i λ_9^{00} mają ujemne części rzeczywiste. ■

3.4.4. Przywracanie dodatnich wartości parametrów reakcji

W dalszej części dowodu twierdzenia 2, zaczynając od lematu 9, będziemy stopniowo przywracać dodatnie wartości chwilowo wyzerowanych parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_{i_p}, \beta_{i_u}) = 0, \beta_w, \beta_p$ i ponownie rozpatrywać wielomiany charakterystyczne wyższych stopni $W_3^{00}(\lambda), W_4^0(\lambda), W_9^0(\lambda), W_9(\lambda)$, ustalając własności ich pierwiastków charakterystycznych (wartości własnych odpowiednich macierzy). W tym celu korzystać będziemy z lematu 9, z ciągłości wszystkich elementów macierzy $J_3^{00}, J_4^0, J_9^0, J_9$ względem parametrów $\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_{i_p}, \beta_{i_u}, \beta_w, \beta_p$, a także z ciągłości wartości własnych macierzy względem elementów macierzy. Ciągłość elementów wymienionych powyżej macierzy względem parametrów $\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_{i_p}, \beta_{i_u}, \beta_w, \beta_p$ wynika z analizy wzorów (3.2.1-3.2.9). Ciągłość wartości własnych macierzy względem elementów macierzy jest z kolei znanym faktem matematycznym. Korzystając z lematu 9 oraz znajomości elementów macierzy J_3^{00} udowodnimy lemat 10.

Lemat 10. Dla odpowiednio małej wartości parametru $\beta_p > 0$ (i $\beta_w = 0$) pierwiastki $\lambda_7^{00}, \lambda_8^{00}, \lambda_9^{00}$ wielomianu $W_3^{00}(\lambda) = \det(J_3^{00} - \lambda I)$, albo są liczbami ujemnymi, albo zespolonymi o ujemnej części rzeczywistej.

Dowód lematu 10

Wielomian charakterystyczny macierzy J_3^{00} jest funkcją ciągłą zmiennej $\beta_p \geq 0$, a więc dla odpowiednio małych wartości parametru $\beta_p > 0$ macierz J_3^{00} ma dwie wartości własne

$\lambda_8^{00}, \lambda_9^{00}$ ujemne lub będące liczbami zespolonymi o ujemnych częściach rzeczywistych. Pokażemy teraz, że trzecia wartość własna macierzy J_3^{00} ma ujemną część rzeczywistą. Aby to zrobić, skorzystamy z zależności:

$$\det J_3^{00} = \lambda_7^{00} \cdot \lambda_8^{00} \cdot \lambda_9^{00}. \quad (3.2.33)$$

Wartości własne $\lambda_8^{00}, \lambda_9^{00}$ są ujemne lub są liczbami zespolonymi o ujemnych częściach rzeczywistych, co oznacza, że ich iloczyn jest liczbą dodatnią. Jeśli wyznacznik (3.2.33) ma ujemną wartość, to trzecia wartość własna λ_7^{00} jest ujemna.

Wartość wyznacznika (3.2.33) możemy przedstawić w postaci:

$$\det J_3^{00} = -F_{1y^e}^{00} \begin{pmatrix} F_{4u}^{00} & F_{4\lambda}^{00} \\ F_{6u}^{00} & F_{6\lambda}^{00} \end{pmatrix} = \bar{U}\kappa \left(\frac{\beta_p(1-\kappa_w)}{y^p} \right) \cdot A, \quad (3.2.34)$$

gdzie $A = \det \begin{pmatrix} F_{4u}^{00} & F_{4\lambda}^{00} \\ F_{6u}^{00} & F_{6\lambda}^{00} \end{pmatrix}$.

Z (3.2.34) wynika, że znak wyznacznika $\det J_3^{00}$ zależy od wyznacznika A , który jest równy:

$$A = (\bar{u}y^p)^2 i_1 \left(-n - (1-\lambda)(i_1 r + i_3) \frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} + (1-\tau_c)\bar{r} \right) - \\ - \bar{u}y^p (i_1 r + i_3) \left(- \left(\frac{i_1 \bar{u}y^p - (1-\tau_w)\beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} \right) (1-\lambda) + (1-\tau_c) \right) \bar{u}y^p.$$

Kolejne przekształcenia dają:

$$A = (\bar{u}y^p)^2 \left(\begin{array}{c} i_1 \left(-n - (1-\lambda)(i_1 r + i_3) \frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} + (1-\tau_c)\bar{r} \right) - \\ - (i_1 r + i_3) \left(- \left(\frac{i_1 \bar{u}y^p - (1-\tau_w)\beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} \right) (1-\lambda) + (1-\tau_c) \right) \end{array} \right) = \\ = (\bar{u}y^p)^2 \left(\begin{array}{c} -ni_1 - (1-\lambda)(i_1 r + i_3) \frac{\bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} i_1 + \\ + (1-\tau_c)\bar{r}i_1 + \left(\frac{i_1 \bar{u}y^p - (1-\tau_w)\beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} \right) (1-\lambda)(i_1 r + i_3) - (1-\tau_c)(i_1 r + i_3) \end{array} \right).$$

Ostatecznie otrzymujemy:

$$A = (\bar{u}y^p)^2 \left(\left(-n - \frac{(1-\tau_w)\beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} (1-\lambda)\bar{r} \right) i_1 - \left((1-\tau_c) - \frac{(1-\tau_w)\beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} (1-\lambda) \right) i_3 \right).$$

Dla wartości parametru $\beta_{y^e} > \bar{u}y^p$ wartość wyrażenia $\left((1-\tau_c) - \frac{(1-\tau_w)\beta_{y^e}}{\bar{u}y^p - \beta_{y^e}} (1-\lambda) \right)$ jest dodatnia. Oznacza to, że dla odpowiednio dużej wartości parametru $i_3 > 0$ wyrażenie A jest ujemne, a więc wartość wyznacznika macierzy J_3^{00} jest ujemna, co zapisujemy:

$$\det J_3^{00} < 0.$$

W konsekwencji macierz J_3^{00} ma trzy wartości własne $\lambda_7^{00}, \lambda_8^{00}, \lambda_9^{00}$ ujemne lub dwie zespolone o ujemnych częściach rzeczywistych i jedną ujemną. ■

Lemat 10 oraz znajomość macierzy J_4^0 umożliwiają z kolei dowód lematu 11.

Lemat 11. Przy założeniach 3.2.1-3.2.5 dla odpowiednio małych wartości parametrów $\beta_p > 0$ i $\beta_w > 0$ pierwiastki $\lambda_6^0, \lambda_7^0, \lambda_8^0, \lambda_9^0$ wielomianu $W_4^0(\lambda) = \det(J_4^0 - \lambda I)$, albo są liczbami ujemnymi, albo zespolonymi o ujemnych częściach rzeczywistych.

Dowód lematu 11

Dowód lematu 11 przebiega identycznie jak dowód lematu 5.

Wielomian charakterystyczny macierzy J_4^0 jest funkcją ciągłą zmiennej $\beta_w \geq 0$, a więc dla odpowiednio małej wartości parametru $\beta_w > 0$ macierz J_4^0 ma 3 wartości własne $\lambda_7^0, \lambda_8^0, \lambda_9^0$ będące liczbami ujemnymi lub liczbami zespolonymi o ujemnych częściach rzeczywistych. Pokażemy teraz, że czwarta wartość własna macierzy J_4^0 jest liczbą ujemną lub liczbą zespoloną o ujemnej części rzeczywistej.

Aby to zrobić, skorzystamy z zależności:

$$\det J_4^0 = \lambda_6^0 \cdot \lambda_7^0 \cdot \lambda_8^0 \cdot \lambda_9^0, \quad (3.2.35)$$

gdzie pierwiastki $\lambda_7^0, \lambda_8^0, \lambda_9^0$ są liczbami ujemnymi lub liczbami zespolonymi o ujemnych częściach rzeczywistych, a więc ich iloczyn jest liczbą ujemną.

Jeżeli wyznacznik (3.2.35) jest dodatni, to wartość własna λ_6^0 jest liczbą ujemną lub liczbą zespoloną o ujemnej części rzeczywistej.

Gdy wartość parametru $0 < \kappa_p < 1$ jest odpowiednio bliska 1 (założenie 3.2.3), to wartość wyznacznika (3.2.35) jest zbieżna do wartości:

$$\begin{aligned} \det J_4^0 &= \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & F_{1ye}^0 & 0 \\ F_{2u}^0 & 0 & F_{2ye}^0 & F_{2\lambda}^0 \\ F_{4u}^0 & 0 & F_{4ye}^0 & F_{4\lambda}^0 \\ F_{6u}^0 & \kappa \bar{V}^2 \beta_w \left(\frac{\lambda}{\bar{u} y^p} \right) & F_{6ye}^0 & F_{6\lambda}^0 \end{pmatrix} = \\ &= \kappa \bar{V}^2 \beta_w \left(\frac{\lambda}{\bar{u} y^p} \right) \det \begin{pmatrix} 0 & F_{1ye}^0 & 0 \\ F_{2u}^0 & F_{2ye}^0 & F_{2\lambda}^0 \\ F_{4u}^0 & F_{4ye}^0 & F_{4\lambda}^0 \end{pmatrix} = \kappa \bar{V}^2 \beta_w \left(\frac{\lambda}{\bar{u} y^p} \right) \det \begin{pmatrix} 0 & F_{1ye}^0 & 0 \\ F_{2u}^0 & F_{2ye}^0 & F_{2\lambda}^0 \\ F_{4u}^0 & F_{4ye}^0 & F_{4\lambda}^0 \end{pmatrix} = \\ &= \kappa \bar{V}^2 \beta_w \left(\frac{\lambda}{\bar{u} y^p} \right) (-1) \bar{U} \kappa \left(-\frac{\beta_p (1 - \kappa_w)}{y^p} \right) \det \begin{pmatrix} F_{2u}^0 & F_{2\lambda}^0 \\ F_{4u}^0 & F_{4\lambda}^0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

gdzie

$$\begin{aligned}
\det \begin{pmatrix} F_{2u}^0 & F_{2\lambda}^0 \\ F_{4u}^0 & F_{4\lambda}^0 \end{pmatrix} &= F_{2u}^0 F_{4\lambda}^0 - F_{2\lambda}^0 F_{4u}^0 = \\
&= -\frac{(\bar{u}y^p)^3}{\bar{V}} (i_1 r + i_3) \left(\frac{(1 - \tau_w)\beta_{ye} - i_1 \bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right) - \frac{(\bar{u}y^p)^3}{\bar{V}} (i_1 \bar{r} + i_3) \left(\frac{i_1 \bar{u}y^p}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right) = \\
&= -(i_1 \bar{r} + i_3) \frac{(\bar{u}y^p)^3}{\bar{V}} \left(\frac{(1 - \tau_w)\beta_{ye}}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} \right).
\end{aligned}$$

Wyrażenie $\frac{(1 - \tau_w)\beta_{ye}}{\bar{u}y^p - \beta_{ye}} < 0$ dla $\bar{u}y^p < \beta_{ye}$. Oznacza to, że $\det \begin{pmatrix} F_{2u}^0 & F_{2\lambda}^0 \\ F_{4u}^0 & F_{4\lambda}^0 \end{pmatrix} > 0$,

a w konsekwencji wyznacznik:

$$\det J_4^0 = \kappa \bar{V}^2 \beta_w \left(\frac{\lambda}{\bar{u}y^p} \right) (-1) \bar{U} \kappa \left(-\frac{\beta_p(1 - \kappa_w)}{y^p} \right) \det \begin{pmatrix} F_{2u}^0 & F_{2\lambda}^0 \\ F_{4u}^0 & F_{4\lambda}^0 \end{pmatrix}$$

ma wartość dodatnią. Wynika stąd, że wartość własna λ_6^0 macierzy J_4^0 ma ujemną część rzeczywistą. ■

Z Lematu 11, równania:

$$\begin{aligned}
W_9^0(\lambda) &= \det(J_9^0 - \lambda I) = \\
&= (\lambda_1^0 - \lambda)(\lambda_2^0 - \lambda)(\lambda_3^0 - \lambda)(\lambda_4^0 - \lambda)(\lambda_5^0 - \lambda) \cdot W_4^0(\lambda) = 0 \quad (3.3.36)
\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}
\lambda_1^0 &= -\beta_{\pi^e} < 0, \quad \lambda_2^0 = -n < 0, \quad \lambda_3^0 = -\beta_{i_i} < 0, \\
\lambda_4 &= -(\bar{\pi} + n) < 0, \quad \lambda_5 = r - (n - \bar{\pi}) < 0
\end{aligned}$$

wynika, że dla odpowiednio małych wartości parametrów $\beta_p > 0$ oraz $\beta_w > 0$ wszystkie pierwiastki wielomianu $W_9^0(\lambda) = \det(J_9^0 - \lambda I)$ (wartości własne macierzy J_9^0), albo są liczbami ujemnymi, albo zespolonymi o ujemnych częściach rzeczywistych.

Jeżeli wartość własna λ_7^0 jest liczbą zespoloną z ujemną częścią rzeczywistą to, korzystając z faktu, iż zespolone wartości własne zawsze pojawiają się jako liczby sprzężone, wartość własna λ_6^0 musi być sprzężoną z wartością λ_7^0 mającą tę samą ujemną część rzeczywistą co λ_7^0 .

Z ciągłości elementów macierzy J_9 względem parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_{i_p}, \beta_{i_u})$ oraz ciągłości wartości własnych macierzy J_9 względem jej elementów, korzystając z lematu 11 wnioskujemy zatem, że dla odpowiednio małych wartości parametrów $\beta = (\beta_n, \beta_z, \alpha, \beta_{i_p}, \beta_{i_u}) > 0$ wielomian $W_9(\lambda) = \det(J_9 - \lambda I)$, podobnie jak wielomian $W_9^0(\lambda)$, ma wszystkie wartości własne ujemne lub będące liczbami zespolonymi

o ujemnych częściach rzeczywistych. Dowodzi to prawdziwości twierdzenia 2 o lokalnej, asymptotycznej stabilności stanu stacjonarnego modelu (3.2.1) – (3.2.10b).

■

Podsumowanie

W rozdziale tym przedstawiono i udowodniono dwa twierdzenia o lokalnej asymptotycznej stabilności stanów stacjonarnych modeli KMG oraz KMGT z kredytem inwestycyjnym omówionych w poprzednich rozdziałach. Przedstawione dowody stabilności są głównymi wynikami teoretycznymi całej rozprawy.

Udowodnione twierdzenia dotyczą jedynie lokalnej asymptotycznej stabilności. Oznacza to, że zbieżność gospodarki do ścieżki równomiernego wzrostu jest gwarantowana tylko wtedy, gdy początkowa struktura gospodarki nie różni się zbyt od jej struktury opisanej w stanie stacjonarnym modelu w postaci intensywnej. Jak bardzo początkowa struktura gospodarki może odbiegać od stanu stacjonarnego bez utraty stabilności, można zweryfikować tylko poprzez symulacje komputerowe. Również prędkość, z jaką gospodarka zbiega w kierunku ścieżki równomiernego wzrostu, można przetestować tylko poprzez eksperymenty komputerowe. Pomimo tych ograniczeń matematyczne dowody stabilności modeli wzrostu, takich jak te przedstawione w pracy, są ważne dla rozwoju teorii wzrostu gospodarczego, ponieważ ujawniają one wewnętrzną zdolność analizowanej gospodarki do osiągnięcia struktury, która pozwala na zrównoważony wzrost. Brak stabilności jest poważnym mankamentem modelu, ponieważ jest równoważny z istnieniem samopogłębiającego się mechanizmu nierównowagi, co prowadzi do załamania gospodarczego.

Dowody stabilności zaprezentowane w ramach tego rozdziału różnią się od dowodów twierdzeń modeli KMG analizowanych przez Chiarellę i in.. Po pierwsze, różnica wynika z matematycznej struktury modeli KMG opracowanych w pracy, która jest znacznie bardziej złożona niż ich wcześniejsze wersje analizowane w Chiarella i in. Po drugie dowody stabilności opracowanych modeli uzyskuje się przy innych zestawach założeń dotyczących parametrów modelu. W szczególności założenia, które zawierają stawki podatkowe od pracy i dochodów kapitałowych, są całkowicie nowe, stawki te nie są uwzględniane w modelach KMG zaprezentowanych w Chiarella i in. (2000), (2005), Charpe (2011) na podstawie których zostały opracowane nowe modele przedstawione w tej pracy. Po

trzecie, wprowadzone modyfikacje modelu powodują, że chociaż w dowodzie stosowana jest pochodząca od Chiarelli i in. metoda kaskady macierzy stabilnych (cascade of stable matrices approach), to jej realizacja jest zasadniczo inna, gdyż polega na chwilowym zerowaniu innych parametrów modelu i w innej kolejności. Ustalenie, które parametry zerować i w jakiej kolejności było dużym wyzwaniem.

Kolejnym wnioskiem płynącym z analizy stabilności obu modeli jest wpływ siły reakcji oczekiwanego popytu na błąd prognozy popytu w poprzednim okresie na stabilność tych modeli. W modelu KMGT z kredytem inwestycyjnym, inaczej niż w KMG, stan stacjonarny jest lokalnie asymptotycznie stabilny, gdy oczekiwania dotyczące popytu silnie reagują na błąd prognozy popytu w poprzednim okresie. (Nie można jednak wykluczyć, że w pierwszym modelu też tak będzie. Założenia przy których zostały udowodnione twierdzenia o stabilności są tylko wystarczającymi warunkami stabilności, co oznacza, że stabilność analizowanych modeli nie jest wykluczona także gdy założenia te nie będą spełnione.) Oznacza to, że prowadzenie polityki pieniężnej wg reguły Taylora pozwala uzyskiwać ścieżkę równomiernego wzrostu nawet przy silnym reagowaniu podmiotów gospodarczych na odchylenia rzeczywistego poziomu popytu od oczekiwanego.

W kolejnym rozdziale przedstawiono wyniki symulacji komputerowych dla danych o gospodarce polskiej z wykorzystaniem obu modeli analizowanych w rozprawie. Celem tych symulacji była weryfikacja przedstawionych w tym rozdziale twierdzeń o stabilności oraz przetestowanie modelu na danych o gospodarce polskiej.

Rozdział 4

Eksperymenty symulacyjne

Prezentowana praca jest z założenia pracą głównie teoretyczną i taki też charakter mają jej trzy pierwsze rozdziały poświęcone prezentacji i analizie dwóch zmodyfikowanych, autorskich wersji modelu Keynesa – Metzlera – Goodwina (modeli KMG i KMGT). Modyfikacje poprawiające opisu funkcjonowania gospodarki, mimo że komplikują matematyczną strukturę modeli, wprowadzone zostały w sposób umożliwiając sprowadzenie modeli do postaci intensywnej i wyznaczenie ich stanów stacjonarnych. Wykazano tym samym, że opisana modelami gospodarka jest zdolna do równomiernego wzrostu. W rozdziale trzecim przedstawiono główne wyniki teoretyczne rozprawy w postaci twierdzeń o stabilności stanów stacjonarnych, z których wynika, że o ile spełnione są założenia prezentowanych twierdzeń to z upływem czasu gospodarka zmierza do stanu stacjonarnego, co jest równoznaczne z jej dążeniem do ścieżki równomiernego wzrostu.

Udowodnione w pracy twierdzenia o stabilności cechuje wysoki stopień ogólności, charakterystyczny dla tego rodzaju wyników matematycznych. Mówi się w nich m.in. o tym, że gospodarka zmierza do stanu stacjonarnego jeżeli jej stan początkowy nie jest zbyt odległy od tego stanu, a parametry reakcji modelu są odpowiednio małe. Twierdzenia nie precyzują co dokładnie znaczy „odpowiednio blisko” czy „odpowiednio małe parametry”. Nie precyzują również tego, jak długi musi być horyzont czasowy aby gospodarka startując z danego stanu początkowego weszła na ścieżkę równomiernego wzrostu, jak długość tego horyzontu zależy od stanu początkowego i od parametrów modelu (w szczególności od instrumentów polityki makroekonomicznej), czy zbieżność do stanu stacjonarnego ma charakter monotoniczny, czy oscylacyjny? Wszystkie te pytania mają fundamentalne znaczenie z praktycznego, ekonomicznego punktu widzenia. Na gruncie teorii nie jest możliwe udzielenie na nie odpowiedzi. Taką wiedzę możemy uzyskać jedynie w wyniku symulacji komputerowych. Przeprowadzając obliczenia możemy też przekonać się, jak zachowuje się gospodarka jeżeli nie są spełnione założenia twierdzeń o stabilności. Możemy wreszcie wykorzystać model do badania gospodarki w krótszych horyzontach czasowych, w których nie wykazuje zbieżności do stanu stacjonarnego.

Jak widzimy możliwy zakres eksperymentów symulacyjnych jest bardzo szeroki. Wprowadzone do modeli modyfikacje dodatkowo zakres ten poszerzają. Przykładowo,

wprowadzenie do modelu różnych stawek podatkowych pozwala na badanie ich wpływu na generowane trajektorie zamiennych.

Symulacje prezentowane w tym rozdziale przeprowadzone zostały na podstawie modelu KMG przedstawionego w rozdziale pierwszym i modelu KMGT z rozdziału drugiego. W przypadku tego ostatniego wykorzystana została jednak jego wersją uproszczona, bez sektora bankowego. Wiązało się to z pominięciem w modelu KMGT wykorzystanym w symulacjach kredytów inwestycyjnych sektora prywatnego oraz przyjęciem założenia, że podobnie jak w modelu KMG z rozdziału pierwszego, obligacje rządowe kupowane są przez sektor prywatny, a nie przez banki.

Wszystkie symulacje przeprowadzone zostały na podstawie danych o gospodarce polskiej za rok 2018. Wymagało to z jednej strony żmudnej obróbki danych statystycznych, tak aby dostosować je do kategorii zmiennych modeli, a z drugiej strony takich modyfikacji modeli, aby zawrzeć w nich jak najwięcej danych o gospodarce polskiej. (Dobrym przykładem są tutaj dochody i konsumpcja ok. 6 milionów polskich emerytów, którą należało uwzględnić w modelach użytych do symulacji, mimo, że w modelach z teoretycznej części pracy nie ma takich zmiennych.) Modyfikacje modeli na potrzeby symulacji przeprowadzone zostały w taki sposób, że nie zmieniły ich struktury matematycznej – można je sprowadzić do postaci intensywnej, wyznaczyć stany stacjonarne i eksperymentalnie badać ich stabilność.

Najtrudniejszym zadaniem było dobranie wartości parametrów reakcji. Problem wynika z tego, że wyznaczenie ich wymaga użycia zaawansowanych metod ekonometrycznych. Jednak w tej pracy do obliczenia parametrów reakcji zastosowano narzędzie programu komputerowego MS Excel - Solver⁴¹, który na podstawie kilku założeń ustalił ich wartości. Ten sposób, choć nie idealny, jest wystarczający, by zbadać podstawowe własności modeli KMG i KMGT. Bardziej precyzyjne oszacowanie tych

⁴¹ Solver jest dodatkiem do programu Microsoft Excel umożliwiającym przeprowadzanie analiz warunkowych. Za pomocą dodatku Solver można znaleźć optymalną (maksymalną lub minimalną) wartość formuły w jednej komórce — zwanej komórką celu — podlegającej ograniczeniom dotyczącym wartości innych komórek z formułą znajdujących się w arkuszu. Dodatek Solver dostosowuje wartości w komórkach zmiennych decyzyjnych tak, aby spełnić limity obejmujące komórki ograniczeń i uzyskać pożądany wynik w komórce celu. (źródło: <https://support.microsoft.com/pl-pl/office/definiowanie-i-rozwi%C4%85zywanie-problem%C3%B3w-za-pomoc%C4%85-dodatku-solver-5d1a388f-079d-43ac-a7eb-f63e45925040>)

parametrów przy użyciu zaawansowanych metod ekonometrycznych jest tematem do dalszych badań nad omawianymi modelami. Oprócz parametrów reakcji w modelu są inne parametry, tj. stopy podatkowe, naturalna stopa bezrobocia, naturalny poziom wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej, stopa deprecjacji kapitału trwałego, pożądana stopa inflacji (cel inflacyjny), naturalna stopa procentowa. Te parametry zostały oszacowane za pomocą danych statystycznych oraz równań modeli. W kolejnym kroku przygotowaliśmy do analizy ilościowej modeli należało, stosując metodę Eulera, przybliżyć model ciągły modelem dyskretnym. Głównym powodem stosowania tej procedury jest fakt, że dane udostępniane o gospodarce są danymi dyskretnymi. Tak przygotowany model dla przykładowego scenariusza bazowego przy pomocy programów komputerowych można było zbadać w celu:

- sprawdzenia czasu dojścia do stanu stacjonarnego,
- analizy wrażliwości stanu stacjonarnego na zmiany wartości wybranych parametrów modelu,
- oszacowania przedziałów wartości wybranych parametrów modelu, dla których stan stacjonarny jest co najmniej lokalnie asymptotycznie stabilny,
- porównanie trajektorii modelu KMG i modelu KMGT dla tego samego scenariusza bazowego i jednakowych wartości parametrów,
- zbadania wpływu polityki fiskalnej i pieniężnej na trajektorie zmiennych modeli KMG i KMGT.

Zbadaliśmy także reakcje zmiennych modelu KMG z regułą Taylora na szoki zewnętrzne przy założeniu, że zmienne znajdują się na ścieżce równomiernego wzrostu. Ponadto sprawdziliśmy wpływ polityki pieniężnej na czas powrotu do stanu stacjonarnego gospodarki wytrąconej ze ścieżki równomiernego wzrostu. Wprowadzone szoki odzwierciedlają kryzys gospodarczy związany z pandemią wirusa SAR-CoV-2 w latach 2020-2021.

4.1. Kalibracja modelu na podstawie danych o gospodarce polskiej

W tym podrozdziale wyznaczymy wartości parametrów modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza na podstawie danych o gospodarce polskiej w 2018 r.

4.1.1. Modyfikacja modelu KMG na potrzeby eksperymentów symulacyjnych

Przed kalibracją parametrów modelu zwróćmy najpierw uwagę na równania opisujące konsumpcję sektora prywatnego C , stopę zysku z kapitału ρ , deficyt budżetowy \dot{B} (dług publiczny B) oraz podatki T :

$$C = (1 - \tau_w)\omega L^d, \quad (4.1)$$

$$\rho = \frac{Y^d - \omega L^d - \delta K}{K}, \quad (4.2)$$

$$\dot{B} = pG + rB - pT - \dot{M}, \quad (4.3)$$

$$T = T_w + T_c. \quad (4.4)$$

Równania (4.1) - (4.4), brane dosłownie, silnie upraszczają rzeczywistość. Z (4.1) możemy wnioskować, że konsumują tylko osoby pracujące otrzymujące wynagrodzenie z pracy. W rzeczywistości w gospodarce konsumują również osoby pracujące na własny rachunek, rolnicy oraz emeryci i renciści⁴², a część dochodów konsumentów jest przeznaczana na oszczędności. Konsumenci płacą różne podatki, a pracujący płacą ponadto składki ZUS, co nie zostało ujęte w równaniu (4.1). Z równania (4.2) wynika, że koszt zatrudnienia pracownika jest równy jego wynagrodzeniu, co nie jest prawdą. Wiadomo przecież, że koszt zatrudnienia jednego pracownika dla pracodawcy jest wyższy od wynagrodzenia brutto pracownika o składkę ZUS, jaką płaci pracodawca. Z tego samego równania wynika, że właściciele kapitału trwałego otrzymują cały dochód Y^d ze sprzedaży, co jest bardzo dużym uproszczeniem. W rzeczywistości popyt konsumpcyjny, który jest znakomitą częścią całkowitego popytu Y^d , zawiera także podatek pośredni, będący dochodem sektora publicznego. W równaniu (4.3) można zauważyć, że wśród wydatków budżetowych brakuje licznych transferów budżetowych oraz dotacji rządowych, które nie są zaliczane do konsumpcji publicznej G . Z drugiej strony finansowanie deficytu budżetowego może odbywać się za pomocą emisji obligacji i pieniędzy. Rząd nie może bezpośrednio finansować swoich wydatków emisją pieniądza. Źródłem finansowania wydatków rządu są dochody z emisji nowych obligacji, podatki i składki na ubezpieczenia społeczne. Równanie (4.4) przedstawia sumę dochodów sektora publicznego z podatków od dochodów z pracy

⁴² W Polsce w 2018 roku wg danych GUS liczba gospodarstw domowych pracowników najemnych stanowiła ponad 45% wszystkich gospodarstw domowych. Drugą co do wielkości grupą jest ta obejmująca emerytów i rencistów. Jej liczebność w 2018 roku stanowiła ponad 37% ogółu gospodarstw. Natomiast gospodarstwa domowe rolników i osób pracujących na własny rachunek stanowią około 17% ogółu.

i kapitału. W gospodarce polskiej największym źródłem dochodów sektora publicznego z podatków jest podatek pośredni⁴³, który nie jest uwzględniony w tym równaniu.

Uwzględnienie powyższych uwag w eksperymentach symulacyjnych wymaga wprowadzenia modyfikacji niektórych równań modelu. Celem tych modyfikacji jest uwzględnienie w modelu jak największej ilości informacji zawartych w danych o gospodarce polskiej bez zmiany matematycznej struktury modelu ani jego podstawowych własności, takich jak np. możliwość sprowadzenia modelu do postaci intensywnej, istnienie stanu stacjonarnego oraz lokalna asymptotyczna stabilność stanu stacjonarnego.

W pierwszej kolejności zajmiemy się równaniem (4.1). W symulacjach zakładamy, że realny dochód do dyspozycji gospodarstw domowych Y^D jest równy sumie realnych dochodów z pracy pracowników najemnych po opodatkowaniu $(1 - \tau)\omega L^d$ (dochody netto) i realnych transferów publicznych TR :

$$Y^D = (1 - \tau)\omega L^d + TR.$$

W symulacjach dla uproszczenia przyjmujemy założenie, że w każdym momencie czasu realne transfery publiczne TR są wprost proporcjonalne do dochodów pracowników najemnych:

$$TR = \alpha_1 \omega L^d, \quad (4.5)$$

gdzie α_1 to parametr decyzyjny (współczynnik proporcjonalności), którego wartość jest stała w czasie. Korzystając z (4.5), realny dochód do dyspozycji gospodarstw domowych Y^D po przekształceniach możemy zapisać jako:

$$Y^D = (1 - \tau + \alpha_1)\omega L^d.$$

Zgodnie z przedstawionymi w rozdziale drugim założeniami modelu KMG, sektor gospodarstw domowych nie oszczędza, a cały swój dochód do dyspozycji przeznacza na konsumpcje $Y^D = C$. Tak, więc realna konsumpcja sektora gospodarstw domowych w symulacjach komputerowych jest równa:

$$C = (1 - \tau + \alpha_1)\omega L^d, \quad (4.6)$$

⁴³ Podatki pośrednie to podatki nakładane na wydatki na dobra i usługi. Podmioty płacące podatek pośredni nie są bezpośrednio zobowiązane do ich zapłaty. Podatki pośrednie przerzucane są na inny podmiot. Nie uwzględniają one zdolności płatniczej podatnika. Do podatków pośrednich w Polsce zaliczane są: podatek akcyzowy, podatek od towarów i usług (VAT), podatek od gier, cło. Podatek pośredni w 2018 roku stanowił około 70% wszystkich podatków.

gdzie $\tau = \tau_2 + \tau_w$ to suma stawki τ_2 składek na ubezpieczenie społeczne płaconych przez pracowników oraz stawki podatkowej τ_w od wynagrodzeń za pracę najemną.

W równaniu (4.2) od rzeczywistej sprzedaży Y^d odjęty został podatek pośredni T_p . W kosztach firm oprócz wynagrodzenia brutto ωL^d i deprecjacji kapitału δK uwzględniamy składkę na ubezpieczenia społeczne. Składkę tę pracodawca płaci od wynagrodzenia brutto wypłacanego pracownikom: $\tau_1 \omega L^d$, gdzie τ_1 to stawka składki na ubezpieczenie społeczne płaconej przez pracodawcę. Uwzględniając powyższe modyfikacje w symulacjach komputerowych, uzyskujemy stopę zysku z kapitału trwałego ma postać:

$$\rho = \frac{Y^d - T_p - (1 + \tau_1)\omega L^d - \delta K}{K}. \quad (4.7)$$

Przyjmujemy upraszczające założenie, że podatek pośredni T_p jest wprost proporcjonalny do całkowitej sprzedaży:

$$T_p = \tau_p Y^d, \quad \tau_p = \text{const.} \quad (4.8)$$

Podstawiając (4.8) do (4.7), otrzymujemy:

$$\rho = \frac{(1 - \tau_p)Y^d - (1 + \tau_1)\omega L^d - \delta K}{K}. \quad (4.9)$$

Deficyt sektora finansów publicznych, gdzie sektor finansów publicznych obejmuje budżet państwa (budżet centralny plus budżet samorządów terytorialnych) oraz budżet Funduszu Ubezpieczeń Społecznych (FUS), jest równy zmianie liczby obligacji \dot{B} , która zależy od różnicy między wydatkami i przychodami tego sektora. Na wydatki składają się wydatki sektora rządowego na zakupy dóbr i usług $G = gK$, transfery budżetowe $TR = \alpha_1 \omega L^d$ (emerytury, renty i inne), odsetki od obligacji rB/p (koszt obsługi długu publicznego)⁴⁴. Natomiast na przychody T składają się: podatek pośredni T_p , podatek od wynagrodzeń T_w , podatek od zysku z kapitału trwałego i obligacji T_c oraz składki na ubezpieczenia społeczne płacone przez pracodawców i pracowników T_{ZUS} . Dodatkowo, w eksperymentach komputerowych, inaczej niż w przedstawionym w rozdziale pierwszym modelu KMG, nie ma możliwości finansowania długu publicznego bezpośrednio przez kreowanie nowego pieniądza. Zostało to zrobione przez usunięcie z równania (4.3) podaży pieniądza \dot{M} . Zatem równanie (4.3) zastępujemy w symulacjach równaniem:

$$\dot{B} = pG + pTR + rB - pT, \quad (4.10)$$

⁴⁴ Do wydatków rządowych zaliczamy także dotacje i dofinansowania rządowe, lecz w stosunku do pozostałych wydatków są one niewielkie, dlatego w symulacjach komputerowych będziemy je pomijać.

gdzie p to wskaźnik cen, T to całkowity przychód sektora finansów publicznych ($T = T_p + T_w + T_c + T_{ZUS}$).

Realne składki na ubezpieczenia społeczne T_{ZUS} płacone są przez pracodawców i pracowników. W symulacjach stawki te będą równe τ_1 i τ_2 , odpowiednio, i będą liczone od realnych wynagrodzeń brutto za pracę najemną ωL^d :

$$T_{ZUS} = \tau_1 \omega L^d + \tau_2 \omega L^d. \quad (4.11a)$$

Podobnie jak składki T_{ZUS} , w naszym modelu realne zaliczki na podatek dochodowy naliczane są od realnych wynagrodzeń brutto za pracę najemną i od zysku z kapitału trwałego i obligacji. Stawki podatkowe są równe τ_w i τ_c , odpowiednio od realnych wynagrodzeń brutto za pracę najemną oraz od zysku z kapitału trwałego i obligacji. Tym samym realna zaliczka na podatek dochodowy od wynagrodzenia za pracę jest równa:

$$T_w = \tau_w \omega L^d. \quad (4.11b)$$

Zakładamy, że podatki dochodowe płacone przez podmiot zagraniczny z tytułu zysku z posiadanych obligacji są znikomo małe, więc je pomijamy. Stąd realna zaliczka na podatek dochodowy od zysku z kapitału trwałego i obligacji wynosi:

$$T_c = \tau_c \left(\rho K + \alpha_3 \frac{r^B}{p} \right), \quad (4.11c)$$

gdzie α_3 to stały w czasie stosunek obligacji krajowych w posiadaniu podmiotu krajowego do wszystkich obligacji.

Podsumowując, całkowity przychód sektora finansów publicznych w symulacjach komputerowych jest równy sumie:

$$T = T_w + T_c + T_p + T_{ZUS}. \quad (4.12)$$

Podstawiając (4.11abc) do (4.12), po przekształceniach otrzymujemy:

$$T = \tau \omega L^d + \tau_c \left(\alpha_4 Y^d - (1 + \tau_1) \omega L^d - \delta K + \alpha_3 \frac{r^B}{p} \right), \quad (4.13)$$

gdzie $\tau = \tau_w + \tau_2$, $\alpha_4 = \left(1 - \tau_p + \frac{\tau_p}{\tau_c} \right)$.

4.1.2. Zmodyfikowany model KMG w postaci intensywnej

Wykorzystując powyżej opisane modyfikacje równań modelu KMG, wersję modelu zastosowaną w symulacjach przedstawimy teraz w postaci intensywnej, która stanowi bazę porównań z wersjami przedstawionymi we wcześniejszych rozdziałach oraz pozwala analizować własności modelu, takie jak np. stabilność stanu stacjonarnego. Dodatkowo, postać intensywna ułatwia przeprowadzenie symulacji komputerowych modelu KMG. Aby to zrobić, wykorzystamy zdefiniowane w rozdziale drugim zmienne: udział płac $U =$

$\omega L^d / Y$ w PKB Y , pracochłonność pełnego zatrudnienia (stosunek efektywnej pracy do kapitału) $l = xL/K$, realną podaż pieniądza $m = M/pK$ na jednostkę kapitału trwałego, oczekiwany popyt $y^e = Y^e/K$ na jednostkę kapitału trwałego, wielkość zapasów $v = N/K$ na jednostkę kapitału, stosunek podaży obligacji $b = B/pK$ do wielkości kapitału trwałego.

Postać intensywna modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza w symulacjach komputerowych jest następująca:

$$\hat{U} = \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) (V - \bar{V}) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u - \bar{u}) \right) \quad (4.14)$$

$$\hat{l} = n - \left(\hat{U} + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right) - i_1 \left(\rho^e - \xi - \left(\frac{hy^e}{m} - \pi^e \right) \right) - i_2 (u - \bar{u}) \quad (4.15)$$

$$\hat{m} = \mu - n - \hat{p} + \hat{l} \quad (4.16)$$

$$\hat{\pi}^e = \beta_{\pi^e} (\alpha \hat{p} + (1 - \alpha) \bar{\pi} - \pi^e) \quad (4.17)$$

$$\dot{y}^e = y^e \left(\hat{U} + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) - n + \hat{l} \right) \quad (4.18)$$

$$\dot{v} = y - y^d - v(n - \hat{l}) \quad (4.19)$$

$$\dot{b} = (g + rb - \tau_c (\alpha_4 y^d - (1 + \tau_1) Uy - \delta + \alpha_3 rb) - (\tau - \alpha_1) Uy) - b(n - \hat{l} + \hat{p}) \quad (4.20)$$

gdzie $\kappa = \frac{1}{1 - \kappa_w \kappa_p} = \text{const.}$, $\alpha_4 = \left(1 - \tau_p + \frac{\tau_p}{\tau_c} \right) = \text{const.}$,

$$\hat{p} = \left(\kappa \left(\kappa_p \beta_w (V - \bar{V}) + \beta_p (u - \bar{u}) \right) + \pi^e \right), V = \frac{y}{l}, u = \frac{y}{y^p},$$

$$\rho^e = (1 - \tau_p) y^e - (1 + \tau_1) Uy - \delta,$$

oraz

$$y^d = (1 + \alpha_1 - \tau) y U + i_1 \left(\rho^e - \xi - \left(\frac{hy^e}{m} - \pi^e \right) \right) + i_2 (u - \bar{u}) + \delta + g + \\ + \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) (V - \bar{V}) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u - \bar{u}) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right), \quad (4.21)$$

$$y = y^e + \beta_n \beta_{N^d} y^e - \beta_n v +$$

$$+ y^e \beta_z \left(\kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) (V - \bar{V}) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u - \bar{u}) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right). \quad (4.22)$$

Wyprowadzanie powyższych równań modelu KMG w postaci intensywnej (4.14)-(4.22) odbywa się w analogiczny sposób jak w modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza (zob. rozdział 2). Różnice wynikają ze zmiany równań (4.1)-(4.4), które mają swoje odzwierciedlenie w równaniu (4.20) oraz w równaniach (4.21), (4.22).

Wartości zmiennych modelu (4.14)-(4.22) dla gospodarki w stanie stacjonarnym

Stan stacjonarny utożsamiamy z takim stanem gospodarki, w którym wszystkie zmienne modelu (4.14)-(4.22) są stałe w czasie. Oznacza to, że równowadze wygasa dynamika tych zmiennych: $\dot{U} = 0$, $\dot{l} = 0$, ..., $\dot{b} = 0$. Aby wyprowadzić wzory na wartości zmiennych w stanie stacjonarnym, wystarczy rozwiązać układ równań (4.14)-(4.22), przyrównując ich prawą stronę do zera.

Postępując analogicznie jak w rozdziale pierwszym, tzn. rozwiązując układ równań (4.14)-(4.22), w którym lewa strona jest równa zero a niewiadomymi są zmienne: U, l, m, π^e, y^e, v oraz b można udowodnić, że istnieje dokładnie jeden stan stacjonarny modelu (4.14)-(4.22) opisany wzorami:

$$\bar{U} = \frac{\bar{c}}{(1+\alpha_1-\tau)\bar{y}}, \quad (4.23)$$

$$\bar{l} = \frac{\bar{y}}{\bar{v}}, \quad (4.24)$$

$$\bar{m} = h \frac{\bar{y}^d}{\bar{r}}, \quad (4.25)$$

$$\bar{\pi}^e = \hat{p} = \bar{\pi} = \mu - n, \quad (4.26)$$

$$\bar{y}^d = \frac{n+\beta_n}{n+\beta_Z n^2+\beta_n \beta_N d n+\beta_n} \bar{y}, \quad (\bar{y}^e = \bar{y}^d), \quad (4.27)$$

$$\bar{v} = \frac{\bar{y}-\bar{y}^d}{n}, \quad (4.28)$$

$$\bar{b} = \frac{g-\tau_c(\alpha_4 \bar{y}^d-(1+\tau_1)\bar{U}\bar{y}-\delta)-(\tau-\alpha_1)\bar{U}\bar{y}}{\alpha_3 \tau_c \bar{r}-\bar{\rho}+\xi+n}, \quad \alpha_4 = \left(1 - \tau_p + \frac{\tau_p}{\tau_c}\right) = \text{const.} \quad (4.29)$$

$$\bar{y} = \bar{u} y^p, \quad y^p = \text{const.}, \quad (4.30)$$

$$\bar{\rho} = (1 - \tau_p) \bar{y}^d - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{y} - \delta, \quad (\bar{\rho} = \bar{\rho}^e) \quad (4.31)$$

$$\bar{r} = \bar{\rho} + \bar{\pi} - \xi, \quad (4.32)$$

$$\bar{c} = \bar{y}^d - (n + \delta + g). \quad (4.33)$$

Twierdzenie 3. Jeśli spełnione są założenia 3.1.1-3.1.6, to stan stacjonarny (4.23)-(4.33) modelu (4.14)-(4.22) jest lokalnie asymptotycznie stabilny.

Dowód. Wszystkie zastosowane modyfikacje równań modelu KMG z rozdziału 1 polegają jedynie na pomnożeniu kilku zmiennych przez dodatnie stałe. Łatwo pokazać, że te modyfikacje nie mają większego wpływu na strukturę dowodu stabilności stanu stacjonarnego modelu KMG. Oznacza to, że dowód Twierdzenia 3 jest analogiczny do

dowodu Twierdzenia 1 modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza i z tego powodu nie zostanie przedstawiony w tej pracy.

4.1.3. Adaptacja podstawowych równań zmodyfikowanego modelu

Parametry modelu zostały oszacowane na podstawie danych rocznych o gospodarce polskiej w 2018 r. zaczerpniętych z Rocznika Statystycznego 2019 r., a także z baz danych Eurostatu, Banku Światowego oraz GUS. Z wymienionych źródeł danych statystycznych posłużyliśmy się danymi o konsumpcji, kapitale rzeczowym (środki trwałe), produkcji, inwestycji, podaży pieniądza, długu publicznym, zapasach, zatrudnieniu, średniej rocznej płacy nominalnej, koszcie pracy, wskaźniku cen dóbr i usług oraz podaży i popycie na pracę.

Tabela 4.1. Dane roczne o gospodarce polskiej w 2018 r.

Nazwa zmiennej	Symbol	Wartość zmiennej w 2018 r.
Kapitał rzeczowy (środki trwałe)	$K(0)$	4 029 717 mln zł
Produkt krajowy brutto	$Y(0)$	2 121 555 mln zł
Inwestycje	$I^a(0)$	440550 mln zł
w tym		
• nakłady na środki trwałe	$I(0)$	386448 mln zł
• przyrost rzeczowych środków obrotowych		53 696 mln zł
Konsumpcja prywatna	$C(0)$	1220916 mln zł
Konsumpcja publiczna	$G(0)$	374691 mln zł
Liczba pracujących	$L^d(0)$	16 020 tys.
Liczba aktywnych zawodowo	$L(0)$	16 989 tys.
Podaż pieniądza	$M(0)$	1012353 mln zł
Zapasy	$N(0)$	362 435 mln zł
Dług sektora instytucji rządowych i samorządowych	$B(0)$	1034358 mln zł
Eksport	$EX(0)$	1 171 978 mln zł
Import	$IM(0)$	1 107 002 mln zł
Deficyt budżetowy (całkowity)	$\dot{B}(0)$	- 5 193 mln zł
Obsługa (całkowitego) długu Skarbu Państwa	$\frac{r^B}{p}(0)$	21 524 mln zł

Źródło danych: Rocznik Statystyczny 2019 r.

Pozostałe wielkości tj. konsumpcja pracowników, oczekiwana sprzedaż, popyt oraz inwestycje przeznaczone na zapasy (korekta produkcji względem oczekiwanej sprzedaży) oraz parametry modelu obliczyliśmy na podstawie równań modelu.

Na podstawie danych statystycznych ustaliliśmy, że:

Popyt całkowity (sprzedaż) w 2018 roku był równy:

$$Y^d(0) = C(0) + I(0) + G(0) + NX(0) = 2\,085 \text{ mld zł}, \quad (4.34)$$

gdzie wartości $C(0)$, $G(0)$, $I(0)$ oraz $NX(0)$ (wartość eksportu netto w 2018 roku ($NX(0) = EX(0) - IM(0)$) przyjmujemy z rocznika statystycznego (zob. tabela 4.1.1).

Uwaga 4.1. W eksperymentach komputerowych zakładamy, że wartości zmiennych: oczekiwana sprzedaż Y^e i oczekiwana stopa zysku z kapitału rzeczowego ρ^e w roku bazowym, tzn. w roku 2018, są równe odpowiadającym im wielkościom rzeczywistym w 2018 roku.

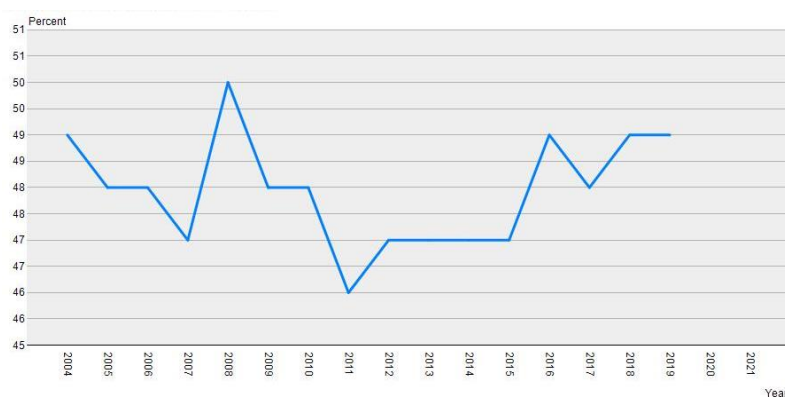
Przykładowo, zgodnie z Uwagą 4.1, przyjmujemy, że oczekiwany popyt w 2018 roku $Y^e(0)$ był równy rzeczywistej wartości popytu w tym samym roku $Y^d(0)$:

$$Y^e(0) = Y^d(0) = 2\,085 \text{ mld zł}. \quad (4.35)$$

Teraz zajmiemy się oszacowaniem rocznej realnej płacy brutto ω w 2018 roku. W tym celu posłużymy się zdefiniowaną w rozdziale pierwszym zmienną określającą udział płac w PKB:

$$U = \frac{\omega L^d}{Y}. \quad (4.36)$$

Według danych United Nations Global Sustainable Development Goals udział płac nominalnych w PKB⁴⁵ od 2007 roku do 2019 roku mieścił się w granicach 45% a 50%. W 2018 r. wyniósł około 48% (Rysunek 4.1.1) i też taką wartość przyjmujemy w symulacjach.



Rysunek 4.1.1. Udział płac nominalnych w PKB

Źródło: United Nations Global SDG Database

⁴⁵ Labour share of GDP, comprising wages and social protection transfers. Labour share of Gross Domestic Product (GDP) is the total compensation of employees given as a percent of GDP, which is a measure of total output. It provides information about the relative share of output which is paid as compensation to employees as compared with the share paid to capital in the production process for a given reference period.

Uwaga 4.2. W symulacjach komputerowych zakładamy, że poziom cen p w okresie bazowym tzn. w 2018 roku był równy 1 ($p(0) = 1$).

Zgodnie z Uwagą 4.2 oraz definicją realnej płacy brutto $\omega = w/p$, w symulacjach przyjmujemy, że w 2018 roku nominalna stawka płac brutto $w(0)$ była równa realnej płacy brutto:

$$w(0) = \omega(0) \cdot p(0) = \omega(0) \cdot 1 = \omega(0). \quad (4.37)$$

Podstawiając wartości zmiennych $L^d(0)$, $Y(0)$ z Tabeli 4.1.1 oraz $U(0)$ (zob. Rysunek 4.1.1) do równania (4.36) oraz korzystając z (4.37), możemy obliczyć realną stawkę płac brutto w 2018r.:

$$\omega(0) = 66,2 \text{ tys. zł.}^{46} \quad (4.38)$$

Z (4.37) i (4.38) mamy:

$$w(0) = \omega(0) = 66,2 \text{ tys. zł.} \quad (4.39)$$

W symulacjach realną stopę zysku z kapitału trwałego ρ w 2018 roku określa nowe równanie (4.6):

$$\rho(0) = \frac{(1-\tau_p)Y^d(0) - (1+\tau_1)\omega(0)L^d(0) - \delta K(0)}{K(0)}, \quad (4.40)$$

gdzie $\tau_p > 0$ to stały w czasie wskaźnik określający stosunek podatków pośrednich do podatków całkowitych, $\tau_1 > 0$ to stawka składki na ubezpieczenie społeczne od wynagrodzeń płacona przez pracodawcę, $Y^d(0)$ to realna sprzedaż w 2018 roku (z podatkiem pośrednim), $(1 + \tau_1)\omega(0)L^d(0)$ – całkowity, realny koszt zatrudnienia wszystkich pracowników w 2018 roku ($\omega(0)L^d(0)$ to realne wynagrodzenia brutto wszystkich pracowników), $\delta K(0)$ to realna wartość deprecjacji kapitału trwałego w 2018 roku, $\delta > 0$ – stała w czasie stopa deprecjacji kapitału trwałego.

Aby wyznaczyć realną stopę zysku z kapitału trwałego ρ w 2018 roku, posługując się równaniem (4.6), musimy najpierw obliczyć współczynnik τ_p , stawkę τ_1 oraz stopę deprecjacji kapitału trwałego δ .

Zacznijmy od wyznaczenia współczynnika τ_p . Współczynnik ten, zgodnie z jego definicją, obliczamy korzystając z równania (4.7):

$$\tau_p = \frac{T_p(0)}{Y^d(0)}. \quad (4.41)$$

⁴⁶ Według danych GUS (Tabela 4.1.1) przeciętna stawka płac w 2018 r. wyniosła 58,3 tys. zł. Powstała różnica może wynikać z m.in. ze sposobu obliczania tych zmiennych. Jeśli w symulacjach przyjęlibyśmy płace z danych statystycznych, wtedy udział płac w PKB byłby równy 44%.

Według danych Eurostatu podatek pośredni w 2018 roku wyniósł około $T_p(0) = 302$ mld zł (podatek akcyzowy, podatek od towarów i usług (VAT) i podatek od gier). Korzystając z obliczonej wcześniej wartości sprzedaży $Y^d(0)$ w 2018 r., z (4.41) możemy wyznaczyć współczynnik τ_p :

$$\tau_p = \frac{T_p(0)}{Y^d(0)} = 15\%.$$

W Polsce pracodawca, poza wynagrodzeniami brutto wypłacanym zatrudnionym pracownikom, ponosi dodatkowe obciążenie, jakim jest składka na ubezpieczenie społeczne. W naszym modelu KMG wartość tego ubezpieczenia jest równa: $\tau_1 \omega L^d$, gdzie τ_1 to stawka tego ubezpieczenia (wartość obciążenia pracodawcy płaconą za wypłacane wynagrodzenie na ubezpieczenie społeczne). W 2018 roku wg. danych udostępnionych przez ZUS całkowita składka na ubezpieczenie społeczne zapłacona przez pracodawców była równa około 70 mld zł, co możemy zapisać jako:

$$\tau_1 \omega(0) L^d(0) = 70 \text{ mld zł.} \quad (4.42)$$

Znając wartość sumy realnych wynagrodzeń brutto wszystkich pracowników w 2018 r., $\omega(0) L^d(0)$, z (4.42) możemy obliczyć stawkę składki na ubezpieczanie społeczne płaconą przez pracodawców τ_1 :

$$\tau_1 = 7\%. \quad (4.43)$$

Według danych Banku Światowego tempo zużycia kapitału trwałego w Polsce w 2018 roku było równe około 12% PKB. Jak wynika z danych GUS (Tabela 4.1.1) kapitał trwały (środki trwałe) w 2018 roku był około dwa razy większy niż PKB ($K(0)/Y(0) = 1,9$). A więc stopa deprecjacji kapitału trwałego wynosi 6%:

$$\delta = 0,06. \quad (4.44)$$

Podstawiając dane z Tabeli 4.1.1 oraz wyznaczone powyżej parametry (α_2, τ_1, δ) do równania (4.6), możemy wyznaczyć wartość stopy zysku z kapitału trwałego w 2018 roku:

$$\rho(0) = 11\%. \quad (4.45)$$

W kolejnym kroku oszacujemy stawkę podatkową od zysku z kapitału trwałego i odsetek z posiadanych obligacji τ_c oraz stawkę podatkową od wynagrodzeń z pracy τ_w i stawkę składki na ubezpieczanie społeczne płaconą przez pracowników najemnych τ_2 (do eksperymentów symulacyjnych wystarczy znajomość sumy tych dwóch składek $\tau = \tau_w + \tau_2$).

W symulacjach dla uproszczenia przyjmujemy, że podatek od zysku z kapitału trwałego i odsetek z posiadanych obligacji to podatek CIT (w rzeczywistości dochód z obligacji podlega podatkowi w wysokości 19% i jest ujęty w zeznaniach podatkowych PIT (jest to tzw. podatek Belki)). Według danych GUS wartość podatku CIT w 2018 r. wyniosła około 44,3 mld zł. Aby obliczyć stawkę podatkową τ_c , skorzystamy z równania modelu (4.11c):

$$T_c = \tau_c \left(\rho K + \alpha_3 \frac{r^B}{p} \right), \quad (4.46)$$

gdzie T_c – wartość podatku od zysku z kapitału trwałego i odsetek z posiadanych obligacji (podatek CIT), ρK – zysk z kapitału, $\frac{r^B}{p}$ – odsetki z posiadanych obligacji, α_3 – stały w czasie stosunek wartości obligacji w posiadaniu podmiotu krajowego do wartości wszystkich obligacji.

Z Tabeli 4.1.1 odczytujemy wartości zmiennych: $\frac{r^{(0)B(0)}}{p(0)}$ – całkowita obsługa długu publicznego, $K(0)$ – kapitał trwały. Z powyższych obliczeń mamy wskaźnik rentowności kapitału $\rho(0) = 12\%$. Przyjmujemy, że w 2018 roku ceny były równe $p(0) = 1$ (zob. Uwaga 4.2). Według danych GUS stosunek wartości obligacji w posiadaniu podmiotu krajowego do wartości wszystkich obligacji wynosi około 0,73, więc w symulacjach przyjmujemy $\alpha_3 = 0,73$. Zatem, korzystając z (4.11c), możemy wyznaczyć stawkę podatku τ_c :

$$\tau_c = 9,4\%. \quad (4.47)$$

Stawkę podatkową od wynagrodzeń z pracy τ_w i stawkę składki na ubezpieczenie społeczne τ_2 obliczymy, wykorzystując równanie:

$$T_{w2} = \tau \omega L^d, \quad (4.48)$$

gdzie $\tau = \tau_w + \tau_2$. Według danych GUS wartość podatku od wynagrodzeń z pracy w 2018 roku wyniosła około 11% procent PKB (w tym stawka PIT 5% PKB oraz stawka składki na ubezpieczenie społeczne płacona przez pracowników 6% PKB), co możemy zapisać jako:

$$\frac{T_{w2(0)}}{Y(0)} = 11\%, \quad (4.49)$$

Podstawiając (4.48) do (4.49), otrzymujemy:

$$\frac{\tau \omega(0) L^d(0)}{Y(0)} = 11\%. \quad (4.50)$$

A po przekształceniach, z (4.50) mamy:

$$\tau = \tau_w + \tau_2 = 11\% \frac{Y(0)}{\omega(0) L^d(0)} = \frac{11\%}{U(0)} = 22,7\%, \quad (4.51)$$

gdzie $U(0) = 0,48$ (udział płac w PKB). W ten sam sposób możemy wyznaczyć stawki τ_w i τ_2 :

$$\tau_2 = 12,3\% , \quad \tau_w = 10,4\% . \quad (4.52)$$

W kolejnym kroku wyznaczymy współczynnik α_1 , który oznacza stały w czasie stosunek transferów publicznych do płac realnych. Obliczymy go, podstawiając dane z tabeli 4.1.1: $C(0)$, $L^d(0)$, wyznaczoną wartość $\omega(0)$ (zob. (4.38)) oraz obliczoną stawkę τ (zob. (4.51)) do równania (4.5):

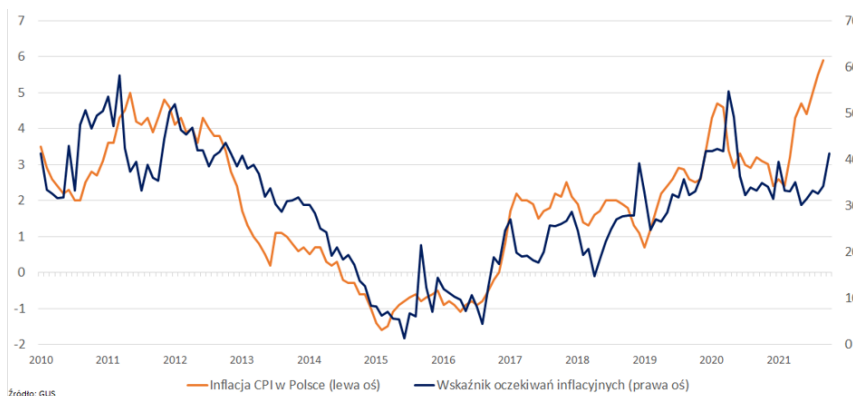
$$\alpha_1 = \frac{C(0)}{\omega(0)L^d(0)} + \tau - 1 = 0,42 . \quad (4.53)$$

Według danych GUS (zob. Rysunek 4.1.2.) stopa inflacji (CPI, wskaźnika cen i usług konsumpcyjnych) w 2018 r. wyniosła:

$$\pi(0) = 1,6\% . \quad (4.54)$$

Natomiast oczekiwana stopa inflacji, według tego samego źródła, w 2018 roku wahała się w przedziale od 0% do 1,5%. W symulacjach przyjmujemy, że oczekiwania inflacyjne w roku początkowym wynoszą:

$$\pi^e(0) = 0\% . \quad (4.55)$$



Rysunek 4.1.2. Oczekiwania inflacyjne Polaków na tle inflacji

Źródło: Bankier.pl na podstawie danych GUS.

NBP podaje⁴⁷, że wartość stopy procentowej w tym samym roku była równa około:

$$r = 2\% . \quad (4.56)$$

W omawianym modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza stopa procentowa r jest zmienną wynikową zależną od podaży pieniądza M , oczekiwanego popytu Y^e i aktualnych cen p :

$$r \equiv r(M, Y^e, p) = h \frac{pY^e}{M} . \quad (4.57)$$

⁴⁷ Źródło danych: NBP, Podstawowe stopy procentowe NBP w latach 1998-2022.

gdzie $h > 0$ to parametr reakcji, którego wartość jest stała w czasie.

Wartość stopy procentowej r jest ustalana przez bank centralny. Z tego powodu wartość tę w symulacjach modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza interpretujemy jako wskaźnik rentowności obligacji. Dlatego jego wartość w stanie początkowym obliczymy, dzieląc odsetki z posiadanych obligacji w 2018 r. (koszt obsługi długu publicznego), $rB = 29,5$ mld zł., przez całkowity dług w 2018 r., $B(0) = 1\,035$ mld zł (zob. Tabela 4.1.1). Obliczony w ten sposób wskaźnik jest równy około 3%:

$$r(0) = 3\%. \quad (4.58)$$

Tabela 4.1.2. Podsumowanie wartości parametrów dla gospodarki Polskiej

Nazwa parametru	Wartość parametru	Źródło danych i metoda kalibracji
Stosunek produkcji potencjalnej do kapitału trwałego	$y^p = 0,65$	Na podstawie równania modelu: $y^p = y(0)/u(0)$, gdzie $y(0) = Y(0)/K(0)$ – dane GUS, $u(0) = 0,81$ - dane: https://tradingeconomics.com/poland/capacity-utilization
Naturalna wartość wykorzystania zdolności produkcyjnych	$\bar{u} = 0,85$	Źródło: https://manufacturing-software-blog.mrpeasy.com/capacity-utilization/
Naturalna stopa zatrudnienia	$\bar{V} = 0,95$	W badaniach empirycznych naturalną stopę bezrobocia (NAIRU) szacuje się na poziomie 5%, zob. Konopczyński (2015) oraz Staiger, Stock, Watson (1997)
Stopa wzrostu wydajności pracy	$n = 0,03$	wg. danych Eurostatu stopa wzrostu wydajności pracy w 2018 roku była równa $n_x = 3\%$
Stopa wzrostu podaży pieniądza	$\mu = 0,05$	Źródło: NBP, roczna stopa wzrostu podaży pieniądza M1
Konsumpcja publiczna na jednostkę kapitału	$g = 0,09$	Na podstawie wzoru $G(0) = gK(0)$ oraz danych o $G(0)$ i $K(0)$ z tabeli 4.1.1
Współczynnik deprecjacji kapitału	$\delta = 0,06$	Źródło danych: Bank Światowy
Stawka podatkowa od wynagrodzeń za pracę	$\tau_w = 10,4\%$	Obliczenia własne
Stawka podatkowa od zysku z kapitału i odsetek z obligacji	$\tau_c = 9,4\%$	Obliczenia własne
Stawka składki na ubezpieczenie społeczne płacona przez pracodawców	$\tau_1 = 7\%$	Obliczenia własne
Stawka składki na ubezpieczenie społeczne płacona przez pracowników	$\tau_2 = 12,7\%$	Obliczenia własne
Stosunek podatków pośrednich do popytu całkowitego	$\tau_p = 15\%$	Obliczenia własne
Stosunek transferów publicznych do realnych płac brutto	$\alpha_1 = 0,42$	Obliczenia własne

Źródło: Obliczenia własne.

4.1.4. Kalibracja parametrów reakcji przy pomocy programu Solver

W podrozdziale tym zostaną wyznaczone parametry reakcji: $\beta_n, \beta_{N^d}, \beta_Z, \beta_w, \beta_p, \beta_{y^e}, \kappa_p, \kappa_w, \dot{i}_1, \dot{i}_2, h$. Na podstawie równań modelu oraz danych statystycznych w łatwy sposób

można jedynie wyznaczyć parametry β_{Nd} oraz h . Uzyskanie pozostałych parametrów reakcji przy pomocy równań modelu oraz dostępnych danych statystycznych jest zadaniem trudnym, wymagającym zaawansowanych metod ekonometrycznych⁴⁸. W niniejszej pracy kalibracja tych parametrów została ograniczona do prostej metody polegającej na rozwiązaniu układu dwóch równań (4.21)-(4.22), w którym niewiadomymi są parametry: $\beta_n, \beta_z, \beta_w, \beta_p, \beta_{ye}, \kappa_p, \kappa_w, i_1, i_2$, a pozostałe wielkości są obliczone za pomocą danych statystycznych. Wadą tej metody jest nieskończona liczba rozwiązań układu równań (4.21)-(4.22) wynikająca z większej liczby niewiadomych niż równań. Drugą wadą tej metody jest problem wyboru przykładowego zestawu parametrów będącego rozwiązaniem układu równań (4.21)-(4.22) do dalszych badań. Mimo tych wad metoda ta jest wystarczająca do zbadania najważniejszych własności modelu potrzebnych do odpowiedzi na postawione pytania w niniejszej pracy.

Kalibrację parametrów reakcji zaczynamy od wyznaczenia na podstawie danych statystycznych (zob. Tabela 4.1) oraz równań omawianego modelu parametrów β_{Nd} oraz h :

$$\beta_{Nd} = \frac{N(0)}{Y^e(0)} = 0,17, \quad h = \frac{r(0)M(0)}{p(0)Y^e(0)} = 0,02.$$

W dalszej kolejności układ równań:

$$y^d = (1 + \alpha_1 - \tau)yU + i_1 \left(\rho^e - \xi - \left(\frac{hy^e}{m} - \pi^e \right) \right) + i_2(u - \bar{u}) + \delta + g + \\ + \kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p)(V - \bar{V}) - \beta_p(1 - \kappa_w)(u - \bar{u}) \right) + n + \beta_{ye} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \quad (4.59)$$

$$y = y^e + \beta_n \beta_{Nd} y^e - \beta_n v + \\ + y^e \beta_z \left(\kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p)(V - \bar{V}) - \beta_p(1 - \kappa_w)(u - \bar{u}) \right) + n + \beta_{ye} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right) \quad (4.60)$$

gdzie $\rho^e = (1 - \alpha_2)y^e - (1 + \tau_1)Uy - \delta$.

przedstawiamy w równoważnej formie:

$$y = \frac{AF - CE}{AD - BE}, \quad (4.61)$$

$$y^d = \frac{CD - BF}{AD - BE}, \quad (4.62)$$

gdzie

⁴⁸ Innym sposobem kalibracji parametrów reakcji jest wykorzystanie narzędzi ekonometrycznych zaprezentowane w pracy Chiarella i in. (2011). Autorzy do estymacji parametrów wykorzystali metodę zmiennych instrumentalnych (*two-stage least squares*, 2SLS).

$$A = \left(1 - \frac{\beta_{y^e}}{y^e}\right),$$

$$B = \left(- (1 + \tau_1) i_1 U - \frac{i_2}{y^p} - \frac{\kappa \beta_w (1 - \kappa_p)}{l} + \frac{\kappa \beta_p (1 - \kappa_w)}{y^p} - (1 + \alpha_1 - \tau) U\right),$$

$$C = i_1 \left((1 - \alpha_2) y^e - \delta - \xi - \left(\frac{h y^e}{m} - \pi^e \right) \right) - \\ - i_2 \bar{u} + n + g + \delta + \kappa (\beta_p (1 - \kappa_w) \bar{u} - \beta_w (1 - \kappa_p) \bar{V}) - \beta_{y^e},$$

$$D = \left(1 - \frac{y^e \beta_Z \kappa \beta_w (1 - \kappa_p)}{l} + \frac{y^e \beta_Z \kappa \beta_p (1 - \kappa_w)}{y^p}\right),$$

$$E = -\beta_Z \beta_{y^e},$$

$$F = y^e \left(1 + \beta_n \beta_{N^d} + \beta_Z (\kappa \beta_p (1 - \kappa_w) \bar{u} - \kappa \beta_w (1 - \kappa_p) \bar{V}) + n - \beta_{y^e}\right) - \beta_n v.$$

Wartości zmiennych y , y^d ustaliliśmy na podstawie równań modelu i danych statystycznych:

$$y = \frac{Y(0)}{K(0)} = 0,53, \quad y^d = \frac{Y^d(0)}{K(0)} = 0,52.$$

Z kolei za wartości parametrów: $\alpha_1, \alpha_2, y^p, \bar{u}, n, \mu, g, \delta, \bar{V}, \tau_w, \tau_c, \xi$, przyjęliśmy wielkości zaprezentowane wraz ze sposobem ich oszacowania w Tabeli 4.1.2. Układ równań (4.61)-(4.62) ma więcej niewiadomych niż równań co może oznaczać, że układ ten ma nieskończenie wiele rozwiązań. Aby wyznaczyć przykładowe rozwiązanie układu równań (4.61)-(4.62), w którym za niewidome przyjmujemy parametry reakcji: $\kappa_w, \kappa_p, \beta_n, \beta_Z, \beta_{y^e}, \beta_p, i_1, i_2$, skorzystaliśmy z dodatku programu MS Excel – Solver. Po wprowadzeniu wyznaczonych zmiennych i parametrów modelu, wraz z następującymi ograniczeniami wartości powyższych parametrów:

- parametry reakcji: $\kappa_w, \kappa_p, \beta_n, \beta_Z, \beta_{y^e}, \beta_p, i_1, i_2$ są wielkościami dodatnimi,
- wartości parametrów κ_w oraz κ_p są mniejsze od 1,
- wartości parametrów $\beta_n, \beta_Z, \beta_{y^e}, \beta_p$ oraz i_2 są mniejsze od 1,
- parametr i_1 ma wartość większą od 1,

za pomocą programu Solver ustaliliśmy kilka zestawów wartości tych parametrów. Na podstawie analizy stabilności stanu stacjonarnego z wyznaczonych zestawów parametrów do dalszej analizy przyjęliśmy 5 zestawów parametrów, które zostały przedstawione w tabeli 4.1.3. Przyjęte powyżej ograniczenia wartości parametrów wynikają z założeń dowodu stabilności stanu stacjonarnego modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza.

Tabela 4.1.3. Wartości parametrów reakcji obliczone przy pomocy MS Excel – Solver

Parametr		Zestaw 1	Zestaw 2	Zestaw 3	Zestaw 4	Zestaw 5
		wartość				
κ_w	waga wpływu aktualnej inflacji i oczekiwanej inflacji na stopę wzrostu płac nominalnych	0,30				
κ_p	waga wpływu nadwyżki stopy wzrostu płac nominalnych ponad stopę wzrostu wydajności pracy i oczekiwanej inflacji na inflację cen	0,80				
β_n	reakcja produkcji na różnica między popytem na zapasy a podażą zapasów	0,10	0,10	0,20	0,10	0,10
β_Z	reakcja wielkości produkcji na przyrost oczekiwanego popytu	0,40	0,40	0,57	0,40	0,40
β_{π^e}	reakcja oczekiwań inflacyjnych na błąd dotyczący oczekiwań inflacyjnych	0,10	0,20	0,05	0,20	0,20
β_p	reakcja cen na lukę produkcyjną	0,60	0,60	0,20	0,36	0,36
β_w	reakcja nominalnych płac na zmiany zachodzące na rynku pracy	0,40	0,60	0,60	0,70	0,70
β_{y^e}	reakcja stopy wzrostu oczekiwanego popytu na względny błąd oczekiwań dotyczących wielkości łącznego popytu	0,04	0,03	0,03	0,10	0,14
i_1	reakcja popytu inwestycyjnego na różnicę między stopą zysku z kapitału i realną stopą procentową	2,00	2,10	2,50	2,10	2,10
i_2	reakcja popytu inwestycyjnego na lukę produkcyjną	0,10	0,20	0,30	0,20	0,20
α	waga wpływu aktualnej inflacji i oczekiwanej inflacji na przyrost oczekiwań inflacyjnych	0,10				
Stan stacjonarny		lokalnie asymptotycznie stabilny			marginalnie stabilny	niestabilny

Źródło: obliczenia własne.

Aby z ekonomicznego punktu widzenia porównać gospodarki opisane powyższymi pięcioma zestawami wartości parametrów reakcji (wartości pozostałych parametrów są takie same w każdym z pięciu wariantów), przypomnijmy równania modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza, w których te parametry występują:

$$\hat{w} = \beta_w(V - \bar{V}) + \kappa_w \hat{p} + (1 - \kappa_w)\pi^e + n, \quad (4.63)$$

$$\hat{p} = \beta_p(u - \bar{u}) + \kappa_p(\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p)\pi^e, \quad (4.64)$$

$$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e}(\alpha \hat{p} + (1 - \alpha)\bar{\pi} - \pi^e) \quad (4.65)$$

$$\dot{K} = i_1(\rho^e - (r - \pi^e))K + i_2(u - \bar{u}) + \hat{Y}^e K, \quad (4.66)$$

$$\hat{Y}^e = \hat{w} + \beta_{y^e} \frac{Y^d - Y^e}{Y^e}, \quad (4.67)$$

$$Y = Y^e + \beta_Z \dot{Y}^e + \beta_n(N^d - N). \quad (4.68)$$

Porównując zestawy parametrów, zakładamy, że zestaw 1 jest zestawem podstawowym, tzn. będziemy porównywać jedynie zestaw 1 z pozostałymi zestawami parametrów. Dla ułatwienia w Tabeli 4.1.4 przedstawiamy porównanie zestawu 1 z pozostałymi zestawami.

Tabela 4.1.4. Porównanie zestawu parametrów reakcji 1 z zestawami 2, 3, 4 i 5

	Zestaw 1	Zestaw 2	Zestaw 3	Zestaw 4	Zestaw 5
Parametr	wartość/różnica				
κ_w	0,30				
κ_p	0,80				
β_n	0,10		$\beta_n \uparrow 0,1$	0,10	
β_z	0,40		$\beta_z \uparrow 0,17$	0,40	
β_{π^e}	0,10	$\beta_{\pi^e} \uparrow 0,1$	$\beta_{\pi^e} \downarrow 0,05$	$\beta_{\pi^e} \uparrow 0,1$	$\beta_{\pi^e} \uparrow 0,1$
β_p	0,60		$\beta_p \downarrow 0,4$	$\beta_p \downarrow 0,24$	$\beta_p \downarrow 0,24$
β_w	0,40	$\beta_w \uparrow 0,2$	$\beta_w \uparrow 0,2$	$\beta_w \uparrow 0,3$	$\beta_w \uparrow 0,3$
β_{y^e}	0,04	$\beta_{y^e} \downarrow 0,01$	$\beta_{y^e} \downarrow 0,01$	$\beta_{y^e} \uparrow 0,06$	$\beta_{y^e} \uparrow 0,1$
i_1	2,00	$i_1 \uparrow 0,1$	$i_1 \uparrow 0,5$	$i_1 \uparrow 0,1$	$i_1 \uparrow 0,1$
i_2	0,10	$i_2 \uparrow 0,1$	$i_2 \uparrow 0,2$	$i_2 \uparrow 0,1$	$i_2 \uparrow 0,1$
α	0,10				
Stan stacjonarny	lokalnie asymptotycznie stabilny			marginalnie stabilny	niestabilny

Źródło: obliczenia własne.

Istotną różnicą między zestawami 1-5 jest rodzaj stabilności stanu stacjonarnego gospodarki. Gospodarka opisana zestawem 1-3 po pewnym czasie będzie rozwijała się równomiernie ze stałą stopą wzrostu (stan stacjonarny jest lokalnie asymptotycznie stabilny). Natomiast w przypadku zestawu 4 uzyskujemy cykliczny charakter wzrostu gospodarki, a więc będzie się ona rozwijała ze zmienną stopą wzrostu. Zestaw 5 reprezentuje gospodarkę niestabilną, w której zmienne po pewnym czasie gwałtownie rosną lub maleją.

Zestawy 2, 4 i 5 charakteryzują gospodarkę z szybszą reakcją oczekiwań inflacyjnych (4.65) na błąd w oszacowaniu inflacji w poprzednim okresie w porównaniu z zestawem 1 (większa wartość parametru β_{π^e}). Również stopa wzrostu nominalnej stawki płac (4.63) jest w przypadku tych zestawów wartości parametrów bardziej wrażliwa na zmianę stopy zatrudnienia (za co odpowiada parametr reakcji β_w). Natomiast stopa wzrostu oczekiwanego popytu (4.67) w gospodarce opisanej zestawem 1 silniej reaguje na błąd prognozy popytu w poprzednim okresie niż w gospodarce opisanej zestawami 2 i 3 (parametr β_{y^e}). Odwrotna sytuacja ma miejsce w przypadku zestawów 4 i 5, co może być przyczyną zmiany stabilności stanu stacjonarnego gospodarki w tych przypadkach (w zestawach 4 i 5 parametr β_{y^e} jest większy niż w zestawach 1-3). Reakcja popytu inwestycyjnego (4.66) na różnicę między oczekiwanym zyskiem z kapitału trwałego a realną

stopą procentową oraz różnicę między wartością wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej a jej naturalną wartością jest mniejsza w przypadku gospodarki opisanej zestawem 1 niż w pozostałych przypadkach. W zestawach 3-5 w porównaniu do zestawu 1, uzyskujemy gospodarkę charakteryzującą się mniejszą wrażliwością rzeczywistej inflacji (4.64) na zmianę wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej (parametr β_p). Zgodnie z definicją wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej oznacza to, że wzrost produkcji spowoduje wyższy wzrost cen w gospodarce w przypadku zestawu 1 niż w przypadku zestawów 3-5 (przy nie zmienionych wartościach pozostałych zmiennych). Z Tabeli 4.1.4 można także odczytać, że gospodarka w przypadku zestawu 3 różni się od gospodarki opisanej zestawem 1 reakcją produkcji na zmianę stopy wzrostu oczekiwanego popytu i różnicę między popytem a podażą zapasów (4.68). Wzrost oczekiwanego popytu lub popytu na zapasy spowoduje większy wzrost produkcji w gospodarce w przypadku zestawu 3 niż w gospodarce opisanej zestawem 1 (parametry β_Z oraz β_n).

Wykorzystana metoda do wyznaczenia wartości parametrów reakcji utrudnia interpretację wpływu wartości parametrów reakcji na stabilność stanu stacjonarnego. Zmiana jednego parametrów jest kompensowana odpowiednią zmianą innych parametrów aby spełniony był układ równań (4.59)-(4.60). Niemniej jednak można zaobserwować z tabeli 4.1.4, że stabilność stanu stacjonarnego najbardziej wrażliwa jest na zmianę parametru reakcji β_{y^e} . A więc nawet niewielki wzrost reakcji produkcji na błąd w prognozie popytu może prowadzić do utraty stabilności stanu stacjonarnego co jest zgodne z pierwszym założeniem 1 twierdzenia 3 o lokalnej asymptotycznej stabilności stanu stacjonarnego.

Podsumowując, dla zestawów 1-3 stan stacjonarny gospodarki jest lokalnie asymptotycznie stabilny, dla zestawu 4 stabilny, a dla zestawu 5 niestabilny. Ponadto, porównując zestawy 1-3, zauważmy, że zestaw 1 wyróżnia się niską wartością parametru β_w , wpływającego na wrażliwość stopy wzrostu nominalnej stawki płac na zmianę stopy zatrudnienia, dla zestawu 2 charakterystyczna jest wysoka wartość parametru β_{π^e} , wpływającego na wrażliwość oczekiwanej inflacji na błąd prognozy inflacji w poprzednim okresie oraz niska wartość parametru β_{y^e} wpływająca na reakcje oczekiwanego popytu na błąd prognozy popytu w poprzednim okresie, a zestaw 3 wyróżnia wysoka wartość parametru β_n wpływającego na siłę reakcji produkcji na odchylenie popytu na zapasy od ich podaży oraz wysoka wartość parametrów i_1 oraz i_2 które wpływają na wrażliwość

inwestycji odpowiednio na różnicę między oczekiwaną stopą zysku z kapitału rzeczowego a oczekiwaną realną stopą procentową. Zestaw ten charakteryzuje także niska wartość parametru β_p wpływającego na wrażliwość cen na lukę produkcyjną. Dodatkowo zauważamy, że w zestawie 3 parametru β_{π^e} jest taka sama jak w zestawie 2. Zestaw 4 i 5 charakteryzuje wysoka wartość parametru β_{y^e} . W zestawie 5 w porównaniu z pozostałymi zestawami, wartość parametru β_{y^e} jest najwyższa co oznacza, że w tym zestawie wrażliwość oczekiwanego popytu na błąd prognozy popytu w poprzednim okresie jest największa i ta cecha może być odpowiedzialna za utratę stabilności stanu stacjonarnego.

Przed przystąpieniem do symulacji komputerowych konieczne jest jeszcze wyznaczenie początkowych wartości zmiennych modelu intensywnego (4.14)-(4.22). Wartości te obliczyliśmy na podstawie definicji tych zmiennych oraz danych o gospodarce polskiej (zob. Tabela 4.1.1). Wyniki tych obliczeń wraz z definicjami zmiennych zostały przedstawione w Tabeli 4.1.5.

Tabela 4.1.5. Wartości początkowe zmiennych modelu KMG w postaci intensywnej

Nazwa zmiennej	Wzór zmiennej	Wartość zmiennej
Udział płac w PKB	$U(0) = \frac{\omega(0)L(0)}{Y(0)}$	0,48
Pracochłonność pełnego zatrudnienia	$l(0) = \frac{x(0)L(0)}{K(0)}$	0,56
Realna podaż pieniądza na jednostkę kapitału rzeczowego	$m(0) = \frac{M(0)}{p(0)K(0)}$	0,36
Oczekiwana inflacja	$\pi^e(0)$	0
Oczekiwany popyt na jednostkę kapitału rzeczowego	$y^e(0) = \frac{Y^e(0)}{K(0)}$	0,52
Wielkość zapasów na jednostkę kapitału rzeczowego	$v(0) = \frac{N(0)}{K(0)}$	0,05
Stosunek podaży obligacji do wielkości kapitału rzeczowego	$b(0) = \frac{B(0)}{p(0)K(0)}$	0,26

Źródło danych: opracowanie własne.

Uwaga 4.3. Wartość zmiennej określającej wydajność pracy w roku 2018 $x(0)$ obliczamy, korzystając z równania $x(0) = \frac{Y(0)}{L^d(0)}$ (zob. (1.1.23)).

Uwaga 4.4. Z definicji zmiennych modelu intensywnego (4.14)-(4.22) wynika, że na stan początkowy nie mają wpływu wyznaczone za pomocą Solvera wartości parametrów reakcji.

Oznacza to, że dla każdego zestawu parametrów reakcji (Tabela 4.1.3) stan początkowy jest taki sam (Tabela 4.1.5).

4.1.5. Podsumowanie

W podrozdziale zmodyfikowano kilka kluczowych równań modelu KMG omówionego w rozdziale pierwszym w celu uwzględnienia jak najwięcej informacji o gospodarce polskiej podczas symulacji komputerowych. Zastosowane modyfikacje nie wpłynęły na strukturę matematyczną modelu dzięki czemu można przyjąć, że istnieje jeden stan stacjonarny zmodyfikowanego modelu KMG w postaci intensywnej oraz stan ten jest lokalnie asymptotycznie stabilny, co wynika z analizy modelu KMG przedstawionej w rozdziałach pierwszym oraz trzecim.

Wartości części parametrów modelu zostały wyznaczone przy pomocy zmodyfikowanych równań modelu na podstawie danych o gospodarce polskiej za 2018 rok. Natomiast wartości pozostałych parametrów obliczono, wykorzystując program komputerowy Solver. Procedura obliczania wartości parametrów przy użyciu tego programu polega na wyznaczeniu przykładowego rozwiązania (zestawu wartości parametrów) nieoznaczonego układu równań, w przypadku rozpatrywanego problemu – układu dwóch z ośmioma niewiadomymi. Do symulacji komputerowych zaprezentowanych w kolejnym podrozdziale wyznaczono pięć różnych zestawów wartości parametrów wygenerowanych przez program Solver. Jednym z kryteriów wyboru zestawu parametrów był rodzaj stabilności stanu stacjonarnego.

Na podstawie definicji zmiennych modelu oraz danych o gospodarce polskiej wyznaczono także stan początkowy niezbędny do przeprowadzenia symulacji komputerowych w kolejnym podrozdziale.

4.2. Eksperymenty symulacyjne modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza

4.2.1. Procedury obliczeniowe

Dynamikę analizowanego modelu KMG opisuje układ siedmiu nieliniowych równań różniczkowych (4.14)-(4.20). Aby na jego podstawie przeprowadzić symulacje komputerowe, najlepiej byłoby znać analityczną postać jego rozwiązania. To jednak w przypadku takiego układu, ze względu na nieliniowość jego równań, jest praktycznie niemożliwe i dlatego konieczne jest zastosowanie jednej z metod numerycznych przybliżających rozwiązanie układu równań różniczkowych. Istnieje wiele takich metod, a

wśród nich metoda Eulera, którą się posłużyliśmy⁴⁹. Dla tej metody zastosowaliśmy krok $h = 1/12$ ⁵⁰.

Metoda Eulera dla modelu KMG

Niech X będzie wektorem o składowych $U, l, m, \pi^e, y^e, v, b$ zależnych od t . Podobnie niech F będzie wektorem o składowych f_i dla $i = 1, 2, \dots, 7$, gdzie:

$$\begin{aligned} f_1 &= U\kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p) \left(\frac{y}{l} - \bar{v} \right) - \beta_p(1 - \kappa_w) \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right), \\ f_2 &= l \left(n - \left(\bar{U} + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right) - i_1 \left((1 - \tau_p)y^e - Uy - \delta - \xi - \left(\frac{hy^e}{m} - \pi^e \right) \right) - i_2 \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right), \\ f_3 &= m \left(\mu - \pi^e - n - \kappa \left(\kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{v} \right) + \beta_p \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) \right) + \hat{l} \right), \\ f_4 &= \beta_{\pi^e} \left(\alpha \left(\kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{v} \right) + \beta_p \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) + \pi^e \right) + (1 - \alpha)(\mu - n) - \pi^e \right), \\ f_5 &= y^e \left(\bar{U} + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) + \hat{l} \right), \\ f_6 &= y - y^d - v(n - \hat{l}), \\ f_7 &= (g + rb - \tau_c(\alpha_4 y^d - (1 + \tau_1)Uy - \delta + \alpha_3 rb) - (\tau - \alpha_1)\tau_w Uy) - \\ &\quad - b \left(n - \hat{l} + \kappa \left(\beta_p \left(\frac{y}{y^p} - \bar{u} \right) + \kappa_p \beta_w \left(\frac{y}{l} - \bar{v} \right) \right) + \pi^e \right). \end{aligned}$$

Układ równań różniczkowych (4.14)-(4.20) możemy zapisać w postaci:

$$X'(t) = F(t, X), \quad (4.69)$$

z warunkiem początkowym:

$$X(t_0) = X_0. \quad (4.70)$$

Dodatkowo omawiany układ równań różniczkowy jest układem autonomicznym, czyli nie zależy od zmiennych niezależnych, w tym przypadku od zmiennej czasu, a więc równanie (4.69) możemy zapisać następująco:

$$X'(t) = F(X). \quad (4.70)$$

⁴⁹ Dla układu równań (4.14)-(4.20) metoda Eulera jest wystarczająca, daje rozwiązanie z przybliżeniem, które nam odpowiada. A jednocześnie, w porównaniu do innych metod (np. metoda Rungego-Kutty rzędu drugiego i rzędu czwartego, metoda Dormanda-Prince'a, ulepszona metoda Eulera (MIDPOINT)), jest stosunkowo prosta i pozwala szybko uzyskać wynik za pomocą obliczeń komputerowych.

⁵⁰ Przyjęta długość kroku $h = 1/12$ jest wystarczająco mała aby przybliżyć rozwiązania omawianego modelu ciągłego modelem dyskretnym co pokazały liczne symulacje dla różnych długości kroków. Dodatkowo, biorąc pod uwagę, że wykorzystane dane w eksperymentach symulacyjnych są danymi rocznymi, długość kroku $h = 1/12$ odzwierciedla zatem miesięczne przyrosty zmiennych modelu intensywnego.

Zakładając, że rozwiązanie układu (4.70) istnieje i jest jednoznaczne, możemy przedstawić je w postaci wektora:

$$X(t) = (U(t), l(t), m(t), \pi^e(t), y^e(t), v(t), b(t)) . \quad (4.71)$$

Wykorzystując metodę Eulera oraz równanie (4.70) i znając wartość $X(t)$ oraz $F(X(t))$, możemy obliczyć przybliżoną wartość funkcji $X(t + h)$ będącą rozwiązaniem równania różniczkowego:

$$X(t + h) = X(t) + F(X(t))h . \quad (4.72)$$

Przy pomocy powyższej metody możemy wyznaczyć przybliżone wartości rozwiązania układu równań (4.14)-(4.20).

Postać modelu KMG zastosowana w symulacjach komputerowych

$$\begin{aligned} U(t + s) &= U(t) + sU(t)\kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p)(V(t) - \bar{V}) - \beta_p(1 - \kappa_w)(u(t) - \bar{u}) \right) , \\ l(t + s) &= l(t) + sl(t) \left(\begin{array}{c} -\bar{U}(t + s) - \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right) - \\ -i_1(\rho^e(t) - \xi - (r(t) - \pi^e(t))) - i_2(u(t) - \bar{u}) \end{array} \right) , \\ m(t + s) &= m(t) + sm(t)(\mu - n - \hat{p}(t + s) + \hat{l}(t + 1)) , \\ \pi^e(t + s) &= \pi^e(t) + s\beta_{\pi^e}(\alpha\hat{p}(t + s) + (1 - \alpha)(\mu - n) - \pi^e(t)) , \\ y^e(t + s) &= y^e(t) + sy^e(t) \left(\bar{U}(t + s) + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right) + \hat{l}(t + s) \right) , \\ v(t + s) &= v(t) + s \left(y(t) - y^d(t) - v(t) (n - \hat{l}(t + s)) \right) , \\ b(t + s) &= b(t) + s(g + r(t)b(t) - \tau_c(\rho(t) + \alpha_3 r(t)b(t)) - \\ &\quad - (\tau - \alpha_1)\tau_w U(t)y(t)) - b(n - \hat{l}(t + s) + \hat{p}(t + s)) , \end{aligned} \quad (4.73)$$

gdzie

$$\begin{aligned} V(t) &= \frac{y(t)}{l(t)} , \quad u(t) = \frac{y(t)}{y^p} , \\ \hat{p}(t + 1) &= \left(\kappa \left(\kappa_p \beta_w (V(t) - \bar{V}) + \beta_p (u(t) - \bar{u}) \right) + \pi^e(t) \right) , \\ \rho^e(t) &= (1 - \tau_p)y^e(t) - (1 + \tau_1)U(t)y(t) - \delta , \\ \rho(t) &= (1 - \tau_p)y^d(t) - (1 + \tau_1)U(t)y(t) - \delta , \\ y^d &= (1 + \alpha_1 - \tau)y(t)U(t) + i_1(\rho^e(t) - \xi - (r(t) - \pi^e(t))) + i_2(u(t) - \bar{u}) + \delta + g + \\ &\quad + \kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p)(V(t) - \bar{V}) - \beta_p(1 - \kappa_w)(u(t) - \bar{u}) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right) , \\ y(t) &= y^e(t) + \beta_n \beta_{N^d} y^e(t) - \beta_n v(t) + \\ &\quad + y^e \beta_Z \left(\kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p)(V(t) - \bar{V}) - \beta_p(1 - \kappa_w)(u(t) - \bar{u}) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right) \right) , \end{aligned}$$

$$\hat{l}(t+s) = \frac{l(t+s)-l(t)}{l(t)}, \quad \hat{U}(t+s) = \frac{U(t+s)-U(t)}{U(t)}, \quad r(t) = \frac{hy^e(t)}{m(t)}.$$

gdzie s to długość kroku⁵¹. W symulacjach przyjmujemy, że $s = 1/12$.

4.2.2. Stany stacjonarne gospodarki polskiej przy różnych zestawach wartości parametrów reakcji

Do wyznaczania stanu stacjonarnego modelu (4.14)-(4.20) przyjęliśmy bazowy zestaw wartości egzogenicznych przedstawionych w tabelach 4.1.2 i 4.2.5 dla wszystkich pięciu symulacji. Natomiast zestawy wartości parametrów reakcji zaprezentowane w tabeli 4.1.3 (zestawy od 1 do 5) przyjęliśmy odpowiednio dla symulacji 1, 2, 3, 4 i 5. Przed zaprezentowaniem wartości zmiennych w stanie stacjonarnym dla wszystkich pięciu zestawów przypomnijmy równania zmiennych w stanie stacjonarnym:

$$\begin{aligned} \bar{\pi}^e &= \bar{\pi} = \mu - n, \quad V = \bar{V}, \quad u = \bar{u}, \\ \bar{y} &= \bar{u}y^p, \quad \bar{l} = \frac{\bar{y}}{\bar{v}}, \quad \bar{m} = h \frac{\bar{y}^d}{\bar{r}}, \\ \bar{y}^d &= \bar{y}^e = \frac{(n+\beta_n)}{n+\beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{N^d} n + \beta_n} \bar{u}y^p, \quad \bar{U} = \frac{\bar{c}}{(1+\alpha_1-\tau)\bar{y}}, \\ \bar{\rho} &= \bar{\rho}^e = (1-\tau_p)\bar{y}^d - (1+\tau_1)\bar{U}\bar{y} - \delta, \quad \bar{r} = \bar{\rho} + \bar{\pi} - \xi, \\ \bar{b} &= \frac{g-\tau_c(\alpha_4\bar{y}^d - (1+\tau_1)\bar{U}\bar{y} - \delta) - (\tau-\alpha_1)\bar{U}\bar{y}}{\alpha_3\tau_c\bar{r} - \bar{\rho} + \xi + n}, \quad \bar{c} = \bar{y}^d - (n + \delta + g). \end{aligned}$$

Z powyższych równań wynika, że parametry modelu, które wpływają na stan stacjonarny to: $\mu, n, \bar{V}, \bar{u}, \beta_n, \beta_Z, \beta_{N^d}, \alpha_1, \alpha_3, \tau, \tau_p, \tau_1, \delta, \xi, h, g$ oraz τ_c . A więc jedynymi parametrami wpływającymi na stan stacjonarny modelu, które zostały wyznaczone przy użyciu programu komputerowego Solver są β_n oraz β_Z . Z powyższego wynika, że stan stacjonarny dla zestawów 1,2,4 i 5 jest taki sam (mają te same wartości parametrów, od których zależy stan stacjonarny). Jedynie zestaw 3 może mieć inne wartości stanu stacjonarnego niż zestawy 1,2,4 i 5 z uwagi na różne wartości parametrów β_n oraz β_Z (zob. Tabela 4.1.3.).

W tabelach 4.2.1a i 4.2.1 zestawiliśmy wartości zmiennych w stanie stacjonarnym modelu (4.14)-(4.20) z wartościami tych zmiennych w stanie początkowym. Jak wyżej wspomniano, dla zestawów 1, 2, 4 i 5 wartości zmiennych w stanie stacjonarnym są takie same, więc

⁵¹ W opisie metody Eulera długość kroku oznaczamy literą h . W omawianym modelu literą h oznaczamy jeden z parametrów reakcji określający reakcję popytu na pieniądz na zmianę oczekiwanego nominalnego popytu i nominalną stopę procentową. Z tego powodu w przedstawianych równaniach modelu do oznaczania kroku używamy litery s .

zaprezentujemy jedynie jedną tabelę (Tabela 4.2.1a) dla tych czterech zestawów. Natomiast stan stacjonarny dla zestawu 3 przedstawimy w osobnej tabeli (Tabela 4.2.1b).

Tabela 4.2.1a. Porównanie wartości zmiennych modelu w stanie początkowym i w stanie stacjonarnym dla zestawów wartości parametrów 1,2,4 i 5

Nazwa zmiennej	Symbol	Stan początkowy	Stan stacjonarny	Różnica
Udział płac w PKB	U	0,480	0,560	0,080
Efektywna podaż pracy na jednostkę kapitału	l	0,560	0,582	0,022
Realna podaż pieniądza na jednostkę kapitału	m	0,350	0,358	0,008
Oczekiwana inflacja	π^e	0,000	0,020	0,020
Stosunek oczekiwanej sprzedaży do kapitału	y^e	0,521	0,549	0,027
Wielkość zapasów na jednostkę kapitału	v	0,048	0,122	0,074
Stosunek podaży obligacji do wielkości kapitału	b	0,257	2,814	2,557
Stopa zatrudnienia	V	0,940	0,950	0,010
Wskaźnik wykorzystania mocy produkcyjnej	u	0,810	0,850	0,040
Stosunek produkcji do kapitału	y	0,535	0,553	0,017
Realna stopa procentowa	R	0,030	0,011	-0,019
Nominalna stopa procentowa	r	0,030	0,031	0,001
Stopa zysku z kapitału	ρ	0,108	0,076	-0,033
Inflacja rzeczywista	π	0,016	0,020	0,004
Stosunek popytu do kapitału	y^d	0,521	0,549	0,028
Konsumpcja prywatna do kapitału	c	0,300	0,369	0,069

Źródło: opracowanie własne

Tabela 4.2.1b. Porównanie wartości zmiennych modelu w stanie początkowym i w stanie stacjonarnym dla zestawu 3

Nazwa zmiennej	Symbol	Stan początkowy	Stan stacjonarny	Różnica
Udział płac w PKB	U	0,480	0,560	0,080
Efektywna podaż pracy na jednostkę kapitału	l	0,560	0,582	0,022
Realna podaż pieniądza na jednostkę kapitału	m	0,350	0,358	0,008
Oczekiwana inflacja	π^e	0,000	0,020	0,020
Stosunek oczekiwanej sprzedaży do kapitału	y^e	0,521	0,549	0,027
Wielkość zapasów na jednostkę kapitału	v	0,048	0,122	0,074
Stosunek podaży obligacji do wielkości kapitału	b	0,257	2,814	2,557
Stopa zatrudnienia	V	0,940	0,950	0,010
Wskaźnik wykorzystania mocy produkcyjnej	u	0,810	0,850	0,040
Stosunek sprzedaży do kapitału	y	0,540	0,553	0,012
Realna stopa procentowa	R	0,028	0,011	-0,017
Nominalna stopa procentowa	r	0,028	0,031	0,003
Stopa zysku z kapitału	ρ	0,109	0,076	-0,033

Inflacja rzeczywista	π	0,016	0,020	0,004
Stosunek popytu do kapitału	y^d	0,517	0,549	0,032
Konsumpcja prywatna do kapitału	c	0,300	0,369	0,069

Źródło: opracowanie własne

Z tabel 4.2.1a - 4.2.1b wynika, że odpowiadające wielkości zmiennych w stanie stacjonarnym są podobne dla wszystkich zestawów wartości parametrów reakcji. Dla zestawów 1, 2, 4 i 5 wniosek ten jest oczywisty. Natomiast w zestawie 3 wartości parametrów reakcji β_n, β_z są inne niż w pozostałych czterech zestawach (od parametrów β_n, β_z zależy stan stacjonarny, zob. wyżej). Oznacza to, że zmiana parametru reakcji β_n została skompensowana zmianą parametru reakcji β_z . W tabelach 4.2.1a - 4.2.1b zaprezentowano również różnice między wartościami zmiennych w stanie stacjonarnym i stanie początkowym. Oprócz stopy zysku $\bar{\rho}$ z kapitału trwałego w stanie stacjonarnym i realnej stopy procentowej w stanie stacjonarnym: $\bar{R} = \bar{r} - \bar{\pi}$, wartości zmiennych w stanie stacjonarnym są większe niż w stanie początkowym. Stopa zysku z kapitału trwałego: $\bar{\rho} = (1 - \tau_p)\bar{y}^d - (1 + \tau_1)\bar{U}\bar{y} - \delta$ ma mniejszą wartość w stanie stacjonarnym niż w stanie początkowym, ponieważ stosunek płac realnych do kapitału trwałego $\bar{U}\bar{y} = \omega L^d/K$ wzrasta więcej niż stosunek realnego popytu do kapitału trwałego $\bar{y}^d = Y^d/K$. Natomiast to, że realna stopa procentowa: $\bar{R} = \bar{r} - \bar{\pi}$ ma mniejszą wartość w stanie stacjonarnym niż w stanie początkowym, wynika z faktu, że stopa inflacji wzrasta znacznie, podczas gdy nominalna stopa procentowa \bar{r} tylko w niewielkim stopniu.

Tabela 4.2.1c. Porównanie wartości zmiennych modelu w stanie początkowym i w stanie stacjonarnym

Nazwa zmiennej	Stan początkowy	Stan stacjonarny	Różnica %
Udział płac w PKB	0,480	0,560	17%
Realna podaż pieniądza na jednostkę PKB	0,654	0,647	-1%
Wielkość zapasów na jednostkę PKB	0,090	0,221	146%
Stosunek podaży obligacji do PKB	0,480	5,089	959%
Stosunek popytu do PKB	0,974	0,993	2%
Konsumpcja prywatna do PKB	0,561	0,667	19%

Źródło: opracowanie własne

Aby ocenić wartości pozostałych zmiennych w stanie stacjonarnym, zamiast wielkości na jednostkę kapitału, przedstawiamy zmienne w bardziej standardowej formie, to znaczy na jednostkę PKB (Tabela 4.2.1c.). W stanie stacjonarnym udział płac realnych w PKB w porównaniu ze stanem początkowym jest większy o około 17% i wynosi 56%. Co oznacza,

że część wartości dóbr i usług wytworzonych w gospodarce, która trafia do pracowników, wzrośnie o 17% i o tyle samo spadnie część wartości, która trafia do właścicieli środków produkcji (czyli posiadaczy kapitału i firm). W stanie stacjonarnym większa jest efektywna podaż pracy w stosunku do kapitału trwałego. Czyli mniejsza liczba jednostek pracy będzie potrzebna do wytworzenia tej samej wielkości kapitału porównaniu ze stanem początkowym. Realna podaż pieniądza w stosunku do PKB zmaleje o 1%, a zapasy na jednostkę PKB wzrosną aż o 146%. Natomiast popyt do PKB zwiększy się o 2%, co przede wszystkim jest efektem wzrostu konsumpcji w stosunku do PKB (wzrost o 19%).

Uwagę przykuwa bardzo duża wartość stosunku realnego zadłużenia sektora finansów publicznych do wielkości kapitału trwałego w stanie stacjonarnym, $\bar{b} = 2,814$, co daje ponad 500% PKB. Jedną z przyczyn tak dużej wartości tej zmiennej jest usunięcie z modelu możliwości finansowania budżetu sektora finansów publicznych kreacją pieniądza (por. 4.3 i 4.10). Drugą przyczyną są stosunkowo niskie stawki podatkowe i duże wydatki sektora finansów publicznych. Kolejnym powodem jest założenie, że udział zadłużenia sektora finansów publicznych w PKB w 2018 roku wynosił około 50% (jawny dług publiczny).

Ze względu na dodanie m.in. świadczeń emerytalnych i rentowych w równaniu deficytu sektora finansów publicznych (4.10), w analizie stanu stacjonarnego należy uwzględnić wartość szacowanego ukrytego długu publicznego⁵². Z szacunków m.in. GUS, OECD lub Eurostatu⁵³ wynika, że wartość ukrytego długu publicznego dla gospodarki polskiej jest kilkakrotnie wyższa od jawnego długu publicznego. Przykładowo według danych GUS ukryty dług publiczny na koniec 2018 roku wyniósł w Polsce 291,7% PKB, a oficjalny dług publiczny wg GUS w tym samym roku stanowił 48,9% PKB. Biorąc pod uwagę szacowany ukryty dług publiczny oraz to, że stan stacjonarny zostanie osiągnięty po kilkuset latach, wartość długu wynikająca z modelu nie jest już tak nierealistyczna.

⁵² Ukryty dług publiczny to finansowe zobowiązania państwa nieuwzględnione w jego sprawozdawczości budżetowej. Podstawowym jego źródłem są przyszłe zobowiązania państwa, m.in. z tytułu wypłaty emerytur i zasiłków dla bezrobotnych oraz funkcjonowania systemu opieki zdrowotnej (H.S. Esfahani, H. Kim, Hiding Public Debt, „*Economic Research Forum Working Papers*” 2002, No. 0202, s. 1-2.)

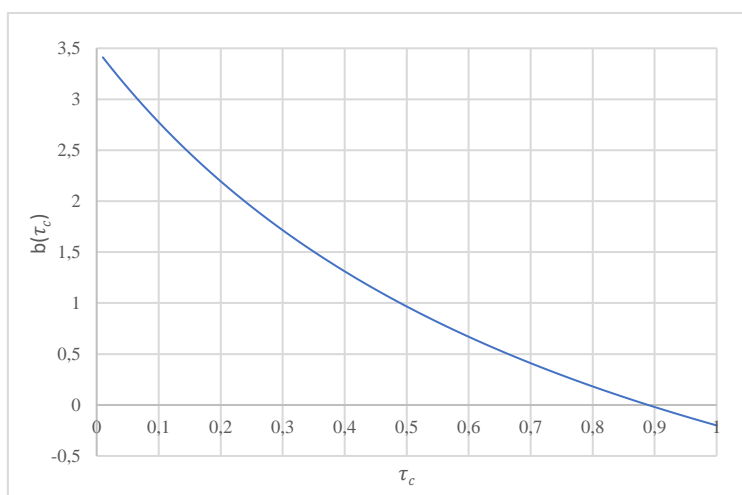
⁵³ GUS: <https://stat.gov.pl/obszary-tematyczne/rachunki-narodowe/nabyte-uprawnienia-emerytalno-rentowe-w-ramach-ubezpieczen-spoecznych/uprawnienia-emerytalno-rentowe-gospodarstw-domowych-nabyte-w-ramach-ubezpieczen-spoecznych-wedlug-stanu-na-dzien-31-grudnia-2018-r-,1,2.html>

Eurostat: <https://ec.europa.eu/eurostat/web/products-manuals-and-guidelines/-/KS-RA-11-027>

Problem z dużą wielkością zadłużenia wynikającą z modelu możemy rozwiązać, zmieniając oszacowane wartości parametrów modelu, co wynika ze wzoru:

$$\bar{b} = \frac{g - \tau_c(\alpha_4 \bar{y}^d - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{y} - \delta) - (\tau - \alpha_1) \bar{U} \bar{y}}{\alpha_3 \tau_c \bar{r} - \bar{\rho} + \xi + n}, \text{ gdzie } \alpha_4 = \left(1 - \tau_p + \frac{\tau_p}{\tau_c}\right) = \text{const..}$$

Oczywiście zmiana wartości parametrów odpowiadających za wartość \bar{b} ma swoje konsekwencje. Może spowodować zmianę wartości innych zmiennych w stanie stacjonarnym. Jedynym parametrem, który nie wpływa na inne zmienne w stanie stacjonarnym, jest stawka podatku τ_c od zysku z kapitału trwałego i odsetek z obligacji. Oznacza to, że najprostszym sposobem uzyskania w modelu niskiego poziomu zadłużenia sektora finansów publicznych w stosunku do kapitału trwałego jest podwyższenie tej właśnie stawki podatkowej. Na Rysunku 4.2.1 przedstawiamy zależność zadłużenia sektora finansów publicznych w stosunku do kapitału trwałego od stawki podatku τ_c .



Rysunek 4.2.1. Wartość zmiennej b w stanie stacjonarnym w zależności od stawki podatku τ_c

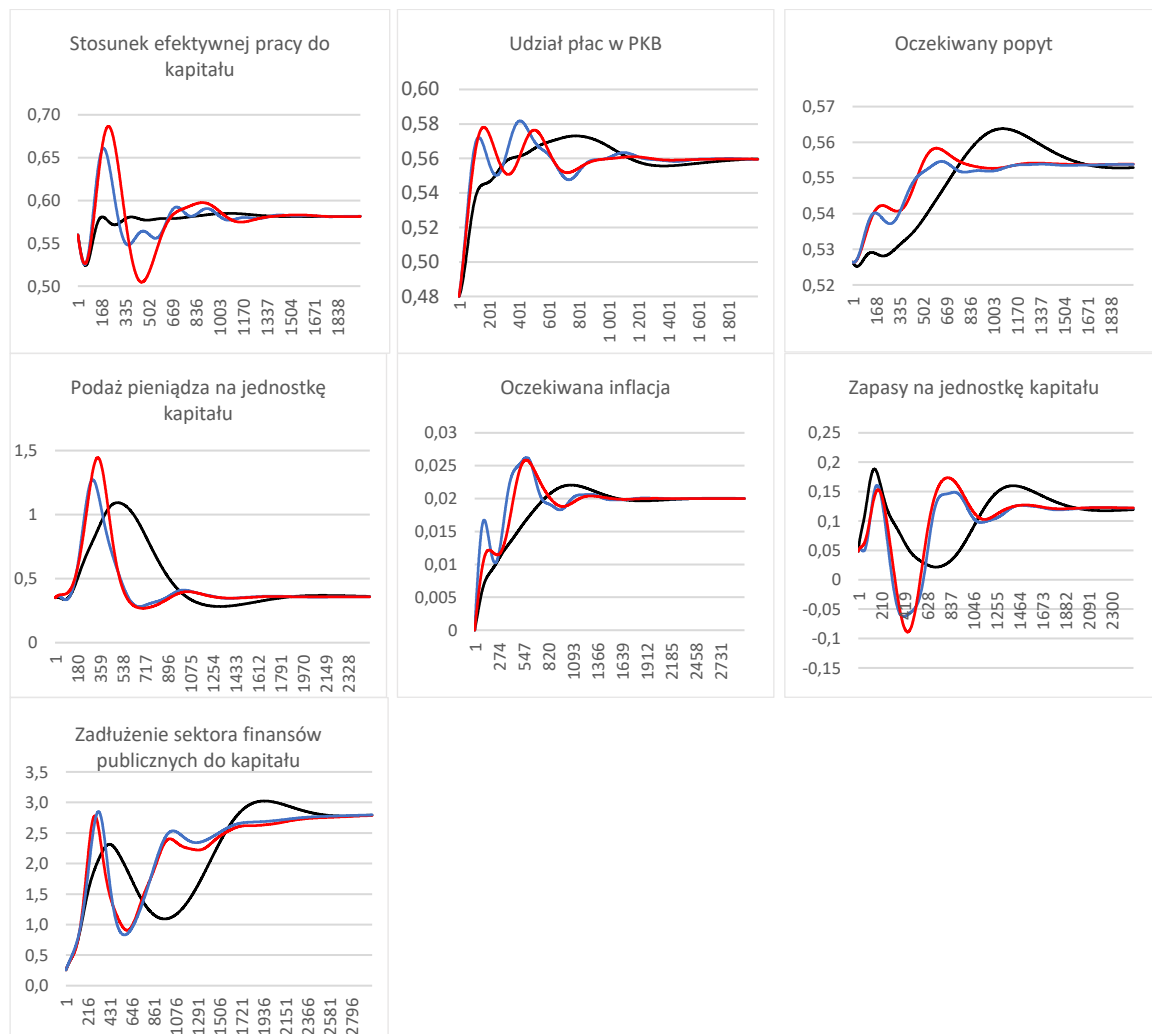
Źródło: obliczenia własne.

W Polsce ustanowiono w 1997 roku konstytucyjny limit zadłużenia w wysokości 60% PKB. Biorąc pod uwagę to, że kapitał trwały jest około dwa razy większy od PKB, konstytucyjny limit zadłużenia w stosunku do kapitału trwałego jest równy około 30%. Z Rysunku 4.2.1 wynika, że limit nie zostanie przekroczony, gdy stawka podatku τ_c będzie większa niż 75%.

4.2.3. Scenariusze wzrostu gospodarki polskiej przy różnych zestawach wartości parametrów reakcji

W symulacjach przyjęliśmy dyskretną postać modelu KMG (4.73). Przed rozpoczęciem analizy wyników symulacji należy wspomnieć, że na wszystkich wykresach czas, przedstawiony na osi odciętych, jest mierzony w miesiącach (np. $t = 120$ oznacza 120

miesiący czyli 10 lat). Na Rysunku 4.2.2a przedstawiamy wykresy trajektorii zmiennych modelu w postaci intensywnej, dla zestawów wartości parametrów reakcji 1, 2 i 3. Natomiast na Rysunku 4.2.3 dla zestawu 4, a na Rysunku 4.2.4. dla zestawu 5. Dodatkowo na Rysunku 4.2.5 przedstawiamy przykładowy sposób uniknięcia destabilizacji gospodarki opisaną modelem KMG dla piątego zestawu wartości parametrów przy pomocy polityki fiskalnej. Na ostatnim rysunku, 4.2.6, porównujemy na podstawie wykresu funkcji produkcji (PKB) wzrost gospodarczy gospodarki we wszystkich pięciu przypadkach.



Rysunek 4.2.2a. Dynamika zmiennych modelu KMG w postaci intensywnej. Kolor niebieski - zestaw 1, kolor czerwony - zestaw 2, kolor czarny - zestaw 3.

Źródło: opracowanie własne.

Na rysunku 4.2.2 możemy zauważyć, że po około 900 okresach (czyli po około 75 latach) wartości sześciu pierwszych zmiennych modelu KMG w postaci intensywnej stale zbliżają się do wartości w stanie stacjonarnym. Po początkowych wahaniami wartości tych zmiennych stabilizują się mniej więcej w okresie $t = 2000$, czyli po około 170 latach.

Natomiast trajektoria zmiennej b (stosunek długu sektora finansów publicznych do wartości kapitału rzeczowego), przedstawiona na ostatnim wykresie, stabilizuje się po okresie $t = 3000$, czyli po 250 latach. Różnica czasu dojścia do stanu stacjonarnego między zmienną b a pozostałymi zmiennymi wynika z tego, że zmienne modelu KMG w postaci intensywnej, za wyjątkiem zmiennej b , nie zależą od wartości b . Z drugiej strony, zmienna b zależy od pozostałych zmiennych modelu KMG w postaci intensywnej. Co oznacza, że wartość zmiennej b ustabilizuje się dopiero po czasie gdy pozostałe zmienne modelu intensywnego będą w stanie stacjonarnym.

Uwagę przykuwa fakt, że mimo różnych wartości parametrów reakcji, kształt wszystkich trajektorii zmiennych opisujących gospodarki dla zestawów parametrów 1 i 2 (wykresy niebieski i czerwony) jest podobny. Z analizy wartości parametrów reakcji przedstawionych w Tabeli 4.1.4 oraz z trajektorii przedstawionych na Rysunku 4.2.2 wynika, że silniejsza reakcja nominalnych płac $\beta_w \uparrow$ na zmiany zachodzące na rynku pracy (zmiana stopy zatrudnienia) a także szybsza reakcja popytu inwestycyjnego $i_1 \uparrow, i_2 \uparrow$ na zmiany zachodzące w gospodarce oraz wolniejsza reakcja produkcji $\beta_{y^e} \downarrow$ na błąd prognozy przyszłej sprzedaży i szybsza reakcja oczekiwań inflacyjnych $\beta_{\pi^e} \uparrow$ nieznacznie wpływają na ogólny wzrost gospodarczy. Sytuacja ulega zmianie (zestaw 3), gdy ponadto w gospodarce ceny wolno reagują na zmiany koniunktury ($\beta_p \downarrow$), popyt inwestycyjny szybko reaguje na zmiany w gospodarce, w szczególności na różnicę między oczekiwaną stopą zysku z kapitału trwałego a oczekiwaną realną stopą procentową ($i_1 \uparrow, i_2 \uparrow$) oraz szybciej zmieniają się decyzje o wielkości produkcji w odpowiedzi na zmiany oczekiwań przyszłego popytu oraz zmiany różnicy między popytem i podażą zapasów ($\beta_n \uparrow, \beta_z \uparrow$). Taką gospodarke reprezentuje zestaw 3 (wykres czarny). Dla zestawu 3, w porównaniu z zestawami 1 i 2, stosunek efektywnej pracy do kapitału rzeczowego szybciej dąży do stanu stacjonarnego, co wynika z dużo większej wartości parametru $i_1 \uparrow$. Powolna reakcja cen $\beta_p \downarrow$ na zmiany w koniunkturze przyczynia się do mniejszych wahań trajektorii w krótkim okresie.

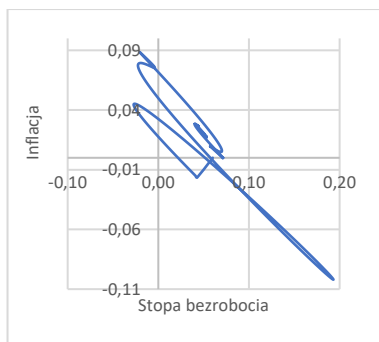
Dokładniejsza analiza wpływu zmian wartości poszczególnych parametrów reakcji na trajektorie zmiennych jest utrudniona ze względu na sposób wyznaczania wartości parametrów reakcji (zob. podrozdział 4.1.4). Zmiana wartości tylko jednego wybranego parametru reakcji wpływa np. na wartości zmiennych y i y^d , a dalej na wartości zmiennych V i u w stanie początkowym, co prowadzi do analizy innej gospodarki. W konsekwencji

stracimy główną ideę tego rozdziału, jaką jest analiza modelu KMG na podstawie danych o gospodarce polskiej.

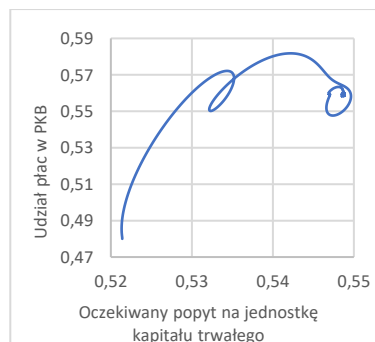
Na Rysunku 4.2.2b przedstawiamy kilka wykresów ilustrujących trajektorie niektórych par zmiennych w przestrzeni fazowej. Ze względu na dużą liczbę zmiennych modelu intensywnego nie prezentujemy wszystkich kombinacji par zmiennych (jest ich 21). Natomiast, oprócz zmiennych modelu KMG w postaci intensywnej, prezentujemy inne, ciekawe z ekonomicznego punktu widzenia zmienne w przestrzeni fazowej.

Kształty trajektorii (Rysunek 4.2.2b.) potwierdzają zawołość powiązań między zmiennymi modelu, co razem z brakiem wszystkich par zmiennych utrudnia ich dokładną analizę. Niemniej jednak, na podstawie kilku poniższych rysunków można pokusić się o próbę określenia związków między niektórymi zmiennymi (wszystkie dotyczą gospodarki opisanej drugim zestawem wartości parametrów reakcji):

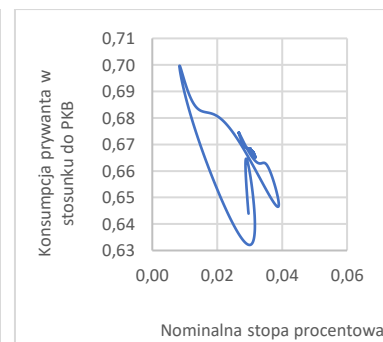
1. Orbita stóp inflacji i bezrobocia (trajektoria 1) układa się w kształt opisywanej w literaturze krzywej Phillipsa (ujemna zależność między stopą zmiany cen, czyli inflacją, a poziomem bezrobocia).
2. Udział płac w PKB (trajektoria 2) oraz popyt na jednostkę kapitału (trajektoria 11) przejawiają dodatnią zależność z oczekiwanym popytem na jednostkę kapitału.



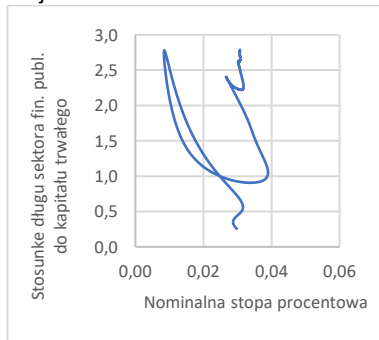
Trajektoria 1



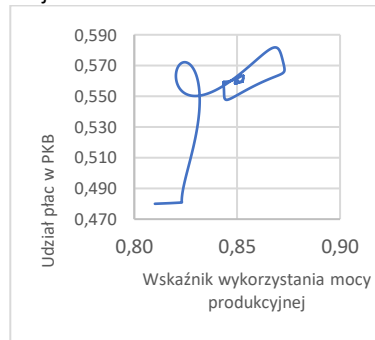
Trajektoria 2



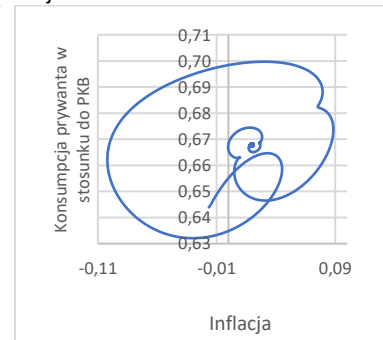
Trajektoria 3



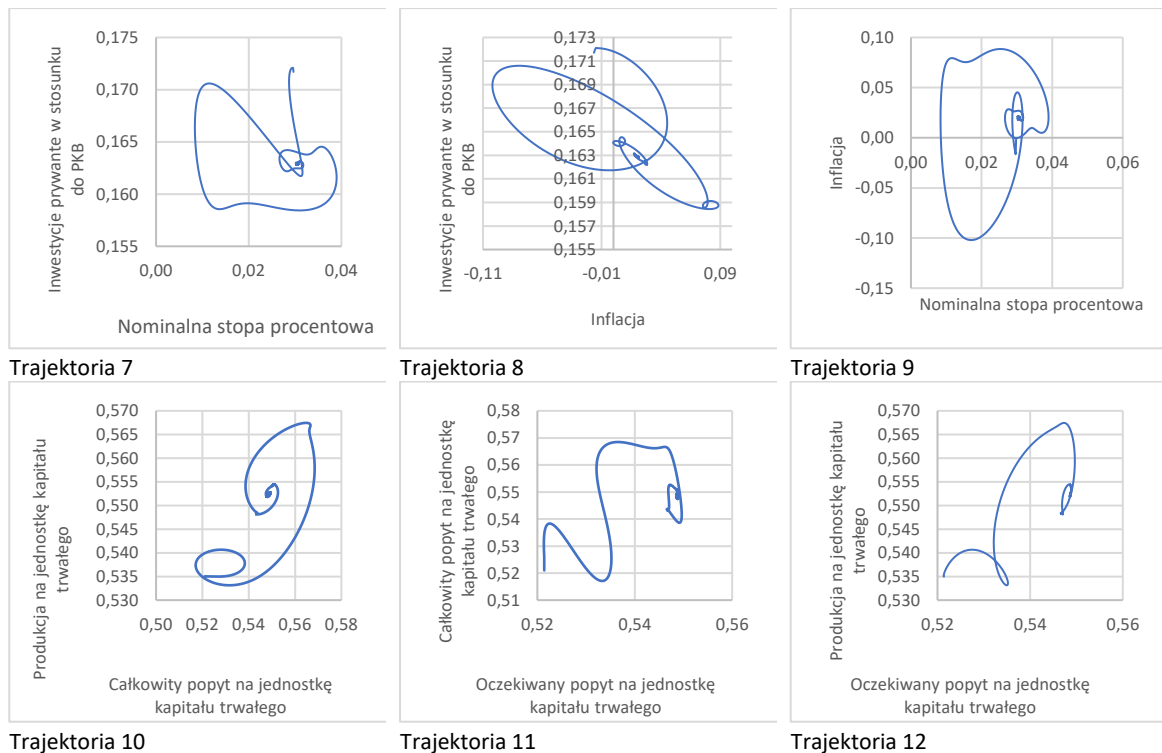
Trajektoria 4



Trajektoria 5



Trajektoria 6



Rysunek 4.2.2b. Trajektorie w przestrzeni fazowej otrzymane przy drugim zestawie wartości parametrów reakcji

Źródło: opracowanie własne.

3. Konsumpcja prywatna na jednostkę PKB oraz dług sektora finansów publicznych są ujemnie skorelowane z nominalną stopą procentową (trajektorie 3 i 4). Warto przypomnieć, że z równań modelu intensywnego wynika zależność jednostronna między nominalną stopą procentową a długiem sektora finansów publicznych. Nominalna stopa procentowa wpływa na dług sektora finansów publicznych.

4. Istnieje dodatnia zależność między wartością współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej a udziałem płac w PKB (trajektorie 5).

5. Brak korelacji między konsumpcją na jednostkę PKB a inflacją (trajektorie 6). Na początku rozpatrywanego horyzontu czasowego konsumpcja na jednostkę PKB rośnie mimo wzrostu cen. Gdy ceny przekroczą pewien akceptowany przez sektor prywatny poziom, wtedy konsumpcja na jednostkę PKB gwałtownie maleje, aż do momentu gdy ceny zaczną maleć (deflacja cen). W chwili gdy ceny zmniejszą się do pewnego poziomu, konsumpcja na jednostkę PKB znowu zaczyna rosnąć, aż kolejny raz ceny zaczną rosnąć i przekroczą pewien akceptowany poziom. Kształt orbity konsumpcji na jednostkę PKB i stopy inflacji zbliżony jest do kształtu spirali zbieżnej.

6. Ciekawą relację można także zaobserwować między inwestycjami na jednostkę PKB a nominalną stopą procentową (trajektorie 7). W początkowych okresach inwestycje na

jednostkę PKB maleją mimo stałej wartości nominalnej stopy procentowej. Dopiero gdy nominalna stopa procentowa zaczyna maleć, inwestycje na jednostkę PKB zaczynają rosnać (oczywiste jest, że ta zmiana może być wywołana także innymi czynnikami wpływającymi na inwestycje lub na PKB). Gdy stopa procentowa stabilizuje się na pewnym poziomie, inwestycje na jednostkę PKB kolejny raz zaczynają maleć. W kolejnych okresach widzimy, że zmiana stopy procentowej już nie wpływa na inwestycje w stosunku do PKB. Przyczyną tego może być np. inflacja, która, jak ilustruje trajektoria inwestycji do PKB i inflacji, jest ujemnie zależna od tego stosunku inwestycji do PKB.

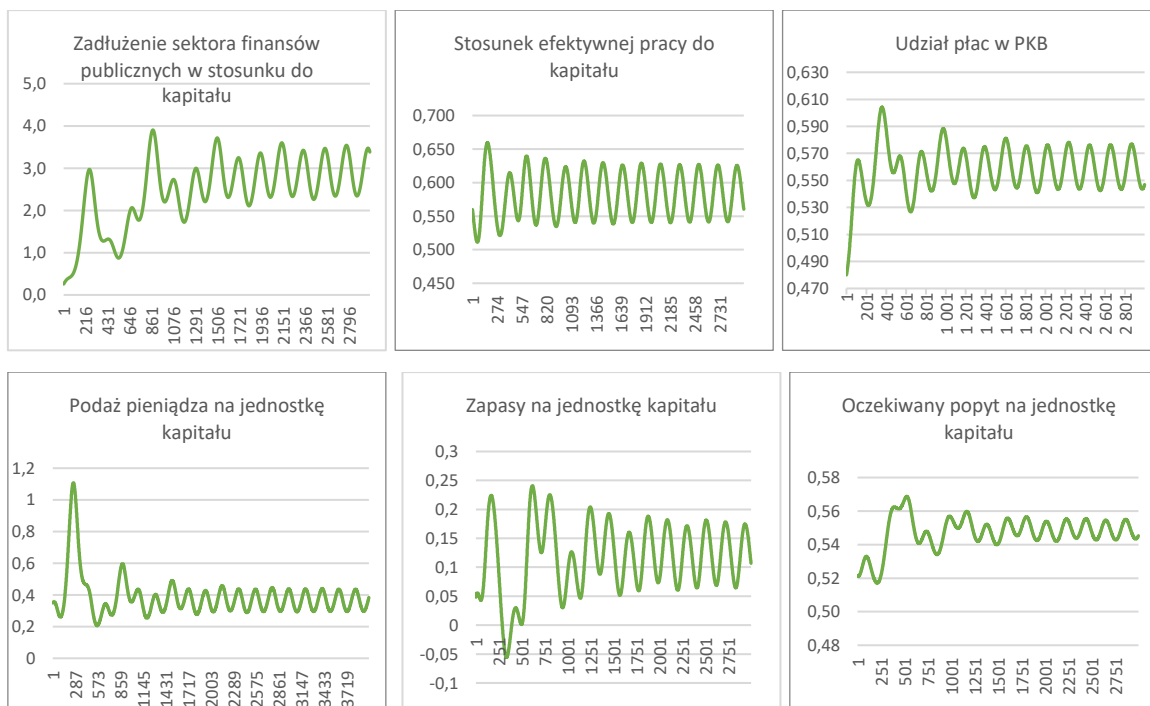
7. Nie ma czytelnej zależności między inflacją a nominalną stopą procentową (trajektoria 9).

8. Produkcja na jednostkę kapitału rośnie, gdy rośnie popyt na jednostkę kapitału (trajektoria 10) oraz gdy rośnie oczekiwany popyt (trajektoria 12).

Trzeba pamiętać o tym, że powyższe wnioski wynikają z analizy trajektorii jedynie wybranych par zmiennych przedstawionych na wykresach w przestrzeni fazowej. Dopiero analiza pozostałych par zmiennych dałaby pełniejszy obraz powiązań między zmiennymi. Podobnie w rzeczywistej gospodarce na jedną wielkość ma wpływ wiele czynników. Wyciąganie wniosków z analizy zależności dwóch zmiennych daje pewną informację o funkcjonowaniu gospodarki, lecz należy zbadać pozostałe czynniki wpływające na analizowane zmienne, by prawidłowo ocenić badaną zależność.

Na Rysunku 4.2.3a przedstawiamy trajektorie zmiennych modelu dla zestawu 4, dla którego stan stacjonarny gospodarki jest stabilny. Po okresie około $t = 900$ (około 75 lat) gospodarka cechuje się cyklicznością (cyklem koniunkturalnym), co jest charakterystyczne dla współczesnych gospodarek⁵⁴. Długość jednego cyklu to około 400 okresów czyli około 30 lat (cykl średni). Trajektorie wszystkich zmiennych modelu intensywnego (w przeliczeniu na jednostkę kapitału) po okresie $t = 900$ mają kształt podobny do sinusoidalnego. Oznacza to, że zmienne absolutne, tj. produkcja, konsumpcja, inwestycje itd., po około 75 latach rosną ze zmienną stopą wzrostu.

⁵⁴ <https://businessinsider.com.pl/gospodarka/makroekonomia/cykl-koniunkturalny-definicja-zastosowanie-okres-trwania/llbpk9f>

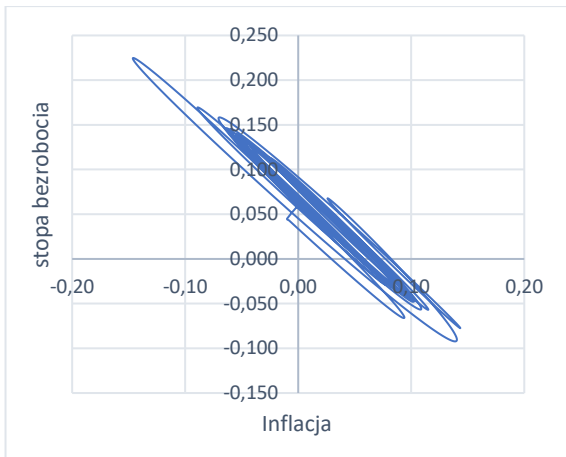


Rysunek 4.2.3a. Dynamika zmiennych modelu KMG w postaci intensywnej dla zestawu 4

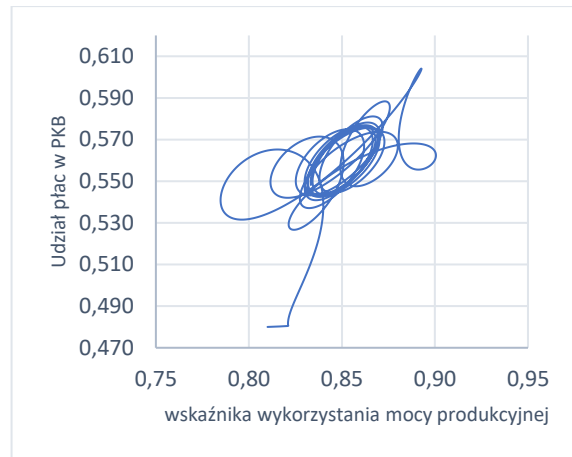
Źródło: opracowanie własne.

Z analizy różnic między wartościami parametrów reakcji (Tabela 4.14) możemy wysunąć wniosek, że na zmianę stabilności stanu stacjonarnego wpłynął przede wszystkim wzrost wartości parametru reakcji $\beta_{y^e} \uparrow$ czyli wzrost reakcji oczekiwanego popytu na błąd prognozy popytu w poprzednim okresie. W zestawie 4, w porównaniu z zestawami 1-3, parametr ten ma dużo większą wartość, a wartości pozostałych parametrów są zbliżone do tych z zestawu 3. Wniosek ten jest zgodny z jednym z założeń stabilności stanu stacjonarnego modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza, w którym zakłada się, że wartość parametru reakcji β_{y^e} jest odpowiednio mała. Z ekonomicznego punktu widzenia oznacza to, że zmiana stabilności następuje wówczas, gdy oczekiwania właścicieli firm dotyczące przyszłego popytu gwałtowniej reagują na błąd prognozy popytu w poprzednim okresie.

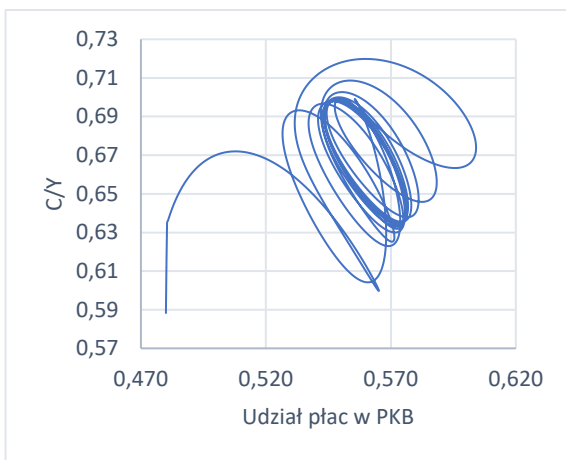
W niniejszej pracy głównie skupimy się na gospodarce, która po pewnym czasie będzie rozwijała się równomiernie, natomiast analizą pozostałych przypadków zajmiemy się w kolejnych pracach nad modelami typu KMG. Niemniej jednak, podobnie jak w przypadku symulacji modelu KMG dla zestawu 2 (Rysunek 4.2.3b.), poniżej, dla porównania, prezentujemy kilka przykładowych trajektorii w przestrzeni fazowej dla zestawu 4. Nie poddamy ich jednak szczegółowej analizie.



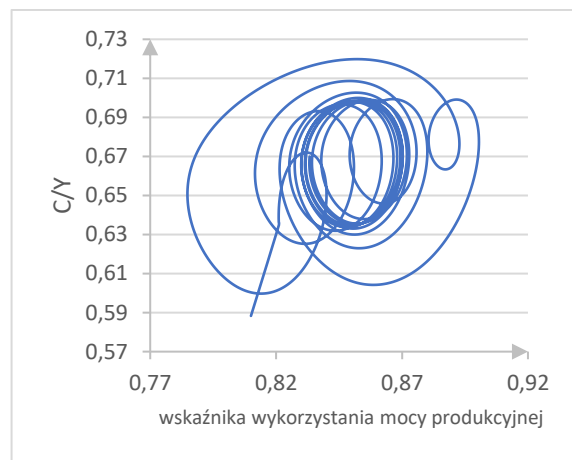
Trajektorja 1



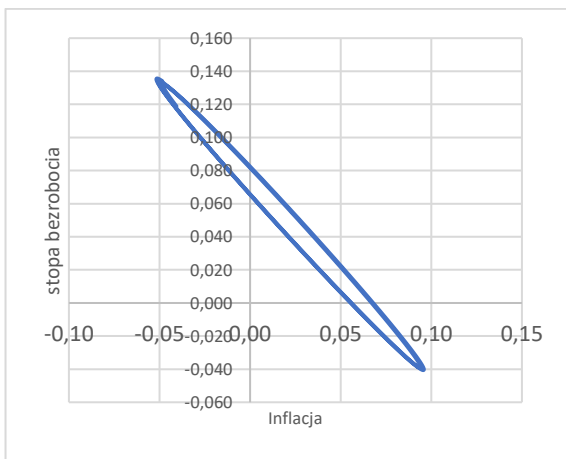
Trajektorja 2



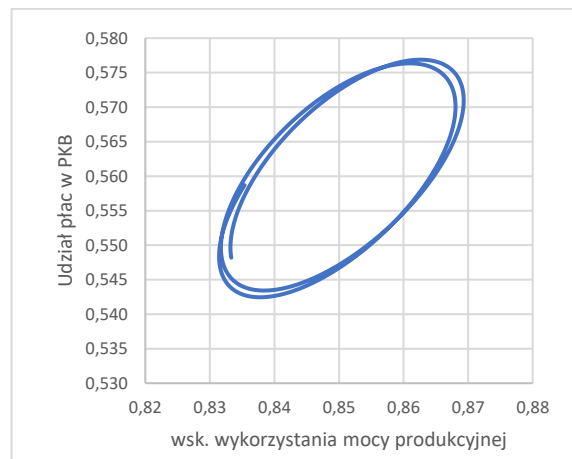
Trajektorja 3



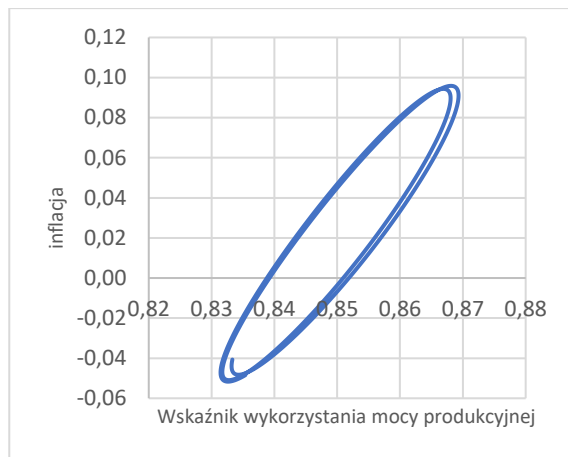
Trajektorja 4



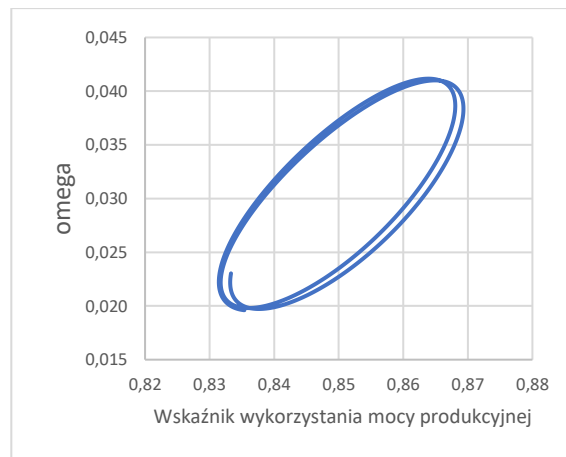
Trajektorja 5



Trajektorja 6



Trajektoria 7



Trajektoria 8

Rysunek 4.2.3b. Trajektorie w przestrzeni fazowej otrzymane przy czwartym zestawie wartości parametrów reakcji

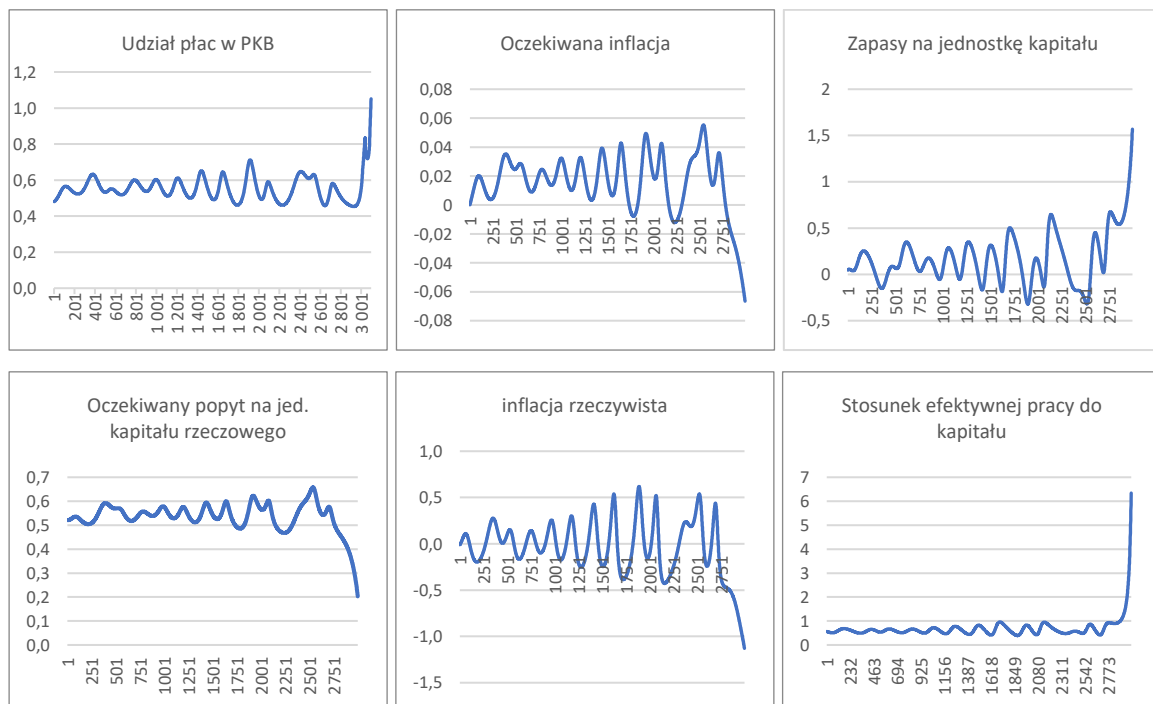
Źródło: opracowanie własne.

Na pierwszych czterech wykresach Rysunku 4.2.3b (Trajektorie 1-4) przedstawiamy trajektorie od czasu $t = 0$ (od stanu początkowego) do okresu $t = 3000$, czyli na przestrzeni 250 lat. Natomiast pozostałe cztery wykresy (Trajektorie 5-8) przedstawiają trajektorie w okresach od $t = 2500$ do $t = 2950$, czyli na przestrzeni około 37 la.

Trajektorie 1 - 4 prawie od samego początku przybierają kształt podobny do elips, które wraz z upływem czasu przesuwają się wzdłuż osi układu współrzędnych. Ostateczne miejsce w układzie współrzędnych oraz kształt elipsy trajektorie zmiennych osiągają dopiero po około 2500 okresach (po około 200 latach). Badanie korelacji między zmiennymi przeprowadziliśmy osobno w dłuższym okresie (czyli od 0-3000) i w krótszym okresie (dla 2500-2950). W okresie od 2500 do 2950 zależność można określić na podstawie nachylenia elipsy do osi odciętych oraz jej kształtu. Przykładowo, trajektoria inflacji i stopy bezrobocia (Trajektoria 5) ma kształt elipsy i jest nachylona ujemnie względem osi odciętych, co oznacza ujemną korelację między tymi zmiennymi. Ponadto elipsa ta jest bardzo płaska, co świadczy o silnej korelacji między tymi zmiennymi. W przypadku udziału płac w PKB i wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej (Trajektoria 6) nachylenie ich trajektorii jest dodatnie, co wskazuje na dodatnią korelację między tymi zmiennymi. Trajektoria ta ma kształt elipsy, ale nie jest już tak płaska w porównaniu z trajektorią 5, więc korelacja nie jest tak mocna, jak w przypadku inflacji i stopy bezrobocia. W okresie od 0 do 3000 badanie zależności zmiennych nie w każdym przypadku jest takie proste, jak w okresie od 2500 do 2950. Krzywe, choć przypominają elipsy, to zmieniają położenie i kształt, co często jest wynikiem dynamiki innych zmiennych (wyjątkiem jest np. trajektoria inflacji i stopy bezrobocia

(Trajektoria 1), która od samego początku wykazuje ujemną korelację między inflacją a stopą bezrobocia). Zatem, aby zweryfikować dokładniej te zależności, należałoby przedstawić wszystkie kombinacje par zmiennych modelu, co zostawiamy na późniejszą pracę nad modelem.

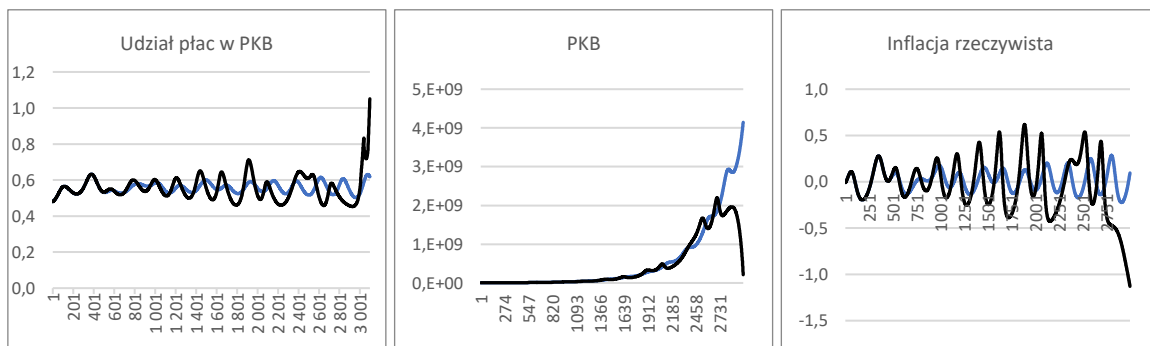
Na Rysunku 4.2.4. przedstawiamy trajektorie zmiennych modelu KMG, której stan stacjonarny, uzyskany z piątego zestawu wartości parametrów reakcji, jest niestabilny. Z postaci tych wykresów widzimy, że model do pewnego okresu charakteryzuje się cyklem koniunkturalnym o różnej amplitudzie wahań. Po około $t = 2000$ okresach (czyli po około 166 latach) następuje destabilizacja modelu i wartości zmiennych gwałtownie rosną lub maleją. Przyczyną destabilizacji modelu jest to, że oczekiwania dotyczące przyszłego popytu bardzo szybko reagują na błąd prognozy wielkości popytu w poprzednim okresie, co wyraża duża wartość parametru reakcji β_{y^e} . Reakcja ta jest szybsza niż w gospodarce opisanym zestawem 4 (wartości pozostałych parametrów reakcji są zbliżone do tych z zestawu 4) stąd wniosek o istotności parametru β_{y^e} dla stabilności stanu stacjonarnego gospodarki.



Rysunek 4.2.4. Dynamika zmiennych modelu KMG w postaci intensywnej dla zestawu 5 (przypadek z brakiem stabilności)

Źródło: opracowanie własne.

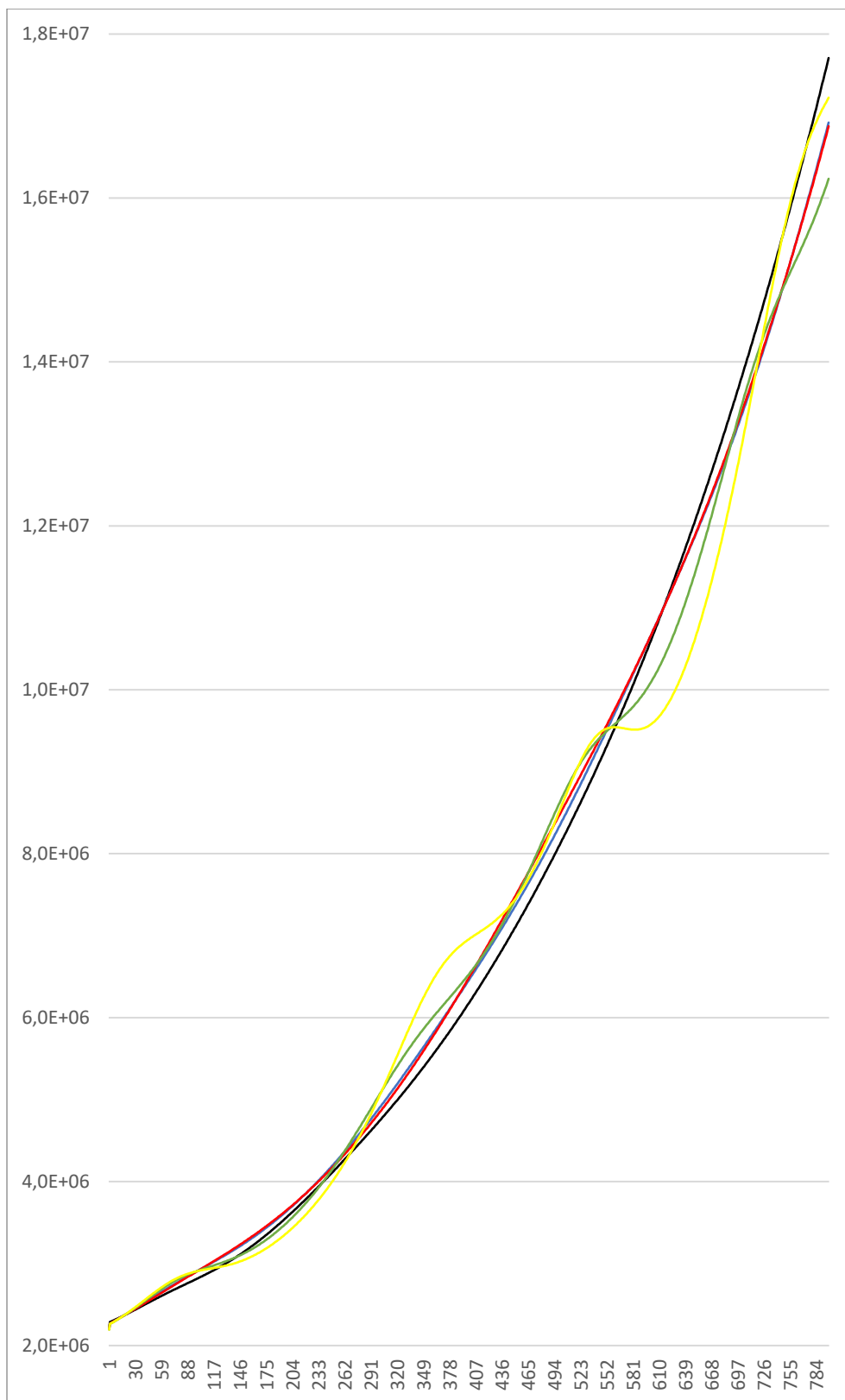
Z przeprowadzonych przez nas badań (w postaci kolejnych symulacji) wynika, że jednym z rozwiązań problemu destabilizacji modelu (oprócz osłabienia reakcji oczekiwań dotyczących przyszłego popytu na błąd prognozy wielkości popytu w poprzednim okresie przez zmniejszenie wartości parametru reakcji β_{ye}) jest zastosowanie odpowiedniej polityki fiskalnej lub pieniężnej. Przykładowo zwiększenie po okresie około 30 lat o 2 p. p. składki τ_1 płaconej na ubezpieczenie społeczne przez pracodawców pozwoli całkowicie zahamować destabilizację modelu lub odsunąć ją w czasie (Rysunek 4.2.5). Oznacza to, że zmiana wartości parametru oznaczającego stawkę podatkową zmienia dla modelu przedział wartości parametrów reakcji m.in. parametru β_{ye} , dla których stan stacjonarny gospodarki jest stabilny.



Rysunek 4.2.5. Dynamika przykładowych zmiennych modelu KMG w postaci intensywnej dla zestawu 5, przy różnych stawkach podatkowych τ_1 , od $t = 400$. Wykres niebieski $\tau_1 = 0,09$, wykres czarny $\tau_1 = 0,07$.

Źródło: opracowanie własne.

Na zakończenie, dla uporządkowania dotychczasowych obserwacji, na Rysunku 4.2.6 przedstawiamy porównanie wzrostu gospodarczego rozpatrywanego modelu we wszystkich pięciu scenariuszach, na przykładzie wykresu funkcji produkcji (PKB). Na Rysunku 4.2.6 prezentujemy wykresy trajektorii produkcji o krótszym horyzoncie czasu niż poprzednio analizowane. Porównywanie wzrostu produkcji na podstawie wykresów w długim horyzoncie czasowym nie jest możliwe głównie z powodu wzrostu wykładniczego tej wielkości. Różnice między wykresami są zauważalne tylko na stosunkowo krótkich odcinkach czasu, kilkunastu lat.



Rysunek 4.2.6. Dynamika PKB. Trajektorie PKB dla różnych zestawów wartości parametrów reakcji, kolor: niebieski – zestaw 1, czerwony – zestaw 2, czarny – zestaw 3, zielony – zestaw 4, żółty – zestaw 5

Źródło: opracowanie własne.

W przypadku zestawów parametrów 1-3 (wykresy pomarańczowy, niebieski i czarny) na wykres PKB nakładają się powoli wygasające cykle koniunkturalne. W przypadku gospodarki opisanej zestawem 4 zauważalny jest stały cykl koniunkturalny przez cały badany okres (wykres zielony), a w przypadku gospodarki opisanej zestawem 5 rosnący cykl koniunkturalny (wykres żółty). Podsumowując, we wszystkich analizowanych przypadkach gospodarki ze stanem stacjonarnym lokalnie asymptotycznie stabilnym (zestawy 1-3) wzrost gospodarczy w krótkim okresie jest podobny. W pracy największą uwagę poświęcamy modelowi gospodarki z takim właśnie stanem stacjonarnym. Z tego względu analizę polityki pieniężnej i fiskalnej w krótkim okresie, przedstawioną w kolejnym podrozdziale, wykonaliśmy tylko dla jednego zestawu wartości parametrów reakcji - dla zestawu 1.

4.2.4. Analiza wpływu polityki fiskalnej i pieniężnej na gospodarkę

Polityka fiskalna

W omawianym modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza wprowadziliśmy, omówione w podrozdziale 4.1.1, autorskie modyfikacje, dzięki którym opis narzędzi polityki fiskalnej został rozszerzony o:

- stawki podatkowe tj.: τ_w – od dochodu z pracy najemnej, τ_c – od zysku z kapitału trwałego i odsetek z posiadanych obligacji, τ_2 – stawka podatku pośredniego, τ_1 – stawka składki ZUS płacona przez pracodawcę oraz τ_2 – stawka składki ZUS płacona przez pracownika;
- wydatki sektora finansów publicznych, których wysokość sterowana jest za pomocą parametrów: α_1 – stosunek transferów budżetowych do wynagrodzeń brutto pracowników najemnych, g – stosunek konsumpcji sektora publicznego do kapitału trwałego.

Uwaga 4.5. W rozpatrywanym modelu stawki τ_w oraz τ_2 występują w równaniach jako suma $\tau = \tau_w + \tau_2$, więc zmianę tych składek będziemy rozpatrywać jednocześnie jako zmianę stawki τ .

Przed rozpoczęciem analizy wpływu polityki fiskalnej wartości zmiennych w stanie stacjonarnym dla zmodyfikowanego modelu KMG (4.23)-(4.33), które dotąd wyrażane były

na jednostkę kapitału trwałego, przedstawmy, podobnie jak w rozdziale drugim w bardziej standardowej formie, czyli na jednostkę PKB⁵⁵:

- popyt w relacji do PKB: $\frac{Y^d}{Y} = \gamma$,
- udział płac w PKB: $\bar{U} = \frac{\gamma \bar{u} y^p - (n + \delta + g)}{(1 + \alpha_1 - \tau) \bar{u} y^p}$,
- stosunek długu sektora finansów publicznych do PKB:

$$\frac{B}{pY} = \frac{g - \tau_c (\alpha_4 \bar{y}^d - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{u} y^p - \delta) - (\tau - \alpha_1) \bar{U} \bar{u} y^p}{(\alpha_3 \tau_c \bar{r} - \bar{\rho} + \xi + n) \bar{u} y^p},$$

- konsumpcja prywatna na jednostkę PKB: $\frac{C}{Y} = \frac{\gamma \bar{u} y^p - (n + \delta + g)}{\bar{u} y^p}$,
- inwestycje prywatne na jednostkę PKB: $\frac{I}{Y} = \frac{n + \delta}{\bar{u} y^p}$,

gdzie $\gamma = \frac{n + \beta_n}{n + \beta_n z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n}$.

Dodatkowo, w analizie polityki pieniężnej będziemy rozważać zachowanie następujących zmiennych:

- stopa inflacji: $\bar{\pi} = \mu - n$,
- zysk z kapitału trwałego: $\bar{\rho} = (1 - \tau_p) \gamma \bar{u} y^p - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{u} y^p - \delta$,
- nominalna stopa procentowa: $\bar{r} = \bar{\rho} + \mu - n - \xi$.

Powyższe równania wyprowadziliśmy analogicznie jak w rozdziale drugim.

Z powyższych równań wynika, że polityka fiskalna nie jest całkowicie neutralna w długim okresie. Dzieje się tak dlatego, że decyzje o wielkości konsumpcji publicznej g w stosunku do kapitału trwałego wpływają na wartość w stanie stacjonarnym zmiennej realnej, jaką jest konsumpcja C/Y na jednostkę PKB. Natomiast pozostałe narzędzia polityki fiskalnej, tj. zmiana wysokości stawek podatkowych (polityka podatkowa) oraz zmiana wielkości transferów publicznych, nie wpływają na wartości zmiennych realnych w stanie stacjonarnym. Narzędzia te oddziałują natomiast na zmienne nominalne, tj. udział płac w PKB, obligacje w stosunku do kapitału trwałego, stopę inflacji, zysk z kapitału trwałego. W celu dokładniejszego zbadania wpływu polityki fiskalnej w długim okresie posłużyliśmy się metodami analitycznymi, tzn. obliczyliśmy pochodne wzorów funkcji określających

⁵⁵ W większości dostępnych danych statystycznych wielkości podawane są na jednostkę PKB. Raczej nie spotyka się opracowań, w których wielkości podawane są na jednostkę kapitału trwałego.

wartość danej zmiennej w stanie stacjonarnym względem badanego parametru.⁵⁶ Znaki wyznaczonych pochodnych przedstawiliśmy w Tabeli 4.2.1.

Tabela 4.2.1. Wpływ polityki fiskalnej na wartości zmiennych modelu KMG w stanie stacjonarnym

	$g \uparrow$	$\tau \uparrow$	$\tau_c \uparrow$	$\tau_1 \uparrow$	$\tau_p \uparrow$	$\alpha_1 \uparrow$
$\omega L/Y$	–	+	0	0	0	–
Y^d/Y	0	0	0	0	0	0
C/Y	–	0	0	0	0	0
I/Y	0	0	0	0	0	0
B/pY	?	?	?	?	?	?
$\bar{\pi}$	0	0	0	0	0	0
$\bar{\rho}$	+	–	0	–	–	+

Źródło: opracowanie własne.

Wartości wyznaczonych pochodnych potwierdzają neutralność polityki fiskalnej w zakresie zmian wysokości stawek podatkowych i transferów publicznych oraz brak całkowitej neutralności polityki fiskalnej w zakresie wydatków na konsumpcje publiczną. Symbol (+) oznacza wzrost wartości zmiennej, gdy rośnie wartość danego parametru, symbol (–) spadek wartości zmiennej. Natomiast znak (?) oznacza, że na podstawie wzoru pochodnej nie można ustalić jej znaku. Przyczyną tego jest, albo złożony wzór tej pochodnej, albo zależność znaku pochodnej od pozostałych wartości parametrów modelu. Z Tabeli 4.2.1. wynika, że nie można ustalić znaku pochodnej jedynie w przypadku zmiennej B/pY . Aby go wyznaczyć, skorzystaliśmy z jednej z metod ilościowych, jaką jest symulacja komputerowa dla konkretnych danych. Wyniki tej analizy prezentujemy przed opisem wpływu polityki fiskalnej w krótkim okresie, którą przeprowadziliśmy na podstawie symulacji komputerowych.

Analizę polityki fiskalnej przeprowadzamy na podstawie symulacji, w których przyjęliśmy bazowy zestaw wartości parametrów z Tabeli 4.1.2, wartości początkowe zmiennych z Tabeli 4.1.5 oraz pierwszy zestaw wartości parametrów reakcji z Tabeli 4.1.3. Głównym celem przeprowadzenia tych symulacji jest sprawdzenie wpływu polityki fiskalnej na wzrost

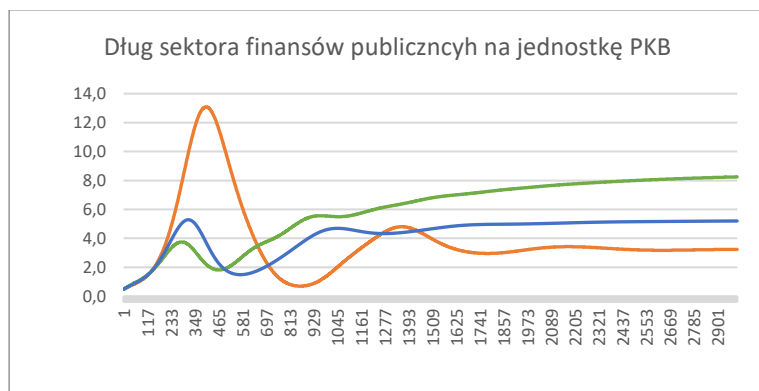
⁵⁶ Sposób wyznaczania pochodnych został przedstawiony w rozdziale pierwszym.

gospodarczy w krótkim okresie oraz na wartość zmiennej B/pY w stanie stacjonarnym. Za krótki okres przyjmujemy horyzont 10 lat.

Badanie polityki fiskalnej ograniczamy tylko do tych wartości parametrów, przy których stan stacjonarny jest co najmniej lokalnie asymptotycznie stabilny. Z tego powodu przed przystąpieniem do tej analizy wyznaczyliśmy przedział wartości każdego badanego parametru, przy którym ta własność stanu stacjonarnego jest spełniona.

Zmiana stawki podatku od dochodu z pracy najemnej τ_w i stawki na ubezpieczenie społeczne płacone przez pracowników τ_2

W pierwszej kolejności empirycznie sprawdziliśmy wpływ zmiany stawki podatkowej $\tau = \tau_w + \tau_2$ na stabilność stanu stacjonarnego. Ustaliliśmy, że stan stacjonarny jest co najmniej lokalnie asymptotycznie stabilny dla $\tau \in (0,15; 0,27)$. Z Tabeli 4.2.1. można odczytać, że wzrost stawki podatku τ zwiększa udział płac w PKB oraz zmniejsza stopę zysku z kapitału trwałego. Natomiast na podstawie wzoru pochodnej nie da się określić, w jaki sposób zmiana stawki τ wpływa na stosunek długu sektora finansów publicznego do PKB. Aby to ustalić, wykonaliśmy symulacje tej zmiennej przy trzech różnych wartościach stawki podatkowej, które przedstawiliśmy na rysunku 4.2.1.

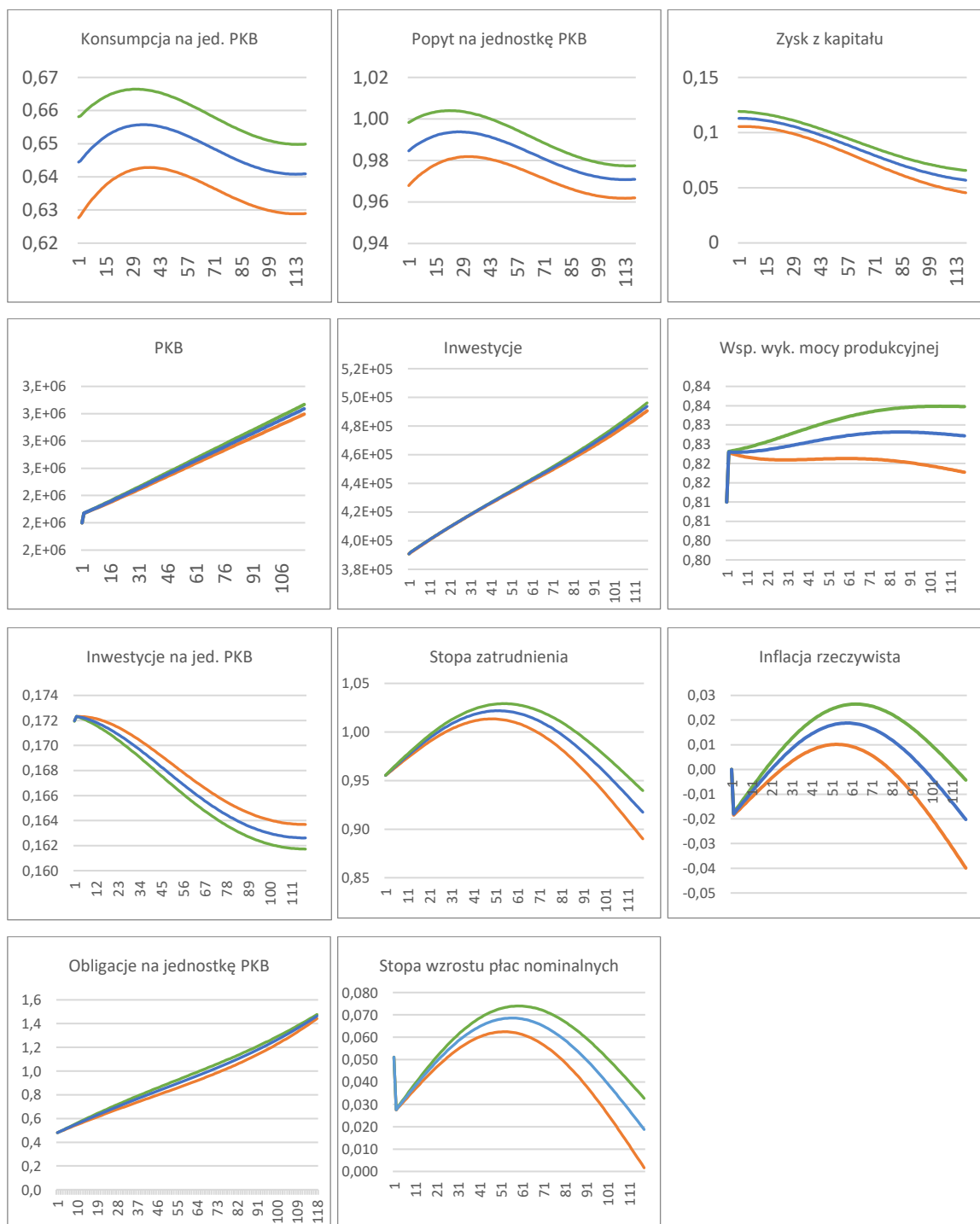


Rysunek 4.2.1. Dynamika długu sektora finansów publicznych w stosunku do PKB b dla różnych wartości stawki podatkowej τ ($\tau = \tau_w + \tau_2$), będącej sumą stawki podatkowej od dochodu z pracy i stawki ubezpieczenia zdrowotnego płaconego przez pracowników. Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: pomarańczowy dla $\tau = 26\%$, zielony $\tau = 20\%$, niebieski dla $\tau = 22,7\%$ (zestaw 1 - bazowy).

Źródło: opracowanie własne.

Mniejsza wartość stawki τ (wykres zielony w porównaniu do niebieskiego) oznacza większe zadłużenie sektora finansów publicznych w stanie stacjonarnym, natomiast jej większa wartość pociąga za sobą mniejsze zadłużenie (wykres pomarańczowy).

W kolejnym kroku zbadaliśmy wpływ zmiany stawki τ na wzrost gospodarczy w krótkim okresie. Wpływ ten przedstawiony jest na Rysunku 4.2.2.



Rysunek 4.2.2. Dynamika wybranych zmiennych modelu KMG dla różnych stawek podatkowych τ . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: pomarańczowe dla $\tau = 0,26$, zielone dla $\tau = 0,2$, niebieskie dla $\tau = 0,227$ (zestaw 1 - bazowy).

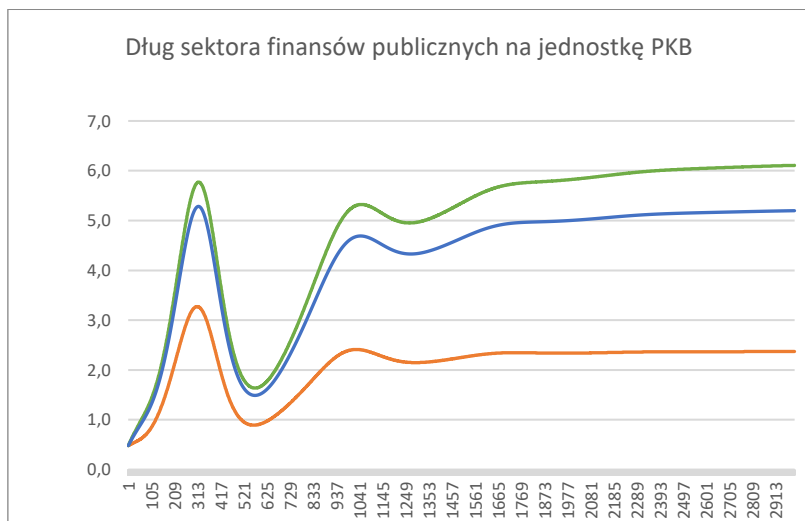
Źródło: opracowanie własne.

Pierwszym wnioskiem płynącym z wyników symulacji przedstawionych na Rysunku 4.2.2. jest brak neutralności w krótkim okresie zmiennych modelu KMG wobec zmiany stawki τ . Wynika to przede wszystkim z założenia modelu, że pracownicy najemni cały swój dochód do dyspozycji przeznaczają na konsumpcję prywatną C . Mniejsza stawka podatku τ oznacza większą konsumpcję prywatną, a w konsekwencji większy stosunek C/Y konsumpcji prywatnej do PKB (wykresy zielone w porównaniu do wykresów niebieskich)). Większa konsumpcja prywatna pociąga za sobą również większy popyt, a więc większą stopę zysku ze sprzedaży. W modelu wzrost popytu wpływa na wzrost oczekiwanego popytu, a w konsekwencji na wzrost wielkości produkcji. Wzrost produkcji bezpośrednio wpływa na wzrost współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej oraz stopę zatrudnienia. Stopa zatrudnienia rośnie, gdy wydajność pracy rośnie wolniej niż produkcja. Wzrost stopy zatrudnienia wpływa na wzrost nominalnej stawki wynagrodzeń, natomiast wzrost współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej na wzrost inflacji. Przez około 3 lata stosunek konsumpcji do produkcji rośnie (w każdym z przedstawionych na Rysunku 4.2.2 scenariuszy wysokości stawki podatku), a to oznacza, że okresie tym konsumpcja rośnie szybciej niż produkcja. Ta sytuacja zmienia się po 3 latach - produkcja rośnie szybciej niż konsumpcja prywatna. Wynika to ze zmniejszenia stopy zatrudnienia w skutek wzrostu wydajności pracy, która rośnie ze stałą stopą wzrostu. Z wykresów przedstawiających inwestycje w stosunku do PKB oraz trajektorie inwestycji możemy wywnioskować brak większego wpływu zmiany stawki τ na stopę wzrostu inwestycji. Negatywną konsekwencją zmniejszenia stawki τ jest zwiększenie stopy wzrostu zadłużenia sektora finansów publicznych. Większa wartość stawki τ (wykresy pomarańczowe) oznacza mniejszą konsumpcję prywatną. Analogicznie, tymi samymi kanałami jak w przypadku zmniejszenia tej stawki, konsekwencją zmniejszenia konsumpcji prywatnej jest mniejszy poziom produkcji. Pozytywną konsekwencją wzrostu stawki τ jest niższa stopa wzrostu zadłużenia sektora finansów publicznych.

Zmiana stawki podatku od zysku z kapitału trwałego i odsetek z obligacji τ_c

Analiza empiryczna wykazała, że stan stacjonarny jest stabilny dla wartości parametru τ_c większej od (-1). Z Tabeli 4.2.1 wynika, że jedynym efektem zmiany stawki podatku τ_c w długim okresie jest zmiana wielkości długu sektora finansów publicznych w stosunku do PKB w stanie stacjonarnym. Na podstawie analizy empirycznej, której wyniki przedstawione są na Rysunku 4.2.3, możemy stwierdzić, że większa wysokość stawki podatku τ_c oznacza

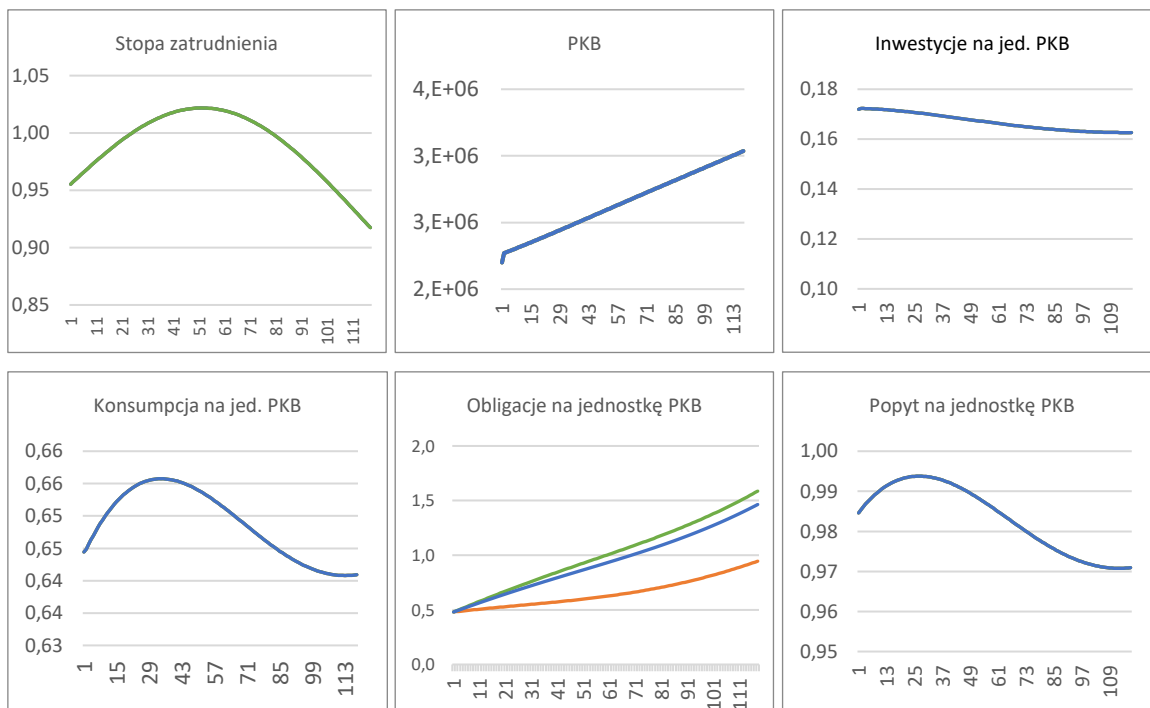
mniejszą wartość w stanie stacjonarnym długu publicznego w stosunku do PKB, a mniejsza wysokość stawki pociąga za sobą większe zadłużenie.



Rysunek 4.2.3. Dynamika długu sektora finansów publicznych w stosunku do PKB b dla różnych wartości stawki podatkowej τ_c . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennej: pomarańczowy dla $\tau_c = 0,4$, zielony $\tau_c = 0,1$, niebieski dla $\tau_c = 0,082$ (zestaw 1 - bazowy).

Źródło: opracowanie własne.

Poniżej, na Rysunku 4.2.4., prezentujemy wyniki analizy zmiany stawki podatkowej τ_c na podstawie kilku wybranych zmiennych modelu.



Rysunek 4.2.4. Dynamika zmiennych modelu KMG dla różnych stawek podatkowych τ_c . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: pomarańczowy dla $\tau_c = 0,4$, zielony $\tau_c = 0,01$, niebieski dla $\tau_c = 0,082$ (zestaw 1 - bazowy).

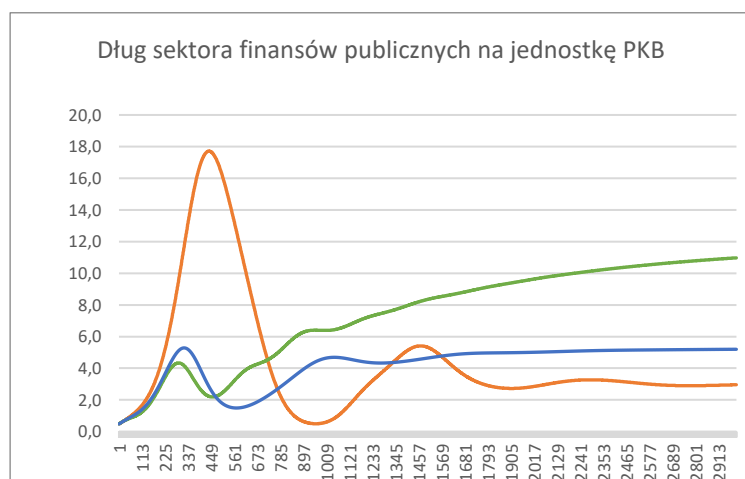
Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie analizy dotyczącej krótkiego okresu, której wyniki przedstawiono na Rysunku 4.2.4, wnioskujemy, że zmiana wysokości stawki τ_c nie wpływa na trajektorie badanych zmiennych. Wyjątkiem jest zmienna b , która, podobnie jak w długim okresie, rośnie szybciej przy mniejszej wysokości stawki podatkowej τ_c ⁵⁷.

Zmiana stawki podatków pośrednich τ_p

Zmianę stawki podatków pośrednich (np. zmiana stawki VAT lub stawki podatku akcyzowego) symulujemy zmianą wartości parametru τ_p (stosunek podatku pośredniego do całkowitej sprzedaży). Na podstawie analizy empirycznej możemy stwierdzić, że stan stacjonarny modelu KMG jest lokalnie asymptotycznie stabilny dla $\tau_p \in (0,11; 0,17)$.

Z wykresów przedstawionych na Rysunku 4.2.5. wynika intuicyjny wniosek, że niższa stawka podatku pośredniego oznacza większe zadłużenie sektora finansów publicznych w stosunku do PKB.

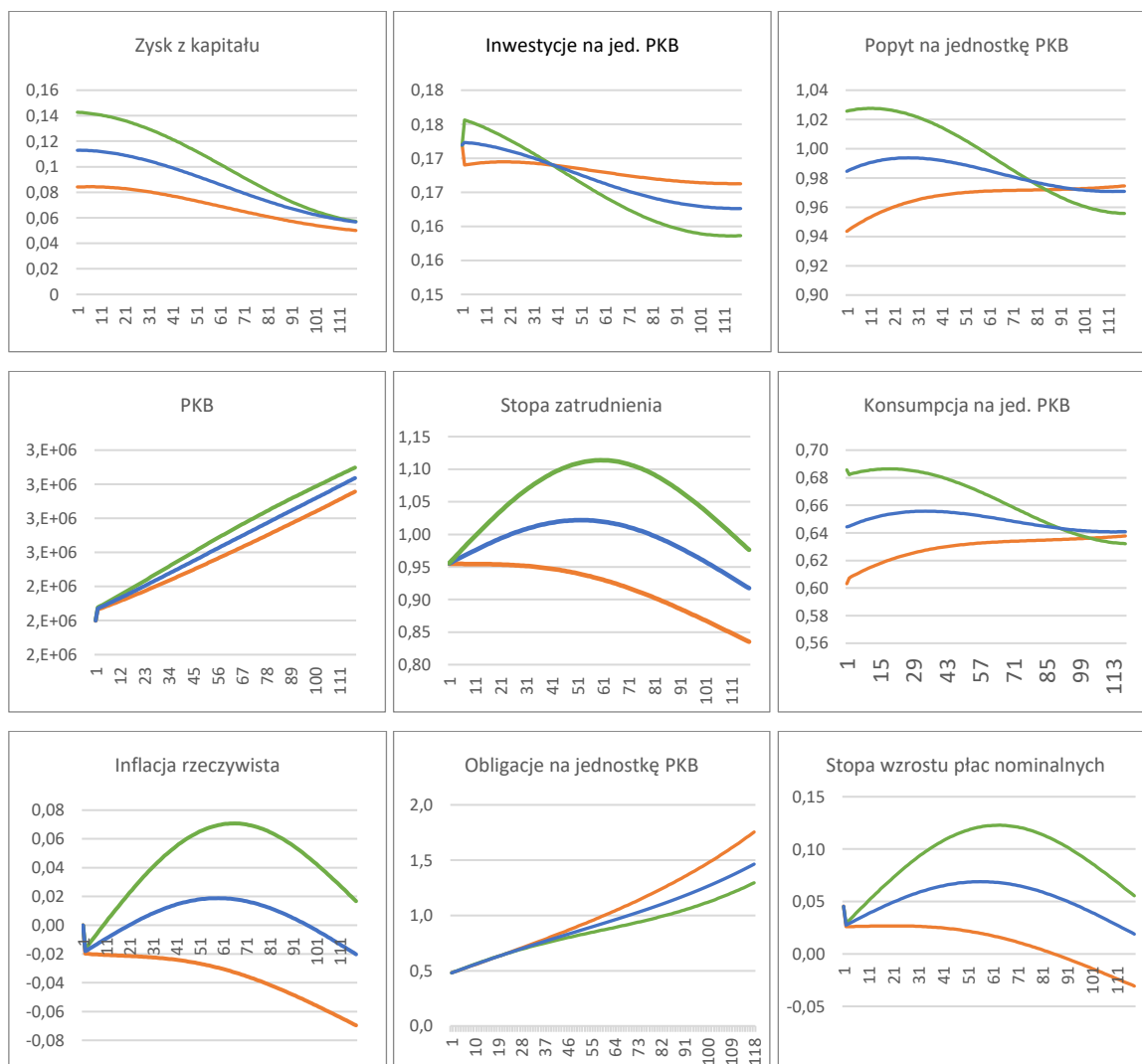


Rysunek 4.2.5. Dynamika długu sektora finansów publicznych na jednostkę PKB b dla różnych stawek podatku pośredniego τ_p . Wykresy przedstawiają trajektorię zmiennej: zielony dla $\tau_p = 0,17$, pomarańczowy $\tau_p = 0,13$, niebieski dla $\tau_p = 0,15$ (zestaw 1 - bazowy).

Źródło: opracowanie własne.

⁵⁷ Do podobnego wniosku doszli Sebastian Gechert, Philipp Heimberger, w opracowaniu: Do corporate tax cuts boost economic growth?, European Economic Review, Volume 147, 2022.

Na Rysunku 4.2.6 przedstawiamy analizę wpływu wysokości podatku pośredniego w okresie 10 lat (120 okresów) na wybrane zmienne modelu.



Rysunek 4.2.6. Dynamika zmiennych modelu KMG dla różnych stawek podatku pośredniego τ_p . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: zielony dla $\tau_p = 0,17$, pomarańczowy $\tau_p = 0,13$, niebieski dla $\tau_p = 0,15$ (zestaw 1 - bazowy).

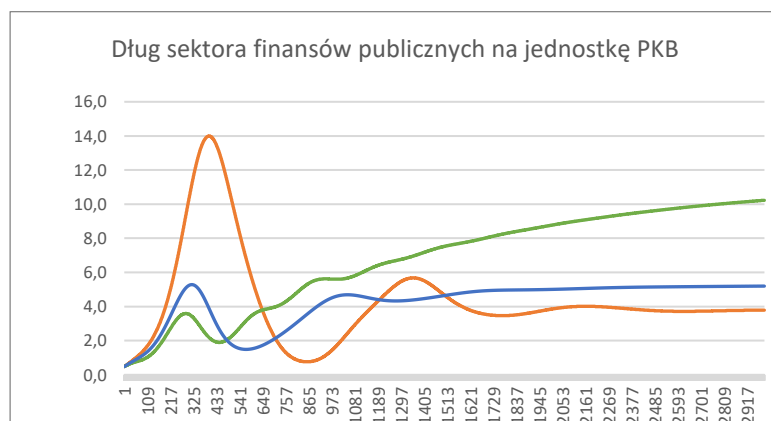
Źródło: opracowanie własne.

Obniżenie podatku pośredniego pozwala uzyskać wyższą stopę zysku z kapitału rzeczowego, a to z kolei pociąga za sobą większy popyt inwestycyjny (Rysunek 4.2.6.). Większy popyt oznacza większy poziom produkcji, czego konsekwencją jest wyższy wskaźnik wykorzystania mocy produkcyjnej oraz wyższa stopa zatrudnienia. Te dwa czynniki wpływają na podniesienie poziomu cen i płac nominalnych. Wyższe poziomy płac i zatrudnienia oznaczają większy poziom konsumpcji prywatnej. Stopa wzrostu produkcji utrzymuje się w badanym okresie na stałym poziomie. Ze względu na większe płace

nominalne większa jest stopa zysku z kapitału trwałego, a w konsekwencji mniejsze popyt inwestycyjny oraz stopa wzrostu produkcji. Po około 6 latach zatrudnienie zaczyna maleć w wyniku zwiększenia wydajności pracy oraz zmniejszenia stopy wzrostu produkcji. Ważnym wynikiem jest także mniejszy dług sektora finansów publicznych w stosunku do PKB, co przede wszystkim wynika ze wzrostu produkcji. Dodatkowo na podstawie wyników symulacji przedstawionych za pomocą wykresów można wywnioskować, że zmniejszenie stawki podatku pośredniego powoduje szybszy wzrost produkcji w porównaniu z innymi wielkościami tj. konsumpcją prywatną oraz inwestycjami prywatnymi, co ilustrują zmienne C/Y i I/Y , opisujące stosunek konsumpcji do PKB oraz stosunek inwestycji do PKB. Negatywnym skutkiem obniżenia podatku pośredniego jest szybszy wzrost cen.

Zmiana stawki ubezpieczenia społecznego płaconego przez pracodawców τ_1

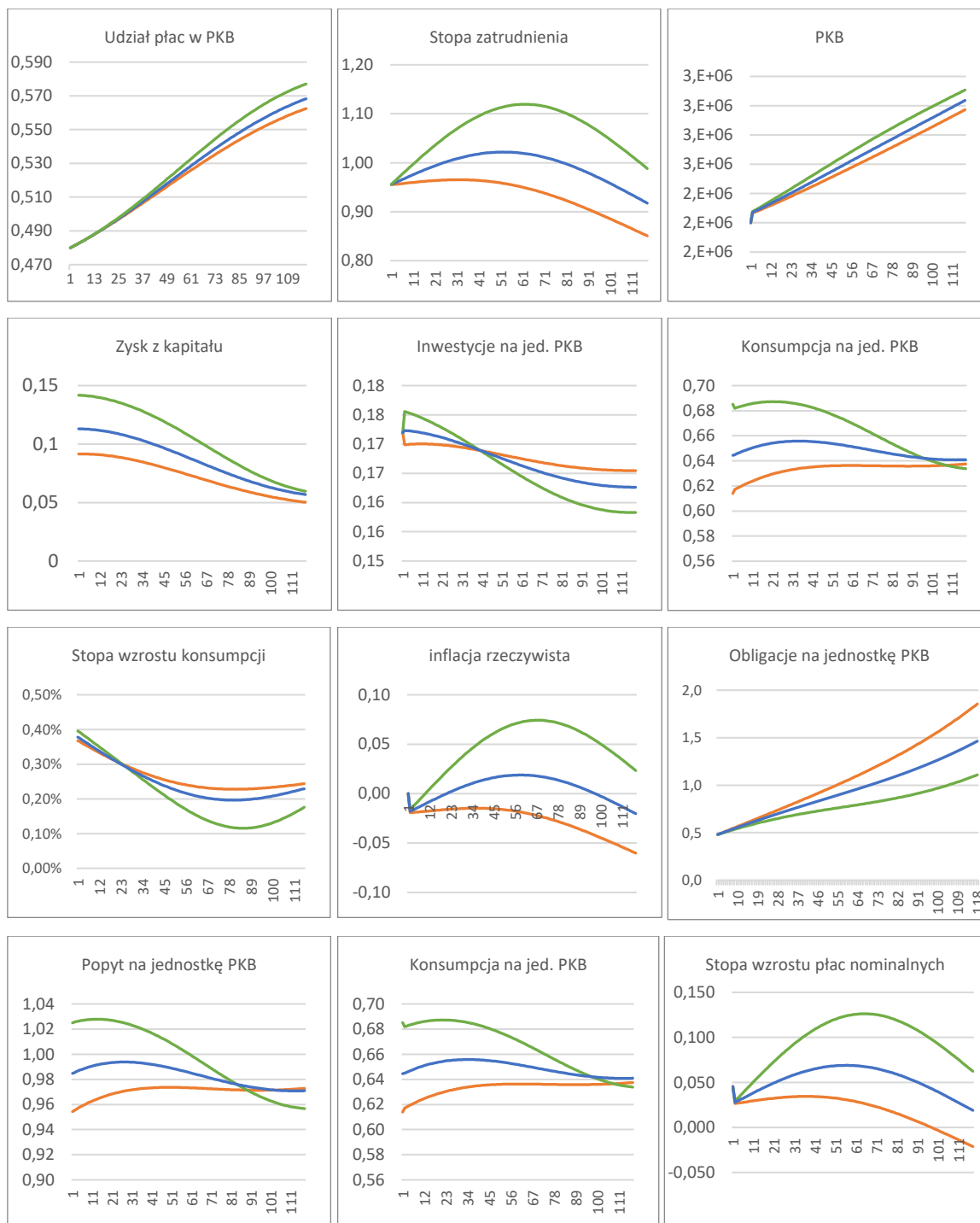
Analiza empiryczna wykazała, że stan stacjonarny jest stabilny dla stawki $\tau_1 \in (0; 0,11)$. Z wykresów przedstawionych na Rysunku 4.27 wynika, że zwiększanie stawki τ_1 powoduje zmniejszenie wartości długu sektora finansów publicznych w stosunku do PKB.



Rysunek 4.2.7. Dynamika długu sektora finansów publicznych na jednostkę PKB b dla różnych stawek τ_1 ubezpieczenia społecznego płaconego przez pracodawców. Wykresy przedstawiają trajektorię zmiennej: zielony dla $\tau_1 = 0,04$ (spadek o 0,03), pomarańczowy $\tau_1 = 0,1$ (wzrost o 0,03), niebieski dla $\tau_1 = 0,07$ (zestaw 1 - bazowy).

Źródło: opracowanie własne.

Zmiana stawki τ_1 powoduje takie same reakcje modelu jak zmiana stawki podatku pośredniego (porównaj wykresy na rysunku 4.2.8 z wykresami na rysunku 4.2.6). Wynika to z równań modelu, w których podatek pośredni i podatek na ubezpieczenia społeczne płacone przez pracodawców uwzględniony jest w oczekiwanych zyskach przedsiębiorstw.

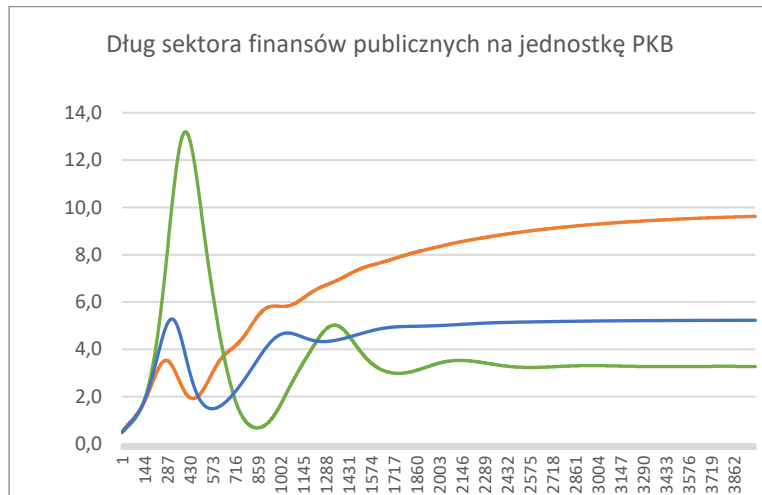


Rysunek 4.2.8. Dynamika zmiennych modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza dla różnych stawek τ_1 ubezpieczenia społecznego płaconego przez pracodawców. Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: zielony dla $\tau_1 = 0,04$ (spadek o 0,03), pomarańczowy $\tau_1 = 0,1$ (wzrost o 0,03), niebieski dla $\tau_1 = 0,07$ (zestaw 1 - bazowy).

Źródło: opracowanie własne.

Zmiana wydatków sektora rządowego g

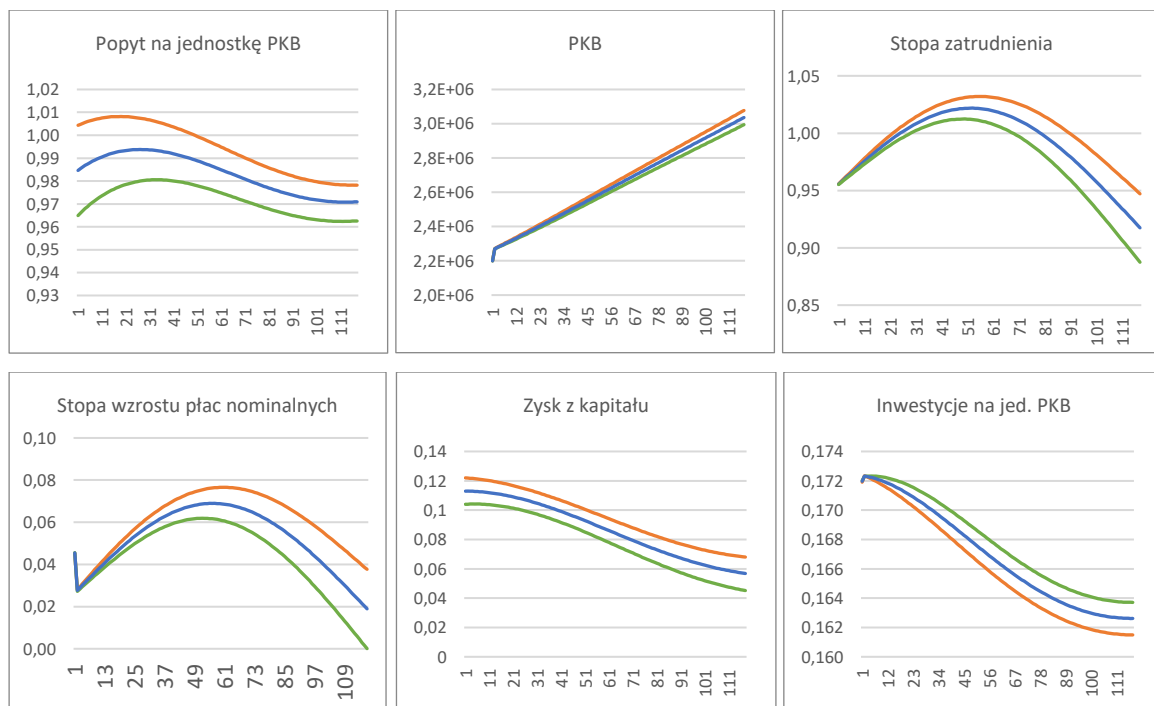
Z przeprowadzonych analiz wynika, że stan stacjonarny jest stabilny dla $g \in (0,075; 0,115)$. Mniejsze wydatki rządu przeznaczone na konsumpcję publiczną oznaczają mniejszy dług sektora finansów publicznych w stosunku do PKB w stanie stacjonarnym (zob. rysunek 4.2.9)

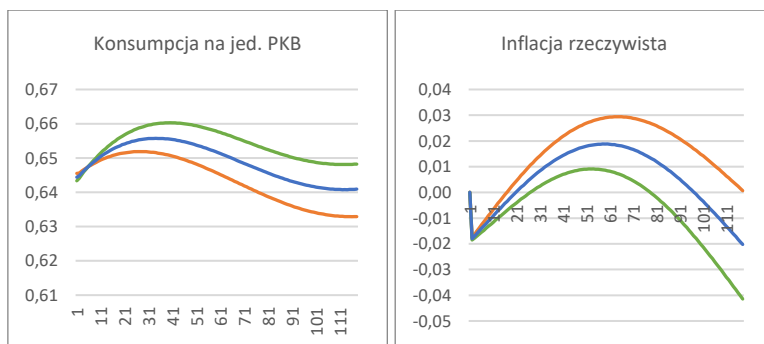


Rysunek 4.2.9. Dynamika długu sektora finansów publicznych na jednostkę PKB b w zależności od poziomu wydatków rządu g . Wykresy przedstawiają trajektorię zmiennej: zielony dla $g = 0,08$ (spadek o $0,01$), pomarańczowy $g = 0,1$ (wzrost o $0,01$), niebieski dla $g = 0,09$ (zestaw 1 - bazowy).

Źródło: opracowanie własne.

Przejdźmy teraz do badania wpływu wysokości wydatków publicznych w krótkim okresie na wzrost gospodarczy.





Rysunek 4.2.10. Dynamika zmiennych modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza w zależności od poziomu wydatków rządu g . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: zielony dla $g = 0,08$ (spadek o $0,01$), pomarańczowy $g = 0,1$ (wzrost o $0,01$), niebieski dla $g = 0,09$ (zestaw 1).

Źródło: opracowanie własne.

W krótkim okresie wysokość wydatków publicznych wpływa na popyt, a przez to na wielkość produkcji. Większa wielkość produkcji przekłada się na współczynnik wykorzystania mocy produkcyjnej oraz na stopę zatrudnienia, co oznacza wyższe ceny i wynagrodzenia za pracę. Oznacza to, że wysokość wydatków rządowych na konsumpcje publiczną ma analogiczny wpływ na wzrost gospodarczy co wysokość stawki podatku od dochodu z pracy najemnej (rysunki 4.2.8 i 4.2.10).

Podsumowując, z przeprowadzonej analizy polityki fiskalnej wynika, że odpowiednie korzystanie z jej narzędzi może prowadzić do szybszego wzrostu gospodarczego jedynie w krótkim okresie. Z drugiej strony, nieodpowiednia polityka fiskalna skutkuje większym zadłużeniem gospodarki zarówno w krótkim jak i długim okresie. Kolejnym krokiem badania polityki fiskalnej może być analiza zmian kilku stawek podatkowych jednocześnie oraz porównanie wyników dotyczących różnych scenariuszy prowadzenia polityki fiskalnej w przypadku gospodarki opisaney innym zestawem parametrów reakcji. Jednakże tą analizę zostawiamy jako przedmiot badań nad modelami typu KMG w kolejnych pracach.

Polityka pieniężna

Zmiana stopy wzrostu podaży pieniądza μ

W omawianym modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza jedynym narzędziem polityki pieniężnej jest stopa wzrostu podaży pieniądza μ . Z analizy równań zmiennych w stanie stacjonarnym wynika, że polityka pieniężna jest neutralna w długim okresie (parametr μ nie wpływa na zmienne realne w stanie stacjonarnym). Wyjątkiem są zmienne

nominalne, tj. stopa inflacji i dług sektora finansów publicznych. Z równania stopy inflacji w stanie stacjonarnym ($\bar{\pi} = \mu - n$), bez obliczania pochodnej, łatwo można wywnioskować, że stopa inflacji rośnie w stanie stacjonarnym wraz ze wzrostem wartości parametru μ .

Bardziej skomplikowane jest określenie reakcji na zmianę polityki pieniężnej (zmianę wartości parametru μ) długu sektora finansów publicznych w stosunku do PKB w stanie stacjonarnym. Aby to zrobić, wyznaczyliśmy pochodną tej zmiennej względem parametru μ :

$$\frac{d}{d\mu} \left(\frac{B}{pY} \right) = \frac{-(g - \tau_c(\alpha_4 \bar{y}^d - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{u} y^p - \delta) - (\tau - \alpha_1) \bar{U} \bar{u} y^p) \alpha_3 \tau_c}{(\alpha_3 \tau_c \bar{r} - \bar{\rho} + \xi + n)^2 \bar{u} y^p}. \quad (4.74)$$

Z (4.74) wynika, że wpływ polityki pieniężnej na dług sektora finansów publicznych w stosunku do PKB zależy od parametrów modelu. Pochodna (4.74) jest dodatnia:

$$\frac{d}{d\mu} \left(\frac{B}{pY} \right) > 0$$

gdy

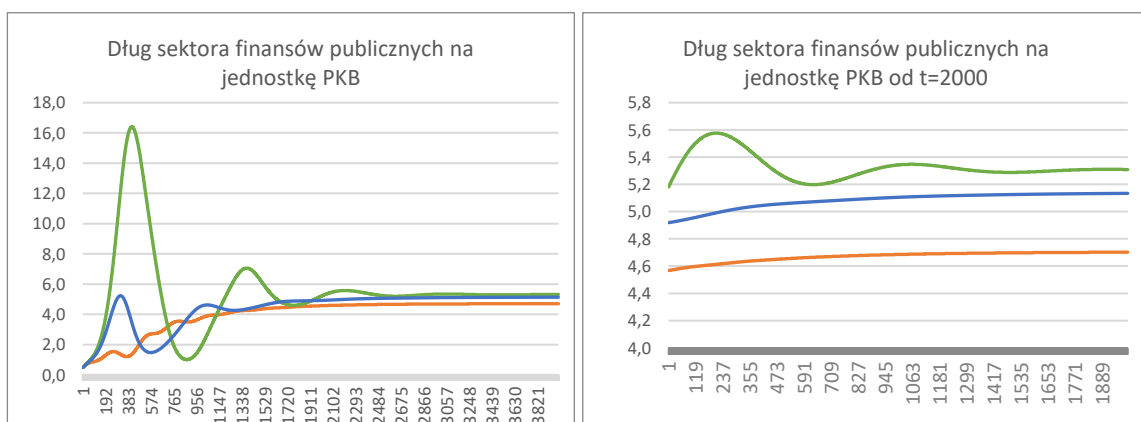
$$-(g - \tau_c(\alpha_4 \bar{y}^d - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{u} y^p - \delta) - (\tau - \alpha_1) \bar{U} \bar{u} y^p) \alpha_3 \tau_c > 0$$

czyli gdy

$$g + \alpha_1 \bar{U} \bar{u} y^p < \tau_c(\alpha_4 \bar{y}^d - (1 + \tau_1) \bar{U} \bar{u} y^p - \delta) + \tau \bar{U} \bar{u} y^p.$$

A więc, jeżeli wydatki sektora finansów publicznych są mniejsze od jego dochodów, to na skutek zwiększenia stopy wzrostu podaży pieniądza dług sektora finansów publicznych w stosunku do PKB rośnie w długim okresie.

Na Rysunku 4.2.11 przedstawiamy trajektorię sektora finansów publicznych w stosunku do PKB dla trzech różnych stóp wzrostu podaży pieniądza.



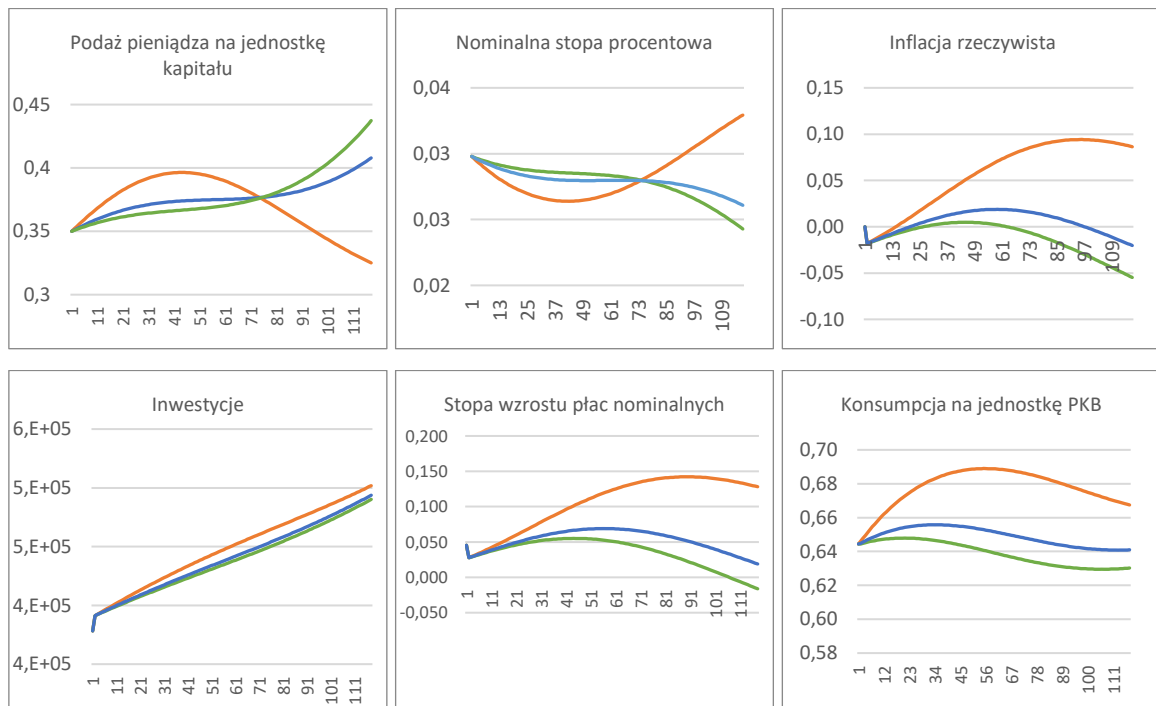
Rysunek 4.2.11. Dynamika długu sektora finansów publicznych na jednostkę PKB b dla różnych wartości stopy wzrostu μ . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennej: zielony dla

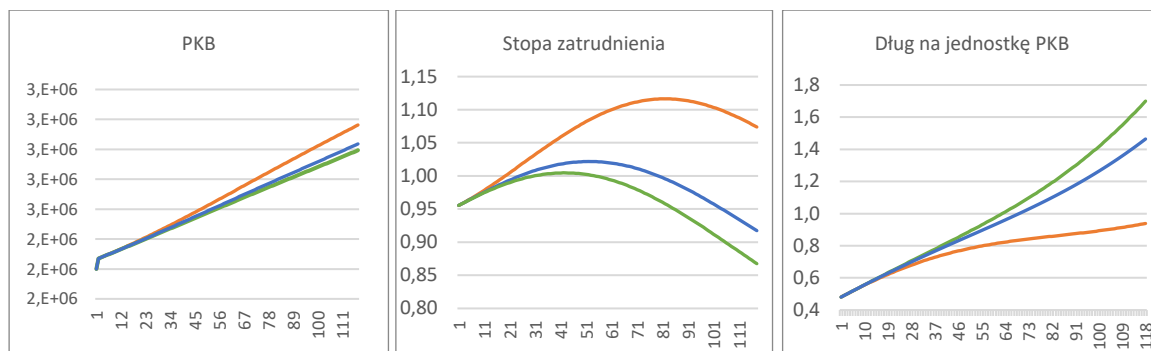
$\mu = 0,04$ (spadek o 0,01), pomarańczowy $\mu = 0,08$ (wzrost o 0,03), niebieski dla $\mu = 0,05$ (zestaw 1 - bazowy).

Źródło: opracowanie własne.

Analiza empiryczna wykonana dla pierwszego zestawu parametrów reakcji wykazała, że wartość długu sektora finansów publicznych na jednostkę PKB osiąga niższą wartość w stanie stacjonarnym, gdy parametr μ (stopa wzrostu podaży pieniądza) ma większą wartość (Rysunek 4.2.11.)

W kolejnym kroku analizy skupimy się na badaniu polityki pieniężnej w krótkim okresie. Do symulacji komputerowych użyliśmy takiego samego zestawu wartości parametrów jak w analizie polityki fiskalnej. W pierwszym etapie analizy skutków polityki pieniężnej sprawdziliśmy wpływ stopy wzrostu podaży pieniądza na stabilność stanu stacjonarnego. Okazało się, że stan stacjonarny jest lokalnie asymptotycznie stabilny dla μ większego niż 0,035. A więc zbyt niski poziom wzrostu podaży pieniądza prowadzi do destabilizacji gospodarki. Symulacje wykonaliśmy dla trzech różnych wartości parametru μ , a prezentację wykresów trajektorii ograniczyliśmy do 120 okresów (10 lat).





Rysunek 4.2.11. Dynamika zmiennych modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza dla różnych stóp wzrostu μ . Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: zielony dla $\mu = 0,04$ (spadek o 0,01), pomarańczowy $\mu = 0,08$ (wzrost o 0,03), niebieski dla $\mu = 0,05$ (zestaw 1 - bazowy).

Źródło: opracowanie własne.

Z równań modelu wynika, że zwiększenie stopy wzrostu podaży pieniądza μ w pierwszej kolejności przyspiesza wzrost podaży pieniądza na jednostkę kapitału rzeczowego co prowadzi do zmniejszenia nominalnej stopy procentowej. Jednocześnie rośnie cel inflacyjny, co wpływa na wzrost stopy inflacji i w konsekwencji na wzrost płac nominalnych. Rosnąca stopa inflacji oraz malejąca nominalna stopa procentowa prowadzą do wzrostu popytu inwestycyjnego. Wzrost płac nominalnych powoduje wzrost konsumpcji prywatnej. Wzrost konsumpcji i inwestycji skutkują zwiększeniem produkcji. Odpowiednio wysoki wzrost produkcji⁵⁸ wpływa na wzrost stopy zatrudnienia oraz współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej. Wzrost stopy zatrudnienia powoduje wzrost płac nominalnych, a wzrost współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej skutkuje wzrostem cen. Ten cykl powtarza się do momentu aż wydajność pracy i kapitał trwały zwiększą się do odpowiedniego poziomu, czego skutkiem będzie zmniejszenie stopy zatrudnienia i stopy wzrostu płac nominalnych oraz zmniejszenie podaży pieniądza na jednostkę kapitału, czyli wzrost nominalnej stopy procentowej.

4.2.5. Podsumowanie

Wyniki symulacji komputerowych dla różnych zestawów wartości parametrów, przeprowadzonych na podstawie modelu KMG w postaci intensywnej przedstawionego w rozdziale pierwszym, w pełni potwierdziły prawdziwość twierdzenia o lokalnej

⁵⁸ Zatrudnienie rośnie, gdy stopa wzrostu produkcji jest wyższa od stopy wzrostu wydajności pracy.

asymptotycznej stabilności stanu stacjonarnego. Ponadto symulacje odkryły znaczący mankament modelu, jakim jest długi czas dochodzenia gospodarki do stanu stacjonarnego oraz trudności w kalibracji modelu do danych dotyczących rzeczywistej gospodarki.

Analiza empiryczna pokazała, że czas dojścia do stanu stacjonarnego może zostać skrócony przez zmianę wartości odpowiednich parametrów. Może to oznaczać, że wpływ na długi czas dochodzenia do stanu stacjonarnego ma złożoność modelu, duża liczba jego równań i zmiennych, a także nieliniowość zależności między zmiennymi. Jednakże zmiany wartości parametrów mają swoje konsekwencje w mniejszym realizmie interpretacji wartości zmiennych oraz parametrów modelu, a w konsekwencji odejście od symulacji gospodarki polskiej. Z tego powodu w tej pracy nie przedstawiamy takich symulacji.⁵⁹ Oprócz czasu dojścia gospodarki do ścieżki równomiernego wzrostu ważną informacją jest kierunek rozwoju gospodarki, który został zbadany w symulacjach. Na podstawie wykresów zauważono, że na kierunek ten mają wpływ wartości parametrów modelu, które odzwierciedlają działania sektorów gospodarczych.

W kolejnym podrozdziale na podstawie symulacji komputerowych porównano model KMG z modelem KMGT. Ponadto w tym podrozdziale sprawdzono jak zmiana polityki pieniężnej wpływa na wzrost gospodarczy w modelu KMGT.

4.3. Eksperymenty symulacyjne modelu KMG z regułą Taylora

4.3.1. Uwagi ogólne

W podrozdziale tym zaprezentujemy symulacje komputerowe modelu KMG z regułą Taylora bez kredytu inwestycyjnego. Powodem takiego ograniczenia jest konieczność ponownej kalibracji równań modelu oraz wyznaczenie parametrów modelu, co znacznie zwiększa objętość pracy. Analiza empiryczna modelu KMG z regułą Taylora i kredytem inwestycyjnym zostanie przeprowadzona w kolejnych pracach autora niniejszej dysertacji.

W celu zilustrowania dynamiki modelu KMG z regułą Taylora (KMGT) przedstawimy wyniki prostych symulacji komputerowych. Podobnie jak poprzednim punkcie, równania modelu KMGT zostały zmodyfikowane w celu dostosowania ich do danych o gospodarce polskiej. Wszystkie zastosowane modyfikacje są identyczne jak dla modelu KMG

⁵⁹ We wcześniejszych pracach analiza empiryczna koncentrowała się na badaniu cyklicznym wzroście (zob. Charella (2000)). Autorzy tych prac nie zajmują się czasem dojścia do stanu stacjonarnego.

z egzogeniczną podażą pieniądza. Z tego powodu przedstawimy jedynie końcowe postacie równań zmodyfikowanego modelu KMG.

Tabela 4.3.1. Równania modelu KMG z regułą Taylora w symulacjach komputerowych

DETERMINANTY POPYTU		
Lp.	Nazwa zmiennej	Równanie
1.	Popyt na produkt	$Y^d = C + I + G$
2.	Konsumpcja sektora prywatnego	$C = (1 - \tau)\omega L^d + TR$, gdzie $TR = \alpha_1 \omega L^d$
3.	Popyt na pracę	$L^d = Y/x$
4.	Stopa wzrostu wydajności pracy	$\hat{x} = n$
5.	Stopa wzrostu płac nominalnych	$\hat{w} = \beta_w(V - \bar{V}) + \kappa_w \hat{p} + (1 - \kappa_w)\pi^e + n$
6.	Stopa wzrostu cen	$\hat{p} = \beta_p(u - \bar{u}) + \kappa_p(\hat{w} - n) + (1 - \kappa_p)\pi^e$
7.	Przyrost oczekiwanej inflacji	$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e}(\alpha \hat{p} + (1 - \alpha)(\mu - n) - \pi^e)$
8.	Stopa zatrudnienia	$V = L^d/L$
9.	Wskaźnik wykorzystania potencjału produkcyjnego	$u = Y/Y^p$
10.	Produkcja potencjalna	$Y^p = y^p K$
11.	Przyrost kapitału	$\dot{K} = i_1(\rho^e - \xi - (r - \pi^e))K + i_2(u - \bar{u})K + \hat{Y}^e K$
12.	Oczekiwana realna stopa zysku z kapitału	$\rho^e = ((1 - \alpha_2)Y^e - (1 + \tau_1)\omega L^d - \delta K)/K$
13.	Stopa wzrostu oczekiwanej sprzedaży	$\hat{Y}^e = \hat{\omega} + \beta_{y^e}(Y^d - Y^e)/Y^e$
14.	Popyt inwestycyjny	$I = \dot{K} + \delta K$
PRODUKCJA I ZAPASY		
15.	Produkcja	$Y = Y^e + \beta_Z \dot{Y}^e + \beta_n(N^d - N)$
16.	Produkcja przeznaczona na zapasy	$Z = \beta_Z \dot{Y}^e + \beta_n(N^d - N)$
17.	Pożądane zapasy	$N^d = \beta_{N^d} Y^e$
18.	Zmiana rzeczywistych zapasów	$\dot{N} = Y - Y^d$
Reguła Taylora		
19.	Przyrost nominalnej stopy procentowej	$\dot{r} = -\beta_{i_r}(r - r^o) + \beta_{i_p}(\hat{p} - \bar{\pi}) + \beta_{i_u}(u - \bar{u})$
BUDŻET PAŃSTWA		
20.	Podatki	$T = \tau \omega L^d + \tau_c(\alpha_4 Y^d - (1 + \tau_1)\omega L^d - \delta K + \alpha_3 rB/p)$
21.	Popyt sektora rządowego	$G = gK$
22.	Przyrost obligacji	$\dot{B} = pG + pTR + rB - pT$

Źródło: opracowanie własne.

Modelu KMG z regułą Taylora w postaci intensywnej

Wykorzystując powyższe równania modelu KMG z regułą Taylora, wersję modelu zastosowaną w symulacjach przedstawimy teraz w postaci intensywnej, Aby to zrobić, wykorzystamy zmienne: udział płac $U = \omega L^d/Y$ w PKB Y , pracochłonność pełnego zatrudnienia (stosunek efektywnej pracy do kapitału) $l = xL/K$, nominalną stopę procentową r , oczekiwaną inflację π^e , oczekiwaną sprzedaż $y^e = Y^e/K$ na jednostkę

kapitału trwałego, wielkość zapasów $v = N/K$ na jednostkę kapitału, stosunek podaży obligacji $b = B/pK$ do wielkości kapitału trwałego.

Postać intensywna modelu KMG z regułą Taylora jest następująca:

$$\hat{U} = \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) (V - \bar{V}) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u - \bar{u}) \right), \quad (4.75)$$

$$\hat{l} = n - \left(\hat{U} + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right) - i_1 (\rho^e - \xi - (r - \pi^e)) - i_2 (u - \bar{u}), \quad (4.76)$$

$$\dot{r} = -\beta_{i_r} (r - r^o) + \beta_{i_p} (\hat{p} - \bar{\pi}) + \beta_{i_u} (u - \bar{u}), \quad (4.77)$$

$$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e} (\alpha \hat{p} + (1 - \alpha) \bar{\pi} - \pi^e), \quad (4.78)$$

$$\dot{y}^e = y^e \left(\hat{U} + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) - n + \hat{l} \right), \quad (4.79)$$

$$\dot{v} = y - y^d - v(n - \hat{l}), \quad (4.80)$$

$$\dot{b} = (g + rb - \tau_c (\alpha_4 y^d - (1 + \tau_1) Uy - \delta + \alpha_3 rb) - (\tau - \alpha_1) Uy) - b(n - \hat{l} + \hat{p}), \quad (4.81)$$

gdzie $\kappa = \frac{1}{1 - \kappa_w \kappa_p}$, $\hat{p} = \left(\kappa \left(\kappa_p \beta_w (V - \bar{V}) + \beta_p (u - \bar{u}) \right) + \pi^e \right)$, $V = \frac{y}{l}$, $u = \frac{y}{y^p}$,

$$\rho^e = (1 - \alpha_2) y^e - (1 + \tau_1) Uy - \delta, \quad \alpha_4 = \left(1 - \alpha_2 + \frac{\alpha_2}{\tau_c} \right) = \text{const.}$$

oraz

$$y^d = (1 + \alpha_1 - \tau) y U + i_1 (\rho^e - \xi - (r - \pi^e)) + i_2 (u - \bar{u}) + \delta + g + \\ + \kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) (V - \bar{V}) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u - \bar{u}) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right),$$

$$y = y^e + \beta_n \beta_{N^a} y^e - \beta_n v +$$

$$+ y^e \beta_Z \left(\kappa \left(\beta_w (1 - \kappa_p) (V - \bar{V}) - \beta_p (1 - \kappa_w) (u - \bar{u}) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d}{y^e} - 1 \right) \right).$$

W modelu KMG z regułą Taylora dynamikę stopy procentowa r opisuje równanie różniczkowe:

$$\dot{r} = -\beta_{i_r} (r - r^o) + \beta_{i_p} (\hat{p} - \bar{\pi}) + \beta_{i_u} (u - \bar{u}).$$

(W modelu KMG z rozdziału pierwszego nominalna stopa procentowa r wynika z równowagi na rynku pieniądza.) Ta modyfikacja prowadzi do tego, że podaż pieniądza nie ma wpływu na resztę zmiennych modelu. Z tego powodu nie będzie ona tutaj analizowana. Pozostałe równania modelu KMG są takie same jak w modelu KMG z rozdziału pierwszego. Tak więc wyprowadzanie powyższych równań modelu KMG z regułą Taylora w postaci intensywnej odbywa się w analogiczny sposób jak w modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza zaprezentowanego w rozdziale pierwszym.

Wartości zmiennych modelu KMGT w stanie stacjonarym

W równowadze wygasa dynamika tych zmiennych: $\dot{U} = 0, \dot{l} = 0, \dots, \dot{b} = 0$. Aby wyprowadzić wzory na wartości zmiennych w stanie stacjonarym, wystarczy rozwiązać układ równań (4.75)-(4.81), przyrównując ich prawą stronę do zera.

Postępując analogicznie jak w rozdziale drugim, tzn. rozwiązując układ równań (4.75)-(4.81), w którym lewa strona jest równa zero a niewiadomymi są zmienne: U, l, r, π^e, y^e, v oraz b można udowodnić, że istnieje dokładnie jeden stan stacjonary modelu (4.75)-(4.81) opisany wzorami:

$$\bar{\pi}^e = \hat{p} = \bar{\pi} = \mu - n, \quad (4.82)$$

$$V = \bar{V}, \quad u = \bar{u}, \quad (4.83)$$

$$\bar{y} = \bar{u}y^p, \quad y^p = \text{const.}, \quad (4.84)$$

$$\bar{l} = \frac{\bar{y}}{\bar{v}}, \quad (4.85)$$

$$\bar{y}^d = \frac{(n+\beta_n)}{n+\beta_n n^2 + \beta_n \beta_n n + \beta_n} \bar{u}y^p, \quad \bar{y}^e = \bar{y}^d \quad (4.86)$$

$$\bar{U} = \frac{\bar{c}}{(1+\alpha_1-\tau)\bar{y}}, \quad (4.87)$$

$$\bar{\rho} = (1 - \alpha_2)\bar{y}^d - (1 + \tau_1)\bar{U}\bar{y} - \delta, \quad \bar{\rho} = \bar{\rho}^e \quad (4.88)$$

$$\bar{r} = \bar{\rho} + \bar{\pi} - \xi, \quad (4.89)$$

$$\bar{b} = \frac{g - \tau_c(\alpha_2 \bar{y}^d - (1 + \tau_1)\bar{U}\bar{y} - \delta) - (\tau - \alpha_1)\bar{U}\bar{y}}{\alpha_3 \tau_c \bar{r} - \bar{r} + \mu}. \quad (4.90)$$

4.3.2. Porównanie modeli KMG i KMGT na podstawie symulacji komputerowych

W celu przeprowadzenia symulacji modelu KMGT przyjęliśmy zestaw wartości parametrów z Tabeli 4.1.2, wartości początkowe zmiennych z Tabeli 4.1.5 oraz pierwszy zestaw wartości parametrów reakcji z Tabeli 4.1.3, oraz pierwszy zestaw parametrów reakcji. Na podstawie definicji zmiennych modelu intensywnego (4.75)-(4.81) wyznaczyliśmy stan początkowy modelu KMGT, a na podstawie równań (4.82)-(4.90) obliczyliśmy stan stacjonary modelu KMGT. Wyniki tych obliczeń przedstawiamy w Tabeli 4.3.2.

Tabela 4.3.2. Porównanie wartości zmiennych modelu KMGT w stanie początkowym i w stanie stacjonarym

Nazwa zmiennej	Symbol	Stan początkowy	Stan stacjonarny	Różnica
Udział płac w PKB	U	0,480	0,560	0,080
Efektywna podaż pracy na jednostkę kapitału	l	0,560	0,582	0,022

Oczekiwana inflacja	π^e	0,000	0,020	0,020
Stosunek oczekiwanej sprzedaży do kapitału	y^e	0,521	0,549	0,027
Wielkość zapasów na jednostkę kapitału	v	0,048	0,122	0,074
Stosunek podaży obligacji do wielkości kapitału	b	0,257	2,814	2,557
Stopa zatrudnienia	V	0,940	0,950	0,010
Wskaźnik wykorzystania mocy produkcyjnej	u	0,810	0,850	0,040
Stosunek sprzedaży do kapitału	y	0,534	0,553	0,019
Realna stopa procentowa	R	0,030	0,011	-0,019
Nominalna stopa procentowa	r	0,030	0,031	0,001
Oczekiwana stopa zysku z kapitału	ρ^e	0,108	0,076	-0,033
Inflacja rzeczywista	π	0,016	0,020	0,004
Stosunek popytu do kapitału	y^d	0,520	0,549	0,029

Źródło: opracowanie własne.

Jednym z celów symulacji komputerowych jest porównanie wyników empirycznych modelu KMGT i modelu KMG. Wyznaczony stan początkowy oraz stan stacjonarny modelu KMGT (Tabela 4.3.2) jest taki sam jak dla modelu KMG (por. Tabela 4.2.1a). Wynika to z takich samych wartości parametrów i wartości początkowych oraz z takich samych równań opisujących stan stacjonarny. Chcąc porównać ze sobą wyniki modeli KMG i KMGT, wartość nominalnej stopy procentowej w stanie stacjonarnym modelu KMGT ustalamy taką samą jak w przypadku kalibracji modelu KMG.

Na podstawie tabel 4.2.1a. oraz 4.3.2. możemy stwierdzić, że w długim okresie wartości zmiennych porównywanych modeli są takie same. Nie wiemy jednak, w przypadku którego z modeli gospodarka szybciej osiąga stan stacjonarny oraz jak wygląda droga dojścia do tego stanu. Aby odpowiedzieć na te pytania, porównamy teraz wyniki symulacji komputerowych obu modeli.

Podobnie jak w symulacjach modelu KMG z egzogeniczną podażą pieniądza, symulacje modelu KMGT przeprowadziliśmy, posługując się dyskretnym odpowiednikiem omawianego modelu KMGT.

Model KMG z regułą Taylora w symulacjach komputerowych:

$$U(t+1) = U(t) + sU(t)\kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p)(V(t) - \bar{V}) - \beta_p(1 - \kappa_w)(u(t) - \bar{u}) \right)$$

$$l(t+1) = l(t) + sl(t) \left(\begin{array}{c} n - \left(\hat{U}(t+1) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right) \right) - \\ -i_1 \left(\rho^e(t) - \xi - (r(t) - \pi^e(t)) \right) - i_2(u(t) - \bar{u}) \end{array} \right)$$

$$r(t+1) = r(t) - s \left(\beta_{i_r}(r(t) - r^o) + \beta_{i_p}(\hat{p}(t+1) - \bar{\pi}) + \beta_{i_u}(u(t) - \bar{u}) \right)$$

$$\begin{aligned}
\pi^e(t+1) &= \pi^e(t) + s\beta_{\pi^e}(\alpha\hat{p}(t+1) + (1-\alpha)\bar{\pi} - \pi^e(t)) \\
y^e(t+1) &= y^e(t) + sy^e(t)\left(\hat{U}(t+1) + n + \beta_{y^e}\left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1\right) - n + \hat{l}(t+1)\right) \\
v(t+1) &= v(t) + y(t) - y^d(t) - v(t)(n - \hat{l}(t+1)) \\
b(t+1) &= b(t) + \\
&+ s\left(g + r(t)b(t) - \tau_c\left(\alpha_4 y^d(t) - (1 + \tau_1)U(t)y(t) - \delta + \alpha_3 r(t)b(t)\right) - (\tau - \alpha_1)U(t)y(t) - \right. \\
&\quad \left. - b(t)(n - \hat{l}(t+1) + \hat{p}(t+1))\right)
\end{aligned} \tag{4.91}$$

gdzie $\kappa = \frac{1}{1 - \kappa_w \kappa_p} = \text{const.}$, $\alpha_4 = \left(1 - \alpha_2 + \frac{\alpha_2}{\tau_c}\right) = \text{const.}$,

$$\hat{p}(t+1) = \left(\kappa(\kappa_p \beta_w (V(t) - \bar{V}) + \beta_p (u(t) - \bar{u})) + \pi^e(t)\right),$$

$$V(t) = \frac{y(t)}{l(t)}, \quad u(t) = \frac{y(t)}{y^p},$$

$$\rho^e(t) = (1 - \alpha_2)y^e(t) - (1 + \tau_1)U(t)y(t) - \delta,$$

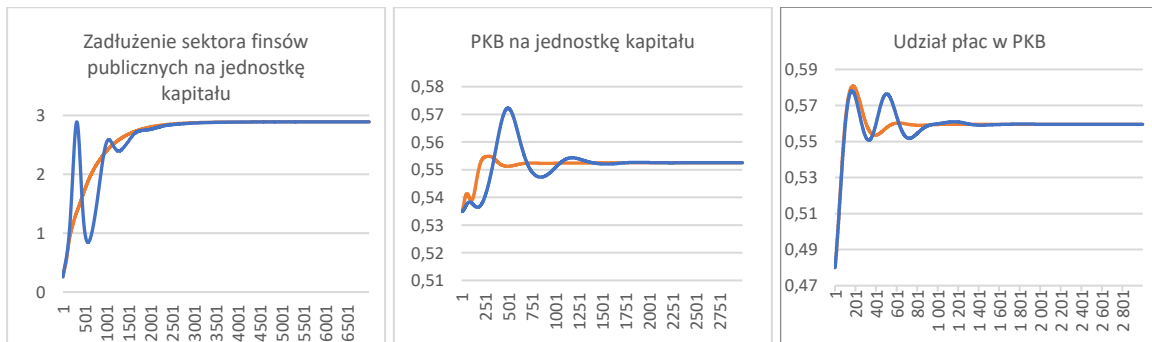
$$y^d(t) = (1 + \alpha_1 - \tau)y(t)U(t) + i_1(\rho^e(t) - \xi - (r(t) - \pi^e(t))) + i_2(u(t) - \bar{u}) + \delta +$$

$$+ g + \kappa(\beta_w(1 - \kappa_p)(V(t) - \bar{V}) - \beta_p(1 - \kappa_w)(u(t) - \bar{u})) + n + \beta_{y^e}\left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1\right),$$

$$y(t) = y^e + \beta_n \beta_{N^a} y^e(t) - \beta_n v(t) +$$

$$+ y^e(t) \beta_Z \left(\kappa(\beta_w(1 - \kappa_p)(V(t) - \bar{V}) - \beta_p(1 - \kappa_w)(u(t) - \bar{u})) + n + \beta_{y^e}\left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1\right)\right).$$

Na Rysunku 4.3.1 przedstawiamy trajektorie wybranych zmiennych modelu KMGT uzyskane na podstawie układu równań (4.91) oraz trajektorie wynikające z modelu KMG uzyskane na podstawie układu równań (4.73) dla tego samego zestawu wartości parametrów i wartości zmiennych w stanie początkowym w dłuższym horyzoncie czasowym

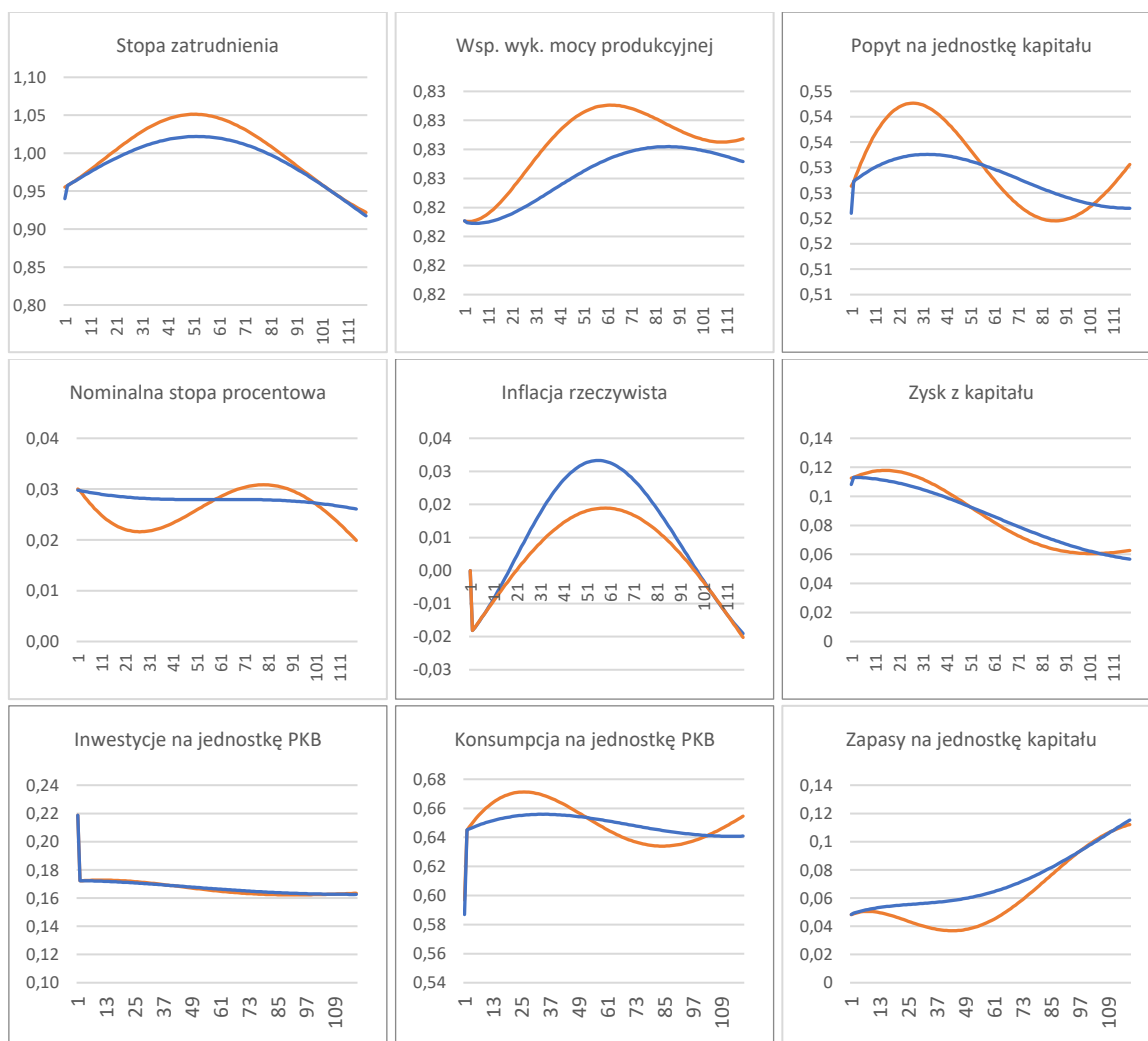


Rysunek 4.3.1. Długookresowa dynamika zmiennych modelu KMGT (kolor pomarańczowy) na tle dynamiki modelu KMG (kolor niebieski).

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie wyników symulacji przedstawionych na Rysunku 4.3.1 możemy stwierdzić, że w przypadku modelu KMGT gospodarka szybciej osiąga stan stacjonarny oraz w pierwszych okresach trajektorie prezentowanych zmiennych mają mniejsze fluktuacje od trajektorii modelu KMG. Oznacza to, że dzięki zmianie polityki pieniężnej na taką, która reaguje na sytuacje zachodzące w gospodarce i ma wyznaczone cele (np. cel inflacyjny), gospodarka szybciej znajduje się na ścieżce równomiernego wzrostu.

Na kolejnych wykresach (Rysunek 4.3.2) porównujemy trajektorie modeli KMGT i KMG w krótkim okresie.



Rysunek 4.3.2. Krótkookresowa dynamika zmiennych modelu KMGT (kolor pomarańczowy) na tle dynamiki modelu KMG (kolor niebieski).

Źródło: opracowanie własne.

W krótkim okresie, podobnie jak w długim, widoczna jest różnica między trajektoriami modeli KMGT i KMG. Na podstawie trajektorii współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej możemy wywnioskować, że w przypadku modelu KMGT występuje wyższy

poziom produkcji. Wynika on z większego popytu inwestycyjnego, do którego przyczynia się niższa realna stopa procentowa, która została w pierwszych okresach obniżona ze względu na niski poziom inflacji (niższy od celu inflacyjnego) i niską wartość współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej (niższy od zakładanej wartości naturalnej tego wskaźnika). Większy popyt oznacza większą stopę zysku z kapitału oraz większą stopę zatrudnienia. Wyższa stopa zatrudnienia przekłada się na większą konsumpcję prywatną oraz wzrost płac nominalnych, co jeszcze bardziej zwiększa popyt. Wzrost płac nominalnych oraz współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej pociąga za sobą wzrost inflacji. Gdy inflacja przekroczy cel inflacyjny, dzięki polityce pieniężnej (reguła Taylora) zmniejszona zostaje nominalna stopa procentowa, co w dalszej konsekwencji wpływa na zmniejszenie inflacji.

4.3.3. Analiza wpływu polityki fiskalnej i pieniężnej na gospodarkę opisaną równaniami modelu KMGT

Polityka fiskalna

Wpływ polityki fiskalnej na funkcjonowanie gospodarki opisaną za pomocą równań modelu KMGT w długim okresie jest taki sam jak w przypadku gospodarki opisaną modelem KMG. Ten wniosek bezpośrednio wynika z porównania równań opisujących stan stacjonarny modelu KMGT i modelu KMG. Jediną różnicą może być czas dojścia do stanu stacjonarnego oraz fluktuacje w pierwszych okresach symulacji. Aby to sprawdzić, podobnie jak w przypadku modelu KMG, należy zbadać wpływ polityki fiskalnej w krótkim i długim okresie za pomocą symulacji komputerowych. Jednak szerszą analizę polityki fiskalnej pomijamy w tej pracy. Natomiast uwagę skupiamy na wpływie polityki pieniężnej na funkcjonowanie gospodarki opisaną modelem KMGT, którą przedstawiamy w kolejnym punkcie tego podrozdziału.

Polityka pieniężna

Podstawową różnicą między omawianymi modelami KMG i KMGT jest wprowadzenie to tego drugiego reguły Taylora, podczas gdy w pierwszym modelu podaż pieniądza opisana jest jako wielkość egzogeniczna. Celem wprowadzenia reguły Taylora do modelu KMG jest urealnienie modelu do funkcjonowania rzeczywistej gospodarki polskiej, w której stosuje się regułę stóp procentowych jako instrument polityki pieniężnej⁶⁰ (w modelu KMG

⁶⁰ W Polsce polityka pieniężna prowadzona jest raczej w sposób ekspercki niż „mechanicznie” według ustalonej prostej reguły Taylora. W szczególności, bierze się pod uwagę znacznie szerszy

instrumentem polityki pieniężnej jest stopa wzrostu podaży pieniądza). W praktyce oznacza to, że w modelu KMGT mamy dodatkowe równanie, jakim jest dynamiczne równanie nominalnej stopy procentowej:

$$\dot{r} = -\beta_{i_r}(r - r^o) + \beta_{i_p}(\hat{p} - \bar{\pi}) + \beta_{i_u}(u - \bar{u}), \quad (4.92)$$

gdzie $\beta_{i_r}, \beta_{i_p}, \beta_{i_u}$ to parametry reakcji, r^o – wartość stopy procentowej w stanie stacjonarnym (naturalna stopa procentowa), $\bar{\pi}$ – stopa inflacji w stanie stacjonarnym (cel inflacyjny), \bar{u} – pożądany stopień wykorzystania mocy produkcyjnej.

W równaniu (4.92) mamy trzy czynniki wpływające na wzrost stopy procentowej: odchylenie nominalnej stopy procentowej od jej naturalnej wartości, odchylenie rzeczywistej stopy inflacji od celu inflacyjnego i odchylenie współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej od naturalnej wartości tego współczynnika. Siła wpływu tych czynników zależy od polityki pieniężnej rządu, co przekłada się na wartości parametrów reakcji tego równania: β_{i_r}, β_{i_p} oraz β_{i_u} . Ich oszacowanie dla gospodarki polskiej zostało przedstawione m.in. w pracach: Trzepla (2007), Baranowski (2014), z których wynika, że polityka pieniężna NBP charakteryzuje się bardzo małą wrażliwością na zmiany wartości luki popytowej. W równaniu (4.92) wrażliwość tę określa parametr reakcji β_{i_u} ⁶¹. Niska wrażliwość wynika m.in. z niedokładności badania związanej z trudnościami oszacowania luki popytowej. Zdecydowanie większe znaczenie w ustalaniu poziomu nominalnej stopy procentowej dla gospodarki polskiej ma utrzymanie pożądanego poziomu inflacji Trzepla (2007). Wrażliwość na odchylenia od tego poziomu opisuje parametr reakcji β_{i_p} ⁶². Wysoka wrażliwość w tym zakresie wynika w dużej mierze z charakteru polityki pieniężnej, ukierunkowanej na osiągnięcie, a następnie utrzymanie inflacji na odpowiednim poziomie. Biorąc pod uwagę wyniki badań przedstawione w pracy Trzepla (2007) w symulacjach przyjmujemy następujące wartości parametrów reakcji: $\beta_{i_p} = 0,2$ oraz $\beta_{i_u} = 0,01$. W symulacjach, podobnie jak Chiarella i in. (2005)⁶³, przyjmujemy wartość parametru reakcji $\beta_{i_r} = 0,2$ (parametr wygładzania stóp procentowych).

zbiór zmiennych niż stopa inflacji i luka produkcyjna, a do tego siła reakcji na wahania wartości tych zmiennych może zmieniać się w czasie (zob. Baranowski (2014)).

⁶¹ Wrażliwość na zmianę tej wartości wynosi to zaledwie $1,29 \text{ E} - 10$ (zob. Trzepla (2007)).

⁶² Wrażliwość na zmianę tej wartości wynosi $0,25$ (zob. Trzepla (2007)).

⁶³ W pracy Chiarella i in. (2005) dla parametrów reakcji przyjęte są wartości: $\beta_{i_r} = 1,1, \beta_{i_p} = 1,2$.

Podczas analizy polityki pieniężnej skupimy się na głównym celu NBP, jakim jest stabilność cen.⁶⁴

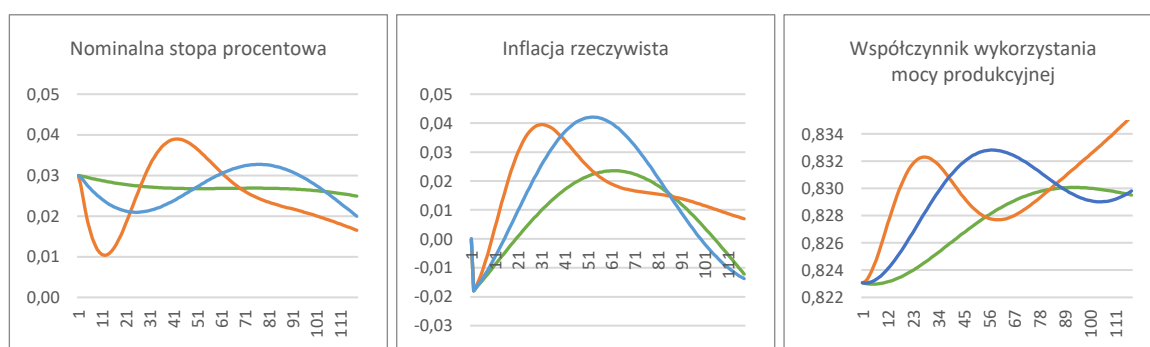
Na rysunku 4.3.3 przedstawiamy trajektorie inflacji, nominalnej stopy procentowej i współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej dla trzech zestawów wartości parametrów reakcji β_{i_r} , β_{i_p} oraz β_{i_u} . W zestawie pierwszym wszystkie wartości parametrów reakcji w równaniu przyrostu nominalnej stopy procentowej zmniejszamy pięciokrotnie względem zestawu bazowego, co odpowiada słabszej reakcji banku centralnego na sytuację w gospodarce:

Zestaw pierwszy: $\beta_{i_r} = \beta_{i_p} = 0,04$, $\beta_{i_u} = 0,002$.

W zestawie drugim wszystkie wartości parametrów zwiększamy pięciokrotnie, co odpowiada silniejszej reakcji banku centralnego na sytuację w gospodarce:

Zestaw drugi: $\beta_{i_r} = \beta_{i_p} = 1$, $\beta_{i_u} = 0,05$.

Zestaw trzeci (zestaw bazowy): $\beta_{i_r} = \beta_{i_p} = 0,2$, $\beta_{i_u} = 0,01$.



Rysunek 4.3.3. Dynamika wybranych zmiennych modelu KMGT dla różnych zestawów wartości parametrów reakcji. Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: zielone dla zestawu pierwszego (słabsza reakcja banku centralnego), niebieskie dla drugiego (reakcja silniejsza), pomarańczowe dla trzeciego (bazowy).

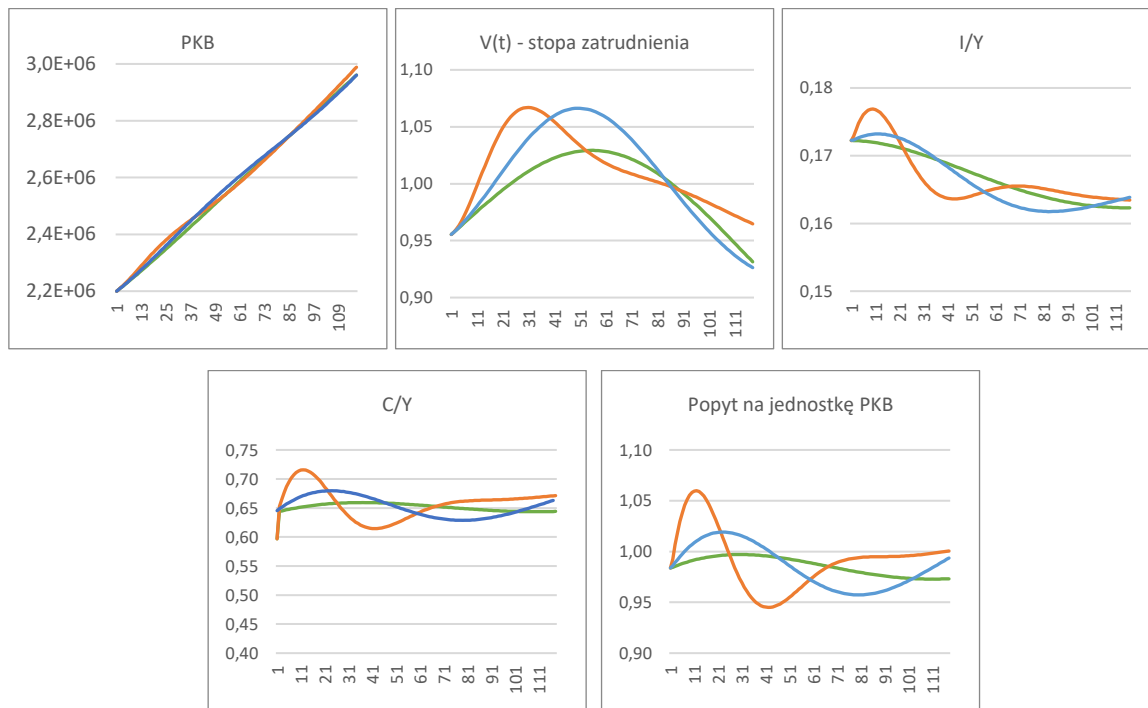
Źródło: opracowanie własne.

Z przeprowadzonych eksperymentów symulacyjnych wynika, że wzmocnienie reakcji banku centralnego (zestaw 2, wykresy pomarańczowe) powoduje większe obniżenie nominalnej stopy procentowej w sytuacji, gdy poziom inflacji jest poniżej celu inflacyjnego. Podobnie jest w sytuacji, gdy stopa inflacji jest powyżej celu. Dzięki takiej szybkiej reakcji banku centralnego stopa inflacji dużo szybciej zaczyna zmniejszać się niż w przypadku gospodarki opisanym któryś z pozostałych dwóch zestawów wartości parametrów reakcji.

⁶⁴ https://www.nbp.pl/home.aspx?f=/o_nbp/o_nbp.html .

We wszystkich trzech przypadkach luka popytowa (różnica między wartością współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej a jego wartością naturalną) cyklicznie maleje.

Na koniec przyjrzyjmy się jeszcze, jak zmiana wartości parametrów reakcji w równaniu nominalnej stopy procentowej wpływa na popyt i produkcję.



Rysunek 4.3.4. Dynamika wybranych zmiennych modelu KMGT dla różnych zestawów wartości parametrów reakcji. Wykresy przedstawiają trajektorie zmiennych: zielone dla zestawu pierwszego (słabsza reakcja banku centralnego), niebieskie dla drugiego (reakcja silniejsza), pomarańczowe dla trzeciego zestawu (zestaw bazowy).

Źródło: opracowanie własne.

Z wyników symulacji przedstawionych na Rysunku 4.3.4 wynika, że produkcja (PKB) nieznacznie reaguje na zmianę analizowanych wartości parametrów reakcji. W pierwszych okresach, gdy inflacja jest na niskim poziomie i NBP podnosi stopę procentową, wówczas w przypadku gospodarki opisanej drugim zestawem wartości parametrów reakcji (wykresy niebieskie, silniejsza reakcja NBP) popyt wyraźnie rośnie najszybciej, w porównaniu do dwóch pozostałych scenariuszy, co wynika z rosnącej konsumpcji i rosnących inwestycji. Towarzyszy temu najszybszy wzrost produkcji, który pociąga za sobą silny wzrost stopy zatrudnienia i współczynnika wykorzystania mocy produkcyjnej, co sprzyja wzrostowi inflacji. Zbyt wysoki poziom inflacji, powyżej celu inflacyjnego, prowadzi do wzrostu stopy procentowej, co negatywnie wpływa na inwestycje. Stopa zatrudnienia powoli zaczyna

zmniejszać się w wyniku wzrostu wydajności pracy, która w modelu rośnie wykładniczo, co dalej negatywnie wpływa na konsumpcję prywatną i popyt całkowity.

W przypadku gdy reakcje banku centralnego są najsilniejsze, uwidaczniają się dużo większe fluktuacje trajektorii zmiennych modelu. Trudno jednoznacznie stwierdzić, która polityka banku centralnego jest lepsza, a która gorsza. Jej ocena zależy od bardziej szczegółowych okoliczności gospodarczych. Dobrym sposobem na uzyskanie takiej oceny jest analiza polityki pieniężnej w obliczu kryzysów gospodarczych. W kolejnym podrozdziale przeprowadzamy symulację kryzysu gospodarczego i analizujemy reakcje gospodarki, uwzględniając to, jaka polityka pieniężna jest prowadzona.

4.3.4. Podsumowanie

Zaprezentowane symulacje komputerowe w ramach niniejszego podrozdziału wykazały znaczące różnice między trajektoriami modelu KMG, z egzogeniczną podażą pieniądza, a modelu KMGT, z regułą Taylora. Gospodarka opisana modelem KMGT dużo szybciej osiąga stan stacjonarny niż gospodarka opisana modelem KMG. Ponadto trajektorie zmiennych modelu KMGT w porównaniu z trajektoriami zmiennych modelu KMG mają znacznie mniejsze fluktuacje w pierwszych okresach. Oznacza to, że zastosowanie polityki pieniężnej przedstawionej w modelu KMGT pozytywnie wpływa na wzrost gospodarczy.

Ponadto z przeprowadzonych symulacji modelu KMGT wynika szybka reakcja banku centralnego na zmiany w gospodarce przejawiająca się szybszą stabilizacją cen w przypadku utrzymywania się wysokiej inflacji. Jednocześnie, szybka reakcja banku centralnego sprzyja większym fluktuacjom trajektorii zmiennych modelu w porównaniu z gospodarką, w której reakcja banku jest dużo wolniejsza. Tak więc ocena, czy szybka reakcja banku centralnego jest lepsza czy gorsza, zależy m.in. od aktualnego stanu całej gospodarki. Aby to zbadać, w kolejnym podrozdziale przeprowadzamy analizę polityki pieniężnej gospodarki opisanej modelem KMGT w obliczu kryzysu gospodarczego.

4.4. Symulacje wpływu szoków zewnętrznych na gospodarkę polską w świetle modelu KMGT

4.4.1. Charakterystyka szoków zewnętrznych

Głównym celem poniższych symulacji komputerowych jest zbadanie reakcji gospodarki opisanej modelem KMG z regułą Taylora (KMGT) na wprowadzenie krótkookresowych zewnętrznych zmian (zbadanie wpływu zewnętrznych szoków) oznaczających m.in. kryzysy gospodarcze. Zbadamy także znaczenie polityki pieniężnej w okresie powrotu gospodarki

na ścieżkę równomiernego wzrostu. Analizę ograniczamy do sprawdzenia wpływu szoków zewnętrznych na gospodarkę rozwijającą się równomiernie.

Symulacja szoków polega na wprowadzeniu do modelu KMGT modyfikacji niektórych jego równań oraz na zmianie wartości wybranych parametrów, dzięki czemu uzyskujemy sytuację odzwierciedlającą wytrącenie gospodarki ze ścieżki równomiernego wzrostu. Modyfikacja równań oraz zmiana wartości parametrów odnoszą się jedynie do kilku okresów. Zakończenie czasu oddziaływania szoku opisane jest za pomocą przywrócenia pierwotnych postaci wszystkich równań modelu oraz pierwotnych wartości wszystkich parametrów.

Wprowadzone modyfikacje równań oraz zmiany wartości parametrów modelu są próbą odzwierciedlenia kryzysu gospodarczego wywołanego przez epidemię wirusa SARS-CoV-2. Zastosowane zmiany modelu opierają się na danych o gospodarce polskiej w czasie tego kryzysu (zob. Tabela 4.4.1).

Tabela 4.4.1. Dynamika realna PKB w latach 2018-2021 (ceny stałe roku poprzedniego)

Wyszczególnienie	2018	2019	2020	2021
Spożycie ogółem w tym:	104,3	104,5	98,9	104,8
• Spożycie w sektorze gospodarstw domowych	104,3	104,0	97,0	106,2
• Spożycie publiczne w sektorze instytucji rządowych i samorządowych	103,5	106,5	104,9	100,9
Nakłady brutto na środki trwałe	109,4	106,1	91,0	108,0
Popyt krajowy	105,6	103,6	96,6	108,2
PKB	105,4	104,7	97,7	105,7

Źródło danych: GUS

Z danych przedstawionych w tabeli 4.4.1. możemy odczytać, że PKB w roku 2020 zmalał realnie w stosunku do roku 2019 około 2,5% natomiast w 2021 wzrósł realnie o 5,7% w stosunku do roku 2020. Na tej podstawie nowe równania opisujące realną wartość PKB w latach 2020 oraz 2021 będą miały postać:

$$Y(2) = Y(1) - 2,5\% \cdot Y(1) \quad (4.93)$$

$$Y(3) = Y(2) + 5,7\% \cdot Y(2) \quad (4.94)$$

Uwaga 4.6. Wartości zmiennych w latach 2018, 2019, 2020, 2021 oznaczamy $Y(0)$, $Y(1)$, $Y(2)$, $Y(3)$ odpowiednio.

Całkowity realny popyt Y^d w 2020r. w stosunku do roku 2019 zmalał realnie o 3,4%, a w 2021 wzrósł realnie w stosunku do 2020 o około 8 %, a więc:

$$Y^d(2) = Y^d(1) - 3,4\% \cdot Y^d(1), \quad (4.95)$$

$$Y^d(3) = Y^d(2) + 8\% \cdot Y^d(2). \quad (4.96)$$

Na zmianę całkowitego popytu Y^d w poszczególnych okresach miał wpływ:

- popyt inwestycyjny brutto I , który w 2020 roku był niższy o 9% w stosunku do roku 2019, a w 2021 roku w stosunku do 2020 r. był wyższy o 8%:

$$I(2) = I(1) - 9\% \cdot I(1), \quad (4.97)$$

$$I(3) = I(2) + 8\% \cdot I(2). \quad (4.98)$$

- konsumpcja sektora prywatnego C , która w 2020 była mniejsza o około 3% w stosunku do 2019 r., a w 2021 w stosunku do 2020 wzrosła o 6,2%:

$$C(2) = C(1) - 3\% \cdot C(1), \quad (4.99)$$

$$C(3) = C(2) + 6,2\% \cdot C(1). \quad (4.100)$$

- popyt sektora publicznego G , który w 2020 roku wzrósł realnie w stosunku do 2019 r. o około 5% popyt, a w 2021 w stosunku do 2020 wzrósł realnie o około 1%:

$$G(2) = G(1) + 5\% \cdot G(1), \quad (4.101)$$

$$G(3) = G(2) + 1\% \cdot G(2). \quad (4.102)$$

Z drugiej strony w symulacjach uwzględnimy zastosowanie przez rząd polski tak zwanej tarczy antykryzysowej. Miało ono na celu uchronić stan gospodarczy kraju za pomocą finansowania kosztów strat poniesionych przez społeczeństwo w czasie kryzysu gospodarczego. Jednym z działań rządu polskiego była ochrona miejsc pracy oraz wysokości wynagrodzeń. Te działania zostały ujęte w eksperymentach symulacyjnych przez założenie, że popyt na pracę oraz wzrost płac nominalnych w 2020 r. jest taki, jak w 2019 roku, czyli:

$$L^d(2) = L^d(1), \quad (4.103)$$

$$\hat{w}(2) = \frac{w(2)-w(1)}{w(1)} = 0. \quad (4.104)$$

W symulacjach zakładamy, że rząd sfinansował tarczę antykryzysową z budżetu państwa. Jeśli założymy, że wielkość tego dofinansowania była równa D (sposób oszacowania wartości D przedstawimy poniżej), to deficyt finansów publicznych w roku 2020 opisuje równanie:

$$\frac{\Delta B(2)}{p(2)} = \frac{B(2)-B(1)}{p(2)} = G(2) + \frac{r(2)B(2)}{p(2)} + TR(2) + D - T(2). \quad (4.105)$$

Pokażemy teraz sposób obliczenia wysokości dofinansowania rządu D . Przy założeniu, że dofinansowanie D było przeznaczone jedynie na dopłaty do wynagrodzeń, wysokość tego dofinansowania będzie równa różnicy między kosztami pracy poniesionymi przez pracodawcę przy zatrudnieniu w 2020 r., które, jak zakładaliśmy wcześniej, jest takie same jak w roku 2019 ($L^d(2) = L^d(1)$), a kosztami pracy przy zatrudnieniu $Y(2)$ potrzebnym do zrealizowania produkcji w 2020 r. :

$$D = L^d(2)\omega(1) - \tilde{L}^d\omega(1), \quad (4.106)$$

gdzie \tilde{L}^d to (teoretyczny) popyt na pracę obliczony dla produkcji $Y(2)$ w 2020 roku. Korzystając z definicji popytu na pracę, otrzymujemy popyt \tilde{L}^d równy:

$$\tilde{L}^d = \frac{Y(2)}{x(2)}. \quad (4.107)$$

A więc koszt pracy (nie licząc składki na ubezpieczenie społeczne) przy popycie \tilde{L}^d jest równy:

$$\tilde{L}^d\omega(1) = \frac{Y(2)}{x(2)}\omega(1). \quad (4.108)$$

Natomiast koszt pracy przy założeniu, że $L^d(2) = L^d(1)$, wynosi:

$$L^d(1)\omega(1) = \frac{Y(1)}{x(2)}\omega(1). \quad (4.109)$$

Wykorzystując powyższe równania, uzyskujemy wysokość dofinansowania rządu D równą:

$$D = L^d(1)\omega(1) - L^d(2)\omega(1) = \frac{Y(1)}{x(2)}\omega(1) - \frac{Y(2)}{x(2)}\omega(1). \quad (4.110)$$

Po przekształceniu otrzymujemy:

$$D = \frac{\omega(1)}{x(2)}(Y(1) - Y(2)). \quad (4.111)$$

gdzie

$$Y(2) = Y(1) - 2,5\% \cdot Y(1). \quad (4.112)$$

A więc ostatecznie otrzymujemy:

$$D = 2,5\% \cdot Y(1) \frac{\omega(1)}{x(2)}. \quad (4.113)$$

Dodatkowo, w roku 2020 wydajność pracy w gospodarce polskiej (według Eurostatu) zmniejszyła się względem roku 2019 o 2,5% co także uwzględniamy w naszych symulacjach przez wprowadzenie równania:

$$x(2) = x(1) - 2,5\% \cdot x(1). \quad (4.114)$$

W 2020 roku NBP obniżył trzykrotnie stopę referencyjną o 0,5pp, 0,5pp i o 0,4pp. A w 2021 roku podwyższył trzykrotnie tę stopę o 0,4pp, 0,75pp i o 0,5pp. W symulacjach działania NBP przedstawiamy za pomocą równań:

$$r(2) = r(1) - 0,014 \quad (4.115)$$

oraz

$$r(3) = r(2) + 0,0165. \quad (4.116)$$

Poniższe zestawienie podsumowuje wszystkie równania modelu, po zmianach wprowadzonych na potrzeby symulacji kryzysu gospodarczego.

Tabela 4.4.2. Równania modelu KMG z regułą Taylora w czasie i po kryzysie gospodarczym

DETERMINANTY POPYTU		
Lp.	Nazwa zmiennej	Równanie
1.	Popyt na produkt	$Y^d(t) = C(t) + I(t) + G(t)$ $Y^d(2) = Y^d(1) - 3,4\% \cdot Y^d(1)$ $Y^d(3) = Y^d(2) + 8\% \cdot Y^d(2)$
2.	Konsumpcja sektora prywatnego	$C(t) = (1 - \tau + \alpha_1)\omega(t)L^d(t)$ $C(2) = C(1) - 3\%C(1)$ $C(3) = C(2) + 6,2\%C(2)$
3.	Popyt na pracę	$L^d(t) = \frac{Y(t)}{x(t)}$ $L^d(2) = L^d(1)$
4.	Stopa wzrostu wydajności pracy	$x(t+1) = x(t) + nx(t)$ $x(2) = x(1) - 2,5\%x(1)$
5.	Stopa wzrostu płacy realnej	$\hat{w}(t) = \hat{w}(t) - \hat{p}(t)$
6.	Stopa wzrostu płac nominalnych	$\frac{w(t+1)-w(t)}{w(t)} = \beta_w(V(t) - \bar{V}) + \kappa_w\hat{p}(t) + (1 - \kappa_w)\pi^e(t) + n$ $\hat{w}(2) = \frac{w(2)-w(1)}{w(1)} = 0$
7.	Stopa wzrostu cen	$\hat{p}(t+1) = \frac{p(t+1) - p(t)}{p(t)} =$ $= \beta_p(u(t) - \bar{u}) + \kappa_p(\hat{w}(t) - n) + (1 - \kappa_p)\pi^e$
8.	Oczekiwany przyrost inflacji	$\dot{\pi}^e = \beta_{\pi^e}(\alpha\hat{p} + (1 - \alpha)(\mu - n) - \pi^e)$ $\pi^e(t+1) - \pi^e(t) = \beta_{\pi^e}(\alpha\hat{p}(t) + (1 - \alpha)(\mu + 0,025) - \pi^e(t))$
9.	Stopa zatrudnienia	$V(t) = \frac{L^d(t)}{L}$
10.	Wskaźnik wykorzystania potencjału produkcyjnego	$u(t) = \frac{Y(t)}{Y^p}$

11.	Produkcja potencjalna	$Y^p(t) = y^p K(t)$
12.	Przyrost kapitału rzeczonego	$\Delta K(t+1) =$ $= i_1 \left((1 - \alpha_2) \rho^e(t) - \xi - (r(t) - \pi^e(t)) \right) K(t) +$ $+ i_2 (u(t) - \bar{u}) K(t) + \hat{Y}^e(t) K(t) - \delta K(t)$
13.	Oczekiwana realna stopa zysku z kapitału Rzeczywista realna stopa zysku z kapitału	$\rho^e(t) = \frac{Y^e(t) - \omega(t)L^d(t) - \delta K(t)}{K(t)}$ $\rho(t) = \frac{Y^d(t) - \omega(t)L^d(t) - \delta K(t)}{K(t)}$
14.	Oczekiwana stopa wzrostu popytu	$\hat{Y}^e(t) = \frac{\Delta Y^e(t)}{Y^e(t)} = \hat{\omega}(t) + \beta_{y^e} \frac{Y^d(t) - Y^e(t)}{Y^e(t)}$ gdzie $\hat{\omega}(t) = \hat{\omega}(t) - \hat{p}(t)$, $\Delta Y^e(t) = Y^e(t) - Y^e(t-1)$
15.	Popyt inwestycyjny	$I(t+1) = K(t+1) - K(t) + \delta K(t)$ $I(2) = I(1) - 12\% I(1)$, $I(3) = I(2) + 8\% I(2)$.
PRODUKCJA I ZAPASY		
16.	Produkcja	$Y(t) = Y^e(t) + Z(t)$ $Y(2) = Y(1) - 2,5\% \cdot Y(1)$ $Y(3) = Y(2) + 5,7\% \cdot Y(2)$
17.	Produkcja przeznaczona na zapasy	$Z(t) = \beta_z \Delta Y^e(t) + \beta_n (N^d(t) - N(t))$ $\Delta Y^e(t) = Y^e(t) - Y^e(t-1)$
18.	Pożądanee zapasy	$N^d(t) = \beta_{N^d} Y^e(t)$
19.	Zmiana zapasów	$N(t+1) - N(t) = Y(t) - Y^d(t)$
Reguła Taylora		
20.	Przyrost nominalnej stopy procentowej	$r(t+1) = r(t) - \beta_{i_r} (r(t) - r^o) + \beta_{i_p} (\hat{p}(t+1) - \bar{\pi})$ $+ \beta_{i_u} (u(t) - \bar{u})$ $r(2) = r(1) - 0,014$ $r(3) = r(2) + 0,0165$
BUDŻET PAŃSTWA		
21.	Podatki	$T(t) = \tau \omega(t)L^d(t) +$ $+ \tau_c \left(\alpha_4 Y^d(t) - (1 + \tau_1) \omega(t)L^d(t) - \delta K(t) + \alpha_3 \frac{r(t)B(t)}{p(t)} \right)$ gdzie $\tau = \tau_w + \tau_2$, $\alpha_4 = \left(1 - \alpha_2 + \frac{\alpha_2}{\tau_c} \right)$.
22.	Popyt sektora rządowego	$G(t) = gK(t)$ $G(2) = G(1) + 5\% G(1) = 1,05gK(1)$ $G(3) = G(2) + 1\% G(2) = 1,0605gK(1)$
23.	Deficyt finansów publicznych	$\Delta B(t) = B(t) - B(t-1) = p(t)G(t) + r(t)B(t) - p(t)T(t)$ $\Delta B(2) = B(2) - B(1) =$ $= p(2)G(2) + r(2)B(2) - p(2)T(2) + p(2)TR + p(2)D$

		gdzie	
			$D = \frac{2,5\%Y(1)\omega(1)}{97,5\%x(1)} \quad \text{oraz} \quad TR = \alpha_2\omega(2)L^d(2)$

Źródło: opracowanie własne.

4.4.2. Procedury obliczeniowe

Ekspertyzmy symulacyjne zaczynamy od założenia, że stanem początkowym jest stan gospodarki z roku 2018, czyli $t = 0$ oznacza rok 2018. Ponadto zakładamy, że analizowana gospodarka od 2018 roku do 2020 roku znajduje się na ścieżce równomiernego wzrostu. Oznacza to, że wartości zmiennych absolutnych tj. produkcja, konsumpcja, kapitał trwały itd. od 2018 do 2020 roku rosną z tą samą stopą wzrostu równą n . Zaburzenia (szoki zewnętrzne) odzwierciedlone w zmianie niektórych równań modelu wprowadzamy od roku 2020 do 2021 roku włącznie. Po tym czasie dla wszystkich równań modelu przyjmujemy ponownie ich pierwotne postacie.

Sposób przeprowadzenia symulacji modelu KMGT wygląda bardzo podobnie jak dotychczas. Punktem odniesienia jest tzw. scenariusz bazowy, odpowiadający bazowemu zestawowi wartości parametrów i początkowych wartości zmiennych. Wartości parametrów oraz początkowe wartości zmiennych obliczamy na podstawie danych o gospodarce polskiej za rok 2018 (tabela 4.1.1), zakładając, że gospodarka znajduje się na ścieżce równomiernego wzrostu. W symulacjach przyjmujemy, że funkcjonowanie gospodarki opisuje zmodyfikowany model KMGT, którego równania przedstawione są w tabeli 4.4.2. W symulacjach wykorzystamy fakt, że równania modelu KMGT z tabeli 4.4.2 można przedstawić w prostszej, równoważnej postaci intensywnej.

W eksperymencie symulacyjnych uwidacznia się problem polegający na tym, że modele omawiane w niniejszej pracy, w tym model KMG z regułą Taylora, są, podczas gdy dane o gospodarce polskiej, tak jak w przypadku jakiegokolwiek gospodarki, są dyskretne. Problem ten rozwiązujemy analogicznie jak w poprzednich symulacjach stosując metodę Eulera z krokiem $h = 1/12$. Dodatkowo musimy zwrócić uwagę na dane o gospodarce polskiej w czasie kryzysu gospodarczego. Dane te odnoszą się do roku poprzedniego. Natomiast stosując metodę Eulera z krokiem $h = 1/12$ równania modelu w postaci intensywnej odnoszą się do ubiegłego miesiąca.

Dyskretna postać intensywna modelu KMGT

Od 2018 do 2020 roku gospodarka znajduje się w stanie stacjonarnym. Oznacza to, że wartości zmiennych modelu intensywnego w tych latach nie zmieniają się. Następnie, od

roku 2020, następuje kryzys gospodarczy, który trwa dwa kolejne lata. Funkcjonowanie gospodarki w pierwszym roku kryzysu opisują równania modelu intensywnego:

$$U(t+h) = U(t) + h \cdot \kappa(-n_1) \quad (4.117)$$

$$l(t+h) = l(t) + h \cdot \left(n_1 - 0,88 \frac{(n-\hat{l}(2))K(1)}{K(t)} \right) \quad (4.118)$$

$$\pi^e(t+h) = \pi^e(t) + h \cdot \beta_{\pi^e}(\alpha \hat{p}(t+h) + (1-\alpha)\bar{\pi} - \pi^e(t)) \quad (4.119)$$

$$y^e(t+h) = y^e(t) + h \cdot y^e(t) \left(\hat{U}(t+h) + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right) + \hat{l}(t+h) \right) \quad (4.120)$$

$$v(t+h) = v(t) + h \cdot \left(y(t) - y^d(t) - v(t) (n_1 - \hat{l}(t+h)) \right) \quad (4.121)$$

$$b(t+h) = b(t) + h \cdot \left(\begin{aligned} &g + r(t)b(t) - \tau_c(\rho + \alpha_3 r(t)b(t)) - (\tau - \alpha_1)U(t)y(t) - \\ &- b(t) (n - \hat{l}(t+h) + \hat{p}(t+h)) \end{aligned} \right) \quad (4.122)$$

$$r(t+h) = r(t) - h \cdot (0,014) \quad (4.123)$$

$$y^d(t) = \frac{0,966y^d(1)K(1)}{K(t)} \quad (4.124)$$

$$y(t) = \frac{0,975y(1)K(1)}{K(t)} \quad (4.125)$$

$$V(t) = V(t-1) \quad (4.126)$$

gdzie n_1 to stopa wzrostu wydajności pracy w czasie kryzysu równa $-2,5\%$.

Gospodarka w drugim roku kryzysu opisana jest za pomocą następujących równań modelu intensywnego:

$$U(t+h) = U(t) + h \cdot \kappa \left(\beta_w(1 - \kappa_p)(V(t) - \bar{V}) - \beta_p(1 - \kappa_w)(u(t) - \bar{u}) \right) U(t) \quad (4.127)$$

$$l(t+1) = l(t) + h \cdot \left(n_1 - 1,08 \frac{(n-\hat{l}(3))K(2)}{K(t)} \right) \quad (4.128)$$

$$\pi^e(t+h) = \pi^e(t) + h \cdot \beta_{\pi^e}(\alpha \hat{p}(t+1) + (1-\alpha)\bar{\pi} - \pi^e(t)) \quad (4.129)$$

$$y^e(t+h) = y^e(t) + h \cdot y^e(t) \left(\hat{U}(t+1) + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right) + \hat{l}(t+h) \right) \quad (4.130)$$

$$v(t+h) = v(t) + h \cdot \left(y(t) - y^d(t) - v(t) (n - \hat{l}(t+h)) \right) \quad (4.131)$$

$$b(t+h) = b(t) + h \cdot \left(\begin{aligned} &g + r(t)b(t) - \tau_c(\rho + \alpha_3 r(t)b(t)) - (\tau - \alpha_1)U(t)y(t) - \\ &- b(t) (n - \hat{l}(t+h) + \hat{p}(t+h)) \end{aligned} \right) \quad (4.132)$$

$$r(t+h) = r(t) + h \cdot 0,0165 \quad (4.133)$$

$$y^d(t) = \frac{1,08y^d(2)K(2)}{K(t)} \quad (4.134)$$

$$y(t) = \frac{1,057y(2)K(2)}{K(t)} \quad (4.135)$$

$$V(t) = V(t-1) \quad (4.136)$$

Z założenia po dwóch latach kryzysu szoki zewnętrzne przestają oddziaływać, co odzwierciedlone jest w modelu KMG T przywróceniem jego równań do oryginalnej postaci:

$$U(t+h) = U(t) + h \cdot \kappa \left(\beta_w(1-\kappa_p)(V(t) - \bar{V}) - \beta_p(1-\kappa_w)(u(t) - \bar{u}) \right) U(t) \quad (4.137)$$

$$l(t+h) = l(t) + h \cdot \left(\begin{array}{c} -\hat{U}(t+h) - \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right) - \\ -i_1(\rho^e(t) - \xi - (r(t) - \pi^e(t))) - i_2(u(t) - \bar{u}) \end{array} \right) l(t) \quad (4.138)$$

$$\pi^e(t+h) = \pi^e(t) + h \cdot \beta_{\pi^e}(\alpha \hat{p}(t+h) + (1-\alpha)\bar{\pi} - \pi^e(t)) \quad (4.139)$$

$$y^e(t+h) = y^e(t) + h \cdot y^e(t) \left(\hat{U}(t+1) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right) - n + \hat{l}(t+h) \right) \quad (4.140)$$

$$v(t+h) = v(t) + h \cdot \left(y(t) - y^d(t) - v(t) \left(n - \hat{l}(t+h) \right) \right) \quad (4.141)$$

$$b(t+h) = b(t) + h \cdot \left(\begin{array}{c} g + r(t)b(t) - \tau_c(\rho + \alpha_3 r(t)b(t)) - (\tau - \alpha_1)U(t)y(t) - \\ -b(t) \left(n - \hat{l}(t+h) + \hat{p}(t+h) \right) \end{array} \right) \quad (4.142)$$

$$r(t+h) = r(t) + h \cdot \left(-\beta_{i_r}(r(t) - r^o) + \beta_{i_p}(\hat{p}(t+h) - \bar{\pi}) + \beta_{i_u}(u(t) - \bar{u}) \right) \quad (4.143)$$

gdzie

$$\kappa = \frac{1}{1-\kappa_w\kappa_p} = \text{const.}, \quad \hat{p}(t+h) = \left(\kappa \left(\kappa_p\beta_w(V(t) - \bar{V}) + \beta_p(u(t) - \bar{u}) \right) + \pi^e \right),$$

$$V(t) = \frac{y(t)}{l(t)}, \quad u = \frac{y(t)}{y^p}, \quad \rho^e = (1-\alpha_2)y^e(t) - (1+\tau_1)U(t)y(t) - \delta,$$

$$\alpha_4 = \left(1 - \alpha_2 + \frac{\alpha_2}{\tau_c} \right) = \text{const.}, \quad \rho = (1-\alpha_2)y^d(t) - (1+\tau_1)U(t)y(t) - \delta$$

oraz

$$y^d(t) = (1 + \alpha_1 - \tau)y(t)U(t) + i_1 \left(\rho^e(t) - \xi - (r(t) - \pi^e(t)) \right) + i_2(u(t) - \bar{u}) + \delta + g + \\ + \kappa \left(\beta_w(1-\kappa_p)(V(t) - \bar{V}) - \beta_p(1-\kappa_w)(u(t) - \bar{u}) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right)$$

$$y(t) = y^e(t) + \beta_n\beta_{N^d}y^e(t) - \beta_nv(t) + y^e\beta_z \left(\kappa \left(\beta_w(1-\kappa_p)(V(t) - \bar{V}) - \beta_p(1-\kappa_w)(u(t) - \bar{u}) \right) + n + \beta_{y^e} \left(\frac{y^d(t)}{y^e(t)} - 1 \right) \right)$$

Podobnie jak w poprzednich symulacjach komputerowych do rozpoczęcia analizy potrzebny jest stan początkowy, który wyznaczamy analogicznie jak w punkcie 4.3.1, wykorzystując dane o gospodarce polskiej za rok 2018.

Tabela 4.4.3. Wartości zmiennych w stanie początkowym modelu KMGT

Nazwa zmiennej	Wzór zmiennej	Wartość zmiennej w stanie początkowym
Udział płac w PKB	$U(0) = \frac{\omega(0)L(0)}{Y(0)}$	$U(0) = \bar{U} = 0,48$
Pracochłonność pełnego zatrudnienia	$l(0) = \frac{x(0)L(0)}{K(0)}$	$l(0) = \bar{l} = 0,56$
Oczekiwana inflacja	$\pi^e(0)$	$\pi^e(0) = \bar{\pi} = 0$
Oczekiwana sprzedaż na jednostkę kapitału	$y^e(0) = \frac{Y^e(0)}{K(0)} = \frac{Y^d(0)}{K(0)}$	$y^e(0) = \bar{y}^e = 0,52$
Wielkość zapasów na jednostkę kapitału	$v(0) = \frac{N(0)}{K(0)}$	$v(0) = \bar{v} = 0,05$
Stosunek podaży obligacji do wielkości kapitału	$b(0) = \frac{B(0)}{p(0)K(0)}$	$b(0) = \bar{b} = 0,26$
Konsumpcja sektora prywatnego na jednostkę kapitału	$c(0) = \frac{C(0)}{K(0)}$	$c(0) = \bar{c} = 0,26$
Produkcja na jednostkę kapitału	$y(0) = \frac{Y(0)}{K(0)}$	$y(0) = \bar{y} = 0,53$
Popyt na jednostkę kapitału	$y^d(0) = \frac{Y^d(0)}{K(0)}$	$y^d(0) = \bar{y}^d = 0,52$

Źródło: opracowanie własne.

W kolejnym kroku wyznaczamy wartości parametrów modelu. W tym celu korzystamy z założenia, że gospodarka opisana modelem KMGT znajduje się na ścieżce równomiernego wzrostu, czyli stan początkowy jest jednocześnie stanem stacjonarnym.

Aby stan początkowy był jednocześnie stanem stacjonarnym, musimy dobrać odpowiednie wartości parametrów modelu, to znaczy spełniające układ równań:

$$\bar{U} = \frac{\bar{c}}{(1+\alpha_1-\tau)\bar{y}} \quad (4.144)$$

$$\bar{l} = \frac{\bar{u}y^p}{\bar{v}} \quad (4.145)$$

$$\bar{y}^e = \bar{y}^d = \gamma\bar{u}y^p \quad (4.146)$$

$$u = \bar{u} \quad (4.147)$$

$$\bar{\pi} = \mu - n \quad (4.148)$$

$$\bar{v} = (1 - \gamma) \frac{\bar{u}y^p}{n} = \frac{\bar{y} - \bar{y}^d}{n} \quad (4.149)$$

$$\bar{b} = \frac{g - \tau_c(\alpha_4\bar{y}^d - (1+\tau_1)\bar{U}\bar{y} - \delta) - (\tau - \alpha_1)\bar{U}\bar{y}}{\alpha_3\tau_c\bar{r} - \bar{r} + \mu} \quad (4.150)$$

$$\bar{\rho}^e = \bar{\rho} = (1 - \alpha_2)\bar{y}^d - (1 + \tau_1)\bar{U}\bar{y} - \delta \quad (4.151)$$

$$\bar{r} = \bar{\rho} + \bar{\pi} - \xi. \quad (4.152)$$

$$\bar{c} = \bar{y}^d - (n + \delta + g). \quad (4.153)$$

$$V = \bar{V}, \quad (4.154)$$

$$\bar{y} = \bar{u}y^p, \quad y^p = \text{const.}, \quad (4.155)$$

gdzie $\gamma = \frac{n+\beta_n}{n+\beta_Z n^2 + \beta_n \beta_N d n + \beta_n}$.

Do równań (4.144)-(4.155) podstawiamy wartości zmiennych w stanie początkowym, korzystając z tabeli 4.1.5., a zatem wartości, które stosowaliśmy w poprzednich eksperymentach symulacyjnych.

Po podstawieniu danych do równania (4.144) mamy:

$$0,48 = \frac{0,3}{(1+\alpha_1-\tau)\cdot 0,52}. \quad (4.156)$$

A więc $(1 + \alpha_1 - \tau) = 1,2$, czyli parametry α_1, τ muszą spełniać równanie:

$$\alpha_1 - \tau = 0,2. \quad (4.157)$$

Korzystając z wyznaczonej wcześniej w podrozdziale 4.1.3 wartości parametru $\alpha_1=0,42$, z (4.157) możemy wyznaczyć stawkę podatkową τ :

$$\tau = 0,22. \quad (4.158)$$

Z równania $\bar{y}^d = \gamma\bar{y}$, w którym znamy wartości \bar{y}^d, \bar{y} (tabela 4.1.2), wyznaczamy wartość parametru γ :

$$\gamma = \frac{\bar{y}^d}{\bar{y}} = 0,9811, \quad (4.159)$$

gdzie $\gamma = \frac{n+\beta_n}{n+\beta_Z n^2 + \beta_n \beta_N d n + \beta_n}$.

Znając wartości zmiennych: $\bar{r}, \bar{\rho}, \bar{\pi}, \bar{m}, \bar{y}^e$ oraz wartości parametrów: $n = 0,03$,

$g = \frac{G}{K} = 0,9$ (zob. tabela 4.1.4), wyznaczamy kolejno:

z równania (4.153) $\bar{c} = \bar{y}^d - n - \delta - g$ wartość parametru δ :

$$\delta = \bar{y}^d - n - \bar{c} - g = 0,1. \quad (4.160)$$

z równania (4.152) $\bar{r} = \bar{\rho} + \bar{\pi} - \xi$ wartość parametru ξ :

$$\xi = \bar{\rho} + \bar{\pi} - \bar{r} = 0,11 \quad (4.161)$$

gdzie $\bar{\rho} = \bar{y}^d - \bar{U}\bar{y} - \delta$.

Znając wartość aktualnej inflacji w stanie stacjonarnym $\bar{\pi}$ oraz stopę wzrostu wydajności pracy n z równania $\bar{\pi} = \mu - n$, możemy wyznaczyć wartość stopy wzrostu podaży pieniądza μ :

$$\mu = \bar{\pi} + n = 0,05. \quad (4.162)$$

Jeśli założymy, że wartości parametrów \bar{u} , \bar{V} są takie jak w poprzednich symulacjach (zob. tabela 4.1.4), to wartość parametru y^p otrzymujemy z równania $\bar{y} = \bar{u}y^p$:

$$y^p = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = 0,65. \quad (4.163)$$

Jednym z mankamentów kalibracji parametrów modelu w omawianej w tym punkcie symulacji jest wartości zmiennej v (stosunek zapasów do kapitału trwałego). Licząc wartość tej zmiennej na podstawie jej definicji tzn. $v(0) = N(0)/K(0)$, gdzie $N(0)$ to poziom zapasów w 2018 roku, a $K(0)$ to wartość kapitału trwałego w 2018 roku, otrzymujemy $v(0) = 0,05$ (zob. tabela 4.1.1, dane GUS za rok 2018). Z drugiej strony, jeśli podstawimy wartości zmiennych do równania zmiennej v w stanie stacjonarnym $\bar{v} = (1 - \gamma) \frac{\bar{u}y^p}{n} = \frac{\bar{y} - \bar{y}^d}{n}$, to otrzymujemy $\bar{v} = 0,3$. Zakładając, że wartości zmiennych w stanie początkowym są równe wartościom tych zmiennych w stanie stacjonarnym ($v(0) = \bar{v}$), otrzymujemy sprzeczność. Ta sprzeczność może sugerować, że gospodarka opisana za pomocą modelu KMGT nie znajduje się na ścieżce równomiernego wzrostu.⁶⁵

Rozwiązaniem tego problemu, to znaczy doбором takich wartości odpowiednich parametrów, aby gospodarka znajdowała się na początku analizowanego okresu na ścieżce równomiernego wzrostu jest, albo przyjęcie odpowiedniej wielkości n (stopa wzrostu wydajności pracy), aby spełnione było równie $v(0) = \frac{\bar{y} - \bar{y}^d}{n}$, albo wyznaczenie wielkości $N(0)$ ze wzoru:

$$N(0) = \bar{v} \cdot K(0). \quad (4.164)$$

gdzie $\bar{v} = \frac{\bar{y} - \bar{y}^d}{n} = 0,3$.

Jeśli wybierzemy pierwsze rozwiązanie, to $n = 0,2$, co oznacza, że gospodarka rośnie ze stopą wzrostu równą 0,2. W przypadku wyboru drugiego rozwiązania otrzymujemy $N(0) = 0,3 \cdot K(0)$, co oznacza, że poziom zapasów w stanie początkowym stanowi 30% kapitału trwałego (około 60% PKB). Oba rozwiązania są odległe od rzeczywistości. Z danych

⁶⁵ Z danych oraz z równań modelu wynika, że gospodarka polska w 2018 r. nie była na ścieżce równomiernego wzrostu, jednak dla potrzeb analizy wpływu szoków zewnętrznych dokonujemy takiej korekty wartości niektórych parametrów, aby tę ścieżkę równomiernego wzrostu mieć dla gospodarki na początku analizowanego okresu.

GUS wynika, że zapasy stanowią około 10% PKB, a stopa wzrostu np. PKB w 2018 roku była równa około 5%.

Pierwsze rozwiązanie wpłynie na wartości innych wcześniej wyliczonych parametrów modelu np. na stopę wzrostu podaży pieniądza (dla $n = 0,2$ stopa wzrostu podaży pieniądza byłaby ujemna). Drugie rozwiązanie wpłynie jedynie na wartości trzech parametrów reakcji: β_{Nd} , β_n oraz β_Z . Drugie rozwiązanie jest więc lepsze i dlatego wybieramy je do dalszych obliczeń i symulacji komputerowych.

Wartość parametru reakcji β_{Nd} wyznaczmy, korzystając z równania modelu $N(0) = \beta_{Nd}Y^e(0)$:

$$\beta_{Nd} = \frac{N(0)}{Y^e(0)} = \frac{v \cdot K(0)}{Y^e(0)} = \frac{\bar{v}}{y^e(0)} = 0,64 . \quad (4.165)$$

Natomiast wartości parametrów reakcji β_n , β_Z są rozwiązaniem równania:

$$\gamma = \frac{n + \beta_n}{n + \beta_Z n^2 + \beta_n \beta_{Nd} n + \beta_n} , \quad (4.166)$$

w którym znamy wielkości γ , n oraz β_{Nd} . Rozwiązanie równania, które jest parą liczb (β_n, β_Z) , ustaliliśmy za pomocą Solvera.

Ostatnim krokiem jest wyznaczanie wysokości stawki podatkowej τ_c . Stawkę tę obliczamy za pomocą równania:

$$\bar{b} = \frac{g - \tau_c(\alpha_4 \bar{y}^d - (1 + \tau_1)\bar{U}\bar{y} - \delta) - (\tau - \alpha_1)\bar{U}\bar{y}}{\alpha_3 \tau_c \bar{r} - \bar{r} + \mu} , \quad (4.167)$$

gdzie $\bar{b}, g, \tau, \tau_1, n, \delta, \xi, \beta_{Nd}, \bar{U}, \alpha_4$ oraz α_3 znamy.

Na podstawie równania (4.167) ustalamy:

$$\tau_c = 0,82. \quad (4.168)$$

Wartość stawki podatkowej τ_c jest bardzo duża, co razem z wartością zmiennej określającej poziom zapasów w stanie początkowym potwierdza, że gospodarka polska w 2018 roku nie znajdowała się na wynikającej z równań modelu KMGT ścieżce równomiernego wzrostu.

Ostatecznie otrzymujemy zestaw wartości parametrów:

Tabela 4.4.4. Wartości parametrów modelu KMGT w symulacjach szoków zewnętrznych

Parametr	wartość	Parametr	wartość
κ_w	0,30	α_1	0,42
κ_p	0,80	τ_p	0,07
β_n	0,10	α_3	0,73
β_{π^e}	0,10	α_4	1,02
β_{Nd}	0,64	τ_1	0,07
β_Z	0,64	δ	0,09
β_p	0,60	g	0,10

β_{ye}	0,05	ξ	0,11
β_w	0,40	r^o	0,030
i_1	2,00	τ_c	0,82
i_2	0,10	τ	0,24
y^p	0,65	n	0,03
\bar{u}	0,81	μ	0,05
\bar{v}	0,94		

Źródło: obliczenia własne.

4.4.3. Analiza wpływu szoków zewnętrznych

W podrozdziale tym przedstawiamy analizę empiryczną wpływu szoków zewnętrznych na funkcjonowanie gospodarki znajdującej się na ścieżce równomiernego wzrostu w oparciu o zaprezentowany w podrozdziale 4.4.2 zmodyfikowany model KMGT. Analizę przeprowadzamy, przyjmując trzy różne zestawy wartości parametrów reakcji (Tabela 4.4.5) odpowiadające trzem scenariuszom polityki pieniężnej. Parametry te występują w równaniu dynamiki nominalnej stopy procentowej:

$$\dot{r} = -\beta_{i_r}(r - r^o) + \beta_{i_p}(\hat{p} - \bar{\pi}) + \beta_{i_u}(u - \bar{u}), \quad (4.169)$$

Tabela 4.4.5. Zestawy wartości parametrów reakcji równania dynamiki nominalnej stopy procentowej (4.169)

	Zestaw 1	Zestaw 2	Zestaw 3
β_{i_r}	0,04	1	0,2
β_{i_p}	0,04	1	0,2
β_{i_u}	0,002	0,05	0,01

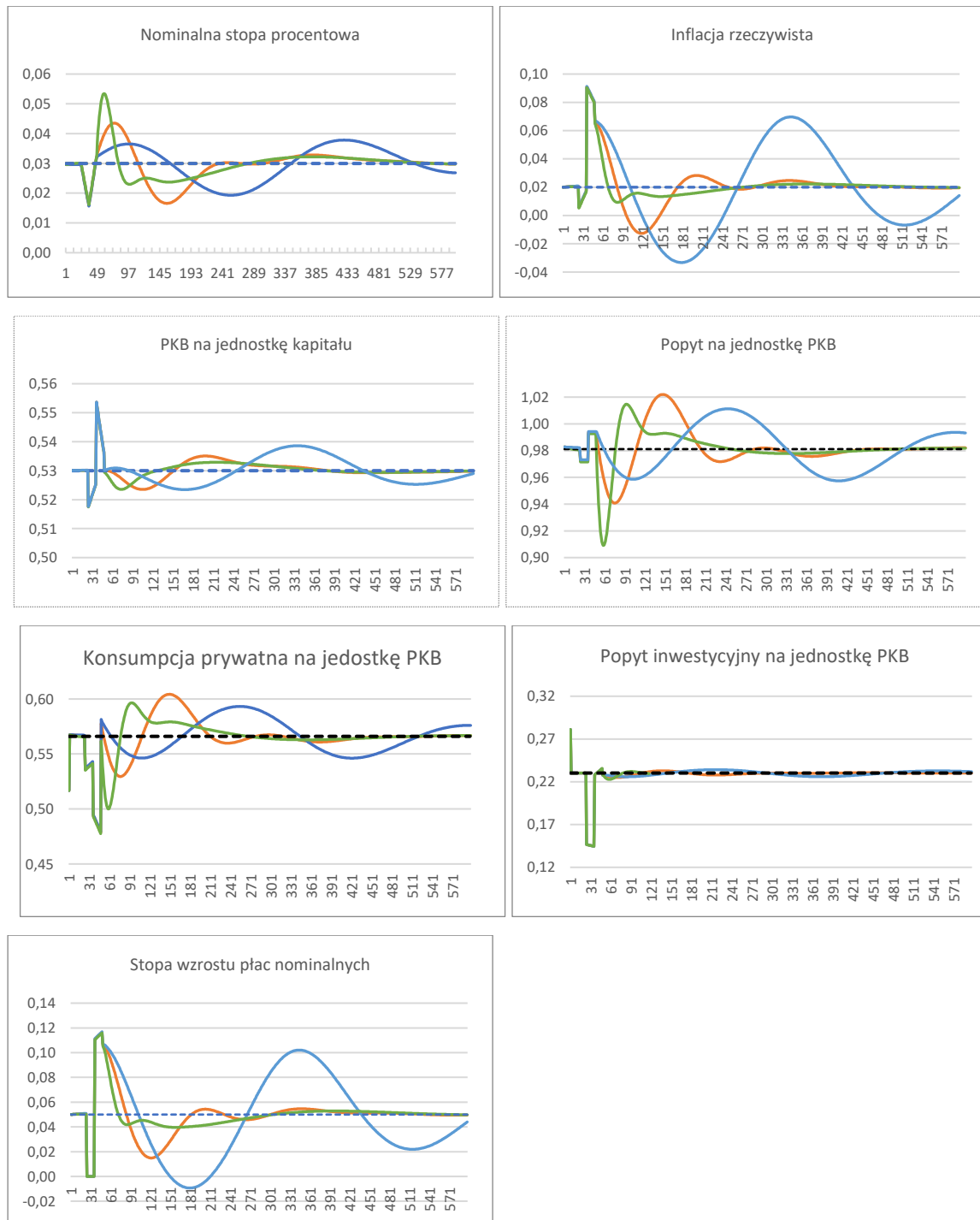
Źródło: opracowanie własne.

Równanie (4.169) oraz zestawy wartości parametrów reakcji (Tabela 4.4.5) dokładnie omówiliśmy w podrozdziale 4.3.3. Zestawy wartości parametrów 1, 2 oraz 3 reprezentują trzy scenariusze polityki pieniężnej⁶⁶, w której bank centralny z różną siłą reaguje na odchylenia od założonych przez siebie celów. Zestaw 3 jest zestawem podstawowym. Zestaw 1 ma wszystkie parametry reakcji pięciokrotnie mniejsze od zestawu 3, a zestaw 2 pięciokrotnie większe. A więc najłagodniejsze reakcje banku centralnego opisane są zestawem 1, a najsilniejsze zestawem 2. Wartości pozostałych parametrów oraz wartości początkowe zmiennych modelu w postaci intensywnej przyjęliśmy takie jak w tabelach (4.4.3.)-(4.4.4.) i są jednakowe pomiędzy trzema scenariuszami polityki pieniężnej.

Przed rozpoczęciem analizy wyników symulacji należy wspomnieć, że na wszystkich wykresach czas, przedstawiony na osi odciętych, jest mierzony w miesiącach (np. $t = 120$

⁶⁶ Gospodarka jest ta sama w każdym scenariuszu, co więcej charakteryzuje się podobnymi cechami. Różnią się reakcje banku centralnego, które następnie przekładają się na reakcję gospodarki.

oznacza 120 miesięcy, czyli 10 lat). Na rysunkach 4.4.1-4.4.2 przedstawiamy wykresy wybranych zmiennych modelu dla zestawów wartości parametrów reakcji 1, 2 oraz 3 z tabeli 4.4.5. Na każdym z rysunków linią przerywaną zaznaczyliśmy ścieżkę równomiernego wzrostu, na której byłaby trajektoria prezentowanej zmiennej, gdyby nie nastąpił kryzys gospodarczy.

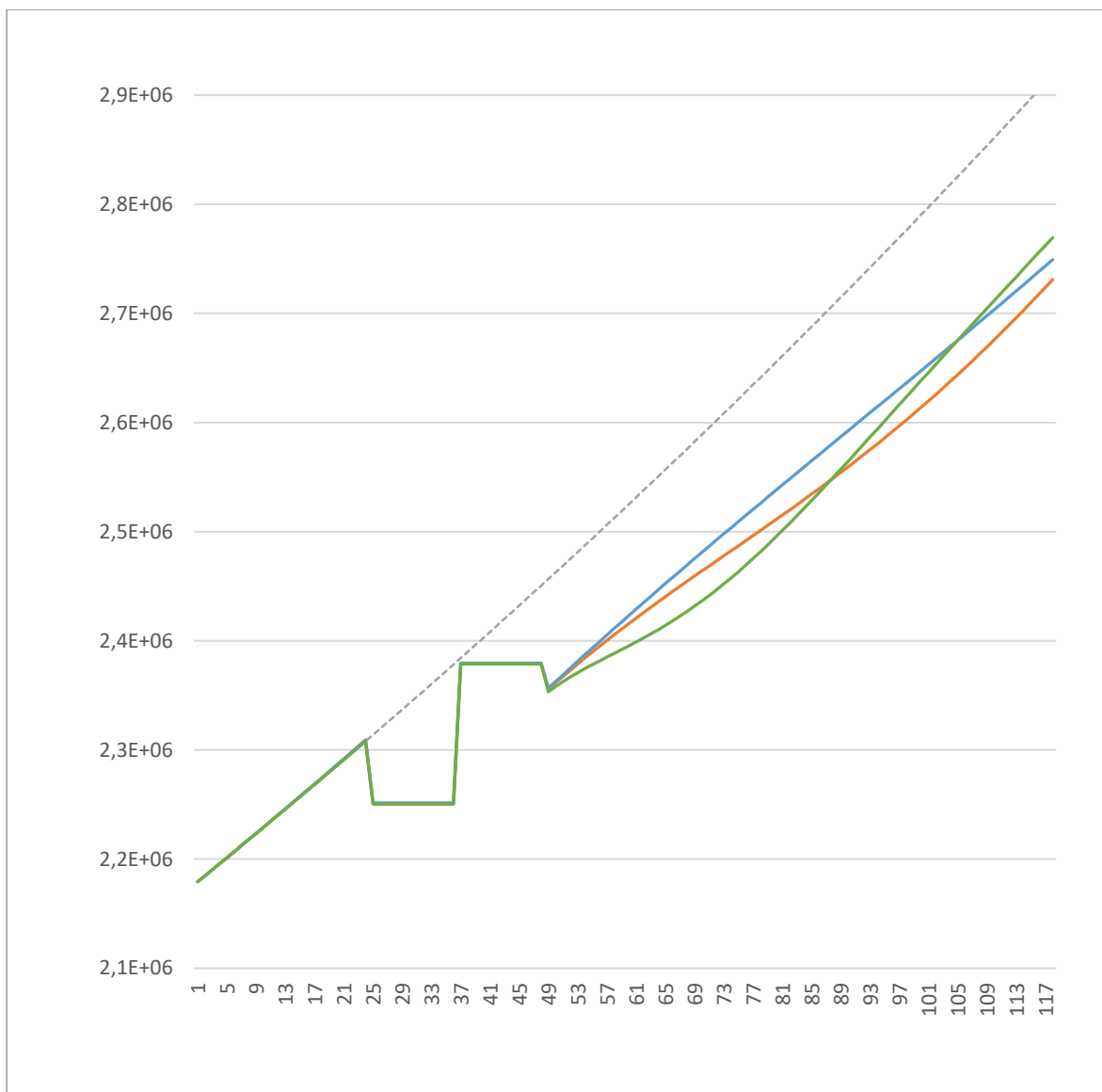


Rysunek 4.4.1. Dynamika wybranych zmiennych modelu KMG dla różnych zestawów wartości parametrów reakcji: β_{i_r} , β_{i_p} oraz β_{i_u} . Wykresy przedstawiają trajektorie

zmiennych: niebieski dla $\beta_{i_r} = \beta_{i_p} = 0,04$, $\beta_{i_u} = 0,002$ (zestaw 1), zielony dla $\beta_{i_r} = \beta_{i_p} = 1$, $\beta_{i_u} = 0,05$ (zestaw 2), pomarańczowy dla $\beta_{i_r} = \beta_{i_p} = 0,2$, $\beta_{i_u} = 0,01$ (zestaw 3).

Źródło: opracowanie własne.

Reakcją banku centralnego na kryzys gospodarczy związany m.in z wysoką inflacją (powyżej celu inflacyjnego) jest podniesienie nominalnej stopy procentowej. W scenariusz opisanym zestawem 1 wzrost nominalnej stopy procentowej jest najniższy. Natomiast w scenariuszu 2 bank centralny bardzo szybko podnosi stopę procentową, a ponadto, w porównaniu z pozostałymi scenariuszami, podnosi ją najwyżej. Efektem podnoszenia nominalnej stopy procentowej we wszystkich trzech analizowanych przez nas przypadkach jest zahamowanie wzrostu popytu (popyt w stosunku do PKB maleje), którego główną przyczynę stanowi zahamowanie wzrostu konsumpcji prywatnej (konsumpcja do PKB maleje, inwestycje do PKB bez znaczących zmian – rysunek 4.4.1, natomiast PKB rośnie ze stałą stopą wzrostu – rysunek 4.4.2.). Zmniejszenie popytu doprowadza do zmniejszenia wzrostu produkcji (rysunek 4.4.2), a w konsekwencji zmniejszenia wskaźnika wykorzystania mocy produkcyjnej. Dodatkowo, po kryzysie stopa wzrostu wydajności pracy x wraca do poziomu $n = 0,03$ (w czasie kryzysu zakładaliśmy $n = -0,025$), czego konsekwencją jest spadek stopy zatrudniania V w wyniku wzrostu wydajności pracy (wynika to z założenia: $Y = xL^d$ oraz $V = L^d/L$, $L = \text{const.}$). Zmniejszenie stopy zatrudnienia oraz wskaźnika mocy produkcyjnej implikuje spadek inflacji. Opóźniona reakcja banku centralnego w scenariusz opisanym zestawem 1 wydłuża opisany proces walki z wysoką inflacją, co ilustrują niebieskie wykresy na rysunku 4.4.1. W przypadku scenariuszu, w którym bank centralny najszybciej reaguje na odchylenia od założonych celów (zestaw 2), gospodarka najszybciej wraca do równomiernego wzrostu. Kosztem silnej i szybkiej reakcji banku centralnego jest gwałtowny spadek popytu, co ilustruje zielony wykres zmiennej opisującej stosunek popytu w stosunku do PKB. Jednak w kolejnych okresach popyt w gospodarce w przypadku scenariusza 2 bardzo szybko rośnie i wraca do poziomu przed kryzysem gospodarczym. Natomiast w scenariuszu 1, w którym bank centralny słabo reaguje na odchylenia od założonych celów, możemy zaobserwować dłuższy czas powrotu gospodarki do stanu stacjonarnego oraz pojawienie się cykli. W takiej sytuacji gospodarka, wychodząc z jednego kryzysu wchodzi w kolejny, w którym boryka się z rozłożonym w czasie niskim popytem oraz deflacją cen.



Rysunek 4.4.2. Dynamika PKB. Trajektorie PKB dla różnych zestawów wartości parametrów reakcji β_{i_r}, β_{i_p} oraz β_{i_u} , kolor: niebieski $\beta_{i_r} = \beta_{i_p} = 0,04, \beta_{i_u} = 0,002$ (zestaw 1), zielony $\beta_{i_r} = \beta_{i_p} = 1, \beta_{i_u} = 0,05$ (zestaw 2), pomarańczowy $\beta_{i_r} = \beta_{i_p} = 0,2, \beta_{i_u} = 0,01$ (zestaw 3)

Źródło: opracowanie własne.

Na koniec przedstawiamy, jak po kryzysie zachowuje się produkcja (Rysunek 4.4.2.). W scenariuszu opisanym zestawem 2 podczas walki z kryzysem produkcja jest dużo niższa niż w przypadku dwóch pozostałych scenariuszy. Spowodowane jest to gwałtownym spadkiem popytu, w dużej mierze wynikającym ze spadku konsumpcji sektora prywatnego. Jednak, można zaobserwować, że po około 65 okresach (po około 2 latach od końca kryzysu) produkcja w gospodarce w scenariuszu opisanym zestawem 2 przyspiesza i od 90. okresu (po około 3,5 latach) jest wyższa niż w scenariuszach 1 oraz 3.

4.4.4. Podsumowanie

Wyniki symulacji kryzysu gospodarczego wykazały, że polityka pieniężna ma znaczenie w walce z kryzysem gospodarczym. Szybkie i odważne decyzje podejmowane przez bank centralny, choć w początkowych okresach są dotkliwe dla gospodarki, to w późniejszych okresach pozwalają relatywnie szybko wrócić na ścieżkę równomiernego wzrostu, na której gospodarka znajdowała się przed kryzysem gospodarczym.

Zakończenie

Zaprezentowane w pracy modele są modyfikacjami wcześniejszych keynesowskich monetarnych modeli wzrostu gospodarczego typu Keynesa – Metzlera – Goodwina (KMG), jakie były przedmiotem wieloletnich badań prowadzonych głównie przez Carla Chiarelłę, Petera Flaschela i Williego Semmlera we współpracy także z innymi autorami. Wspomniani autorzy, znacząco przyczynili się do rozwoju keynesowskiej makroekonomii monetarnej.

Modele te opisują gospodarkę przy pomocy złożonych układów równań różniczkowych i są najbardziej zaawansowanymi teoretycznymi modelami ekonomii keynesowskiej. Do głównych osiągnięć wspomnianych wyżej autorów należy udowodnienie twierdzeń o stabilności analizowanych modeli mówiących o zdolności gospodarki do zbieżności z upływem czasu do ścieżki równomiernego wzrostu. Z uwagi na rozmiary i stopień skomplikowania badanych modeli było to zadaniem bardzo trudnym. Dlatego też, aby osiągnąć założony cel, musieli w wielu miejscach modeli dokonywać silnych uproszczeń kosztem realizmu ekonomicznego.

Pierwszym celem niniejszej rozprawy doktorskiej było opracowanie dwóch nowych wersji modelu KMG poprzez wprowadzenie takich modyfikacji ich równań, aby usunąć uproszczenia budzące największe wątpliwości. Wprowadzone modyfikacje pogłębiają istniejące relacje między zmiennymi modelu. W wyniku modyfikacji równań efekt Keynesa i efekt Rose'a, w zależności od wartości parametrów reakcji, jest dodatkowo osłabiony lub wzmocniony, a efekt Metzlera jest wzmocniony, niezależnie od wartości parametrów reakcji. Modyfikacje doprowadziły też do pojawienia się nowych sprzężeń zwrotnych w modelu, zwiększając tym samym jego złożoność. Do najważniejszych nowych sprzężeń zwrotnych, które zostały omówione w rozdziale pierwszym, zaliczamy efekt wzrostu oczekiwanego popytu oraz efekt wzrostu płacy realnej.

Modyfikacje zostały przeprowadzone w taki sposób, aby możliwe było sprowadzenie obu modeli do tzw. postaci intensywnej, w której zmiennymi stają się proporcje między zmiennymi modeli wyjściowych. Uzyskanie modeli w postaci intensywnej było koniecznym warunkiem do realizacji drugiego celu rozprawy, jakim było wyznaczenie tzw. stanów stacjonarnych modeli, a tym samym odpowiadającym im ścieżek równomiernego wzrostu.

Wprowadzone modyfikacje są szczególnie widoczne we wzorach opisujących wartości zmiennych w stanie stacjonarnym modelu. Wzory te pokazują m.in. jak stawki podatkowe wpływają na wartości takich zmiennych w stanie stacjonarnym jak stopa procentowa,

realny dochód z pracy na jednostkę produkcji, stosunek realnej wartości obligacji do kapitału rzeczowego. Zależności takich nie ma w oryginalnych wersjach modeli KMG, analizowanych przez Chiarellę i in., gdyż w ich wersjach modeli stawki podatkowe w ogóle nie są rozpatrywane.

Sprowadzenie modeli do postaci intensywnej otworzyło drogę do uzyskania najważniejszych teoretycznych rezultatów pracy, jakimi są dowody lokalnej asymptotycznej stabilności obu zmodyfikowanych modeli przedstawione w rozdziale trzecim. Z uwagi na wprowadzone modyfikacje dowody te, chociaż oparte na ogólnej idei kaskady macierzy stabilnych (*cascade of stable matrices approach*) pochodzącej z prac Chiarella i in., przebiegają inaczej gdyż inne są postaci analizowanej w tych dowodach macierzy Jacobiego. Inne też, w porównaniu z pracami Chiarella i in., są założenia o parametrach modeli wykorzystywane w dowodach stabilności.

Kolejnym etapem pracy było przeprowadzenie symulacji komputerowych na podstawie danych statystycznych o gospodarce polskiej. Wyniki tych symulacji zostały zaprezentowane w rozdziale czwartym. Najważniejszy wynikający z nich wniosek jest taki, że nawet dla dużych zakresów wartości parametrów stan stacjonarny modelu KMG i modelu KMGT jest lokalnie asymptotycznie stabilny, co jest empirycznym potwierdzeniem prawdziwości twierdzeń udowodnionych w rozdziale trzecim. Czas dojścia gospodarki do ścieżki równomiernego wzrostu jest bardzo długi, sięgający powyżej 100 lat. Przyczyna prawdopodobnie leży w bardzo dużym stopniu złożoności modelu - wielokierunkowych zależnościach między dużą liczbą jego zmiennych. Ich wzajemne dopasowanie się do siebie i ukształtowanie proporcji między nimi umożliwiającymi równomierny wzrost wymaga dużo czasu. Nie jest też tak, że gospodarka zmierza wprost ku ścieżce równomiernego wzrostu, gdyż w całym horyzoncie czasowym na procesy wzrostu nakładają się procesy wolno gasnących fluktuacji. Niemniej, także w relatywnie krótszych, bardziej realistycznych horyzontach czasowych widoczny jest ogólny kierunek przemian strukturalnych w gospodarce, jakim są proporcje między zmiennymi w stanie stacjonarnym umożliwiające równomierny wzrost gospodarki.

Ostatnim etapem analizy empirycznej badanego modelu była symulacja kryzysu gospodarczego poprzez wprowadzenie szoków zewnętrznych do modelu KMGT odzwierciedlających kryzys związany z pandemią wirusa SARS-CoV-2. Główne wyniki tej analizy wskazują po pierwsze, że odpowiednia modyfikacja modelu KMGT umożliwia

analizę wpływu szoków zewnętrznych, po drugie, że właściwa polityka pieniężna pozwala gospodarce relatywnie szybko wrócić na ścieżkę równomiernego wzrostu, na której znajdowała się przed kryzysem gospodarczym.

Przedstawione wyniki prac nie wyczerpują wyzwań badawczych, które warto byłoby podjąć w kolejnych etapach. Wśród kluczowych zagadnień wartych zainteresowania, które prawdopodobnie wyznaczać będą kierunki dalszych badań w omawianym obszarze, można wymienić m.in.:

- uwzględnienie oszczędności pracowników najemnych w równaniu konsumpcji prywatnej,
- uwzględnienie konsumpcji właścicieli kapitału,
- wprowadzenie możliwości zakupu obligacji przez pracowników najemnych,
- rozszerzenie modelu o kredyt konsumpcyjny,
- przeprowadzenie symulacji komputerowych dla nowych wersji modelu KMG,
- wykorzystanie zaawansowanych metod ekonometrycznych do wyznaczenia parametrów reakcji modelu.

Bibliografia

1. Acemoglu, D., (2009). *Introduction to Modern Economic Growth*. Princeton University Press.
2. Araujo, R., Flaschel P., Moreira H., (2020). Limit cycles in a model of supply-side liquidity/profit-rate in the presence of a Phillips curve, *Economia*, vol. 21, iss. 2, s. 145-159.
3. Asada T., (1991). On a mixed competitive-monopolistic macrodynamic model in a monetary economy. *Journal of Economics*, vol. 54, s. 33-53.
4. Asada T., Chiarella C., Flaschel P., Franke F., (2003). *Open Economy Macrodynamics*. Springer.
5. Asada, T., Demetrian, M., Zimka, R., (2018). On dynamics in a Keynesian model of monetary and fiscal policy with debt effect. *Communications in Non-linear Science and Numerical Simulations*, 58, s. 131–146.
6. Asada, T., Demetrian, M., Zimka, R., (2019). On Dynamics in a Keynesian Model of Monetary and Fiscal Stabilization Policy Mix with Twin Debt Accumulation. *Metroeconomica*, vol. 70, iss. 3, s. 365-383.
7. Barro, R.J. and X. Sala-i-Martin. (1995). *Economic growth*. McGraw Hill, Boston, MA.
8. Baranowski, P., (2008). Reguła Taylora i jej rozszerzenia, *Gospodarka Narodowa*, nr 7-8.
9. Baranowski, P., (2014). *Reguły polityki pieniężnej w Polsce*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
10. Barbarosa, F., (2018). *Macroeconomic Theory*, Springer.
11. Bassi, F., (2019). Capacity Utilization and the NAIRCU, *CEPN Working Papers* hal-02360456, HAL.
12. Begg, D., Fischer S., Dornbusch R., (2000). *Ekonomia. Makroekonomia*, PWE, Warszawa.
13. Białowolski, P., (2005). Produkt potencjalny w Polsce w latach 1993-2004 na podstawie funkcji produkcji, *Gospodarka narodowa*, nr 5-6.
14. Bullard, J., Mitra K., (2002). Learning about monetary policy rules, *Journal of Monetary Economics*, Elsevier, vol. 49(6), s. 1105-1129.
15. Brems, H., (1980). *Inflation, Interest, and Growth*. Lexington, MA D.C. Heath
16. Brock, W.A., (1974). Money and Growth: The Case of Long Run Perfect Foresight, *International Economic Review*, vol. 15, no. 3, s. 750-77.
17. Brzoza-Brzezina, M., (2003). Zagadnienie naturalnej stopy procentowej, *Ekonomista*, nr 4.

18. Cagan, P., (1956). The Monetary Dynamics of Hyper-Inflation, [w:] Studies in the Quantity of Money, Friedman M. (red.), *University of Chicago Press*, Chicago, s. 25-117.
19. Charpe, M., Chiarella C., Flaschel P., Semmler W., (2011). *Financial Assets, Debt and Liquidity Crises: A Keynesian Approach*. Cambridge University Press.
20. Chiarella, C., Flaschel, P., (2000). *The Dynamics of Keynesian Monetary Growth*, Cambridge University Press.
21. Chiarella, C., Flaschel P, Franke R., (2005). *Foundations for a Disequilibrium Theory of the Business Cycle*. Cambridge University Press.
22. Chiarella C., Flaschel P, Groh G., Semmler W., (2000). *Disequilibrium, Growth and Labor Market Dynamics*. Springer.
23. Chiarella, C., Flaschel, P., Franke, R., Araujo, R., Charpe, M., Proaño, Ch., Szczytkowski, A., (2021). *Unbalanced growth from a balanced perspective*, Edward Elgar.
24. Chiarella, C., Flaschel, P., Franke, R. and Semmler, W., (2006). "A high-dimensional model of real-financial market interaction: the cascade of stable matrices approach," in C. Chiarella, R. Franke, P. Flaschel and W. Semmler, eds, *Quantitative and Empirical Analysis of Nonlinear Dynamic Macromodels, Contributions to Economic Analysis*, vol. 277, Elsevier, Heidelberg, s. 359–384.
25. Chiarella, C., Flaschel P, Semmler W., (2012), (2013), (2014). *Reconstructing Keynesian Macroeconomics Volume 1,2,3: Integrated Approaches*. Routledge
26. Coenen, G., (2003). 'Downward Nominal Wage Rigidity and the Long-run Phillips Curve: Simulation Based Evidence for the Euro Area.' *ECB Working Paper* no.270.
27. Dimand, R. W., (2014). James Tobin and Modern Money Theory. *Chope Working Paper*, no. 2014-05, Center for the History of Political Economy, Duke University.
28. Dimand, R. W. and Durlauf, S. N., (2009). James Tobin and Growth Theory: Financial Factors and Long-Run Growth. *History of Political Economy*, vol. 41, s. 182- 199.
29. Dornbusch R., Frenkel J.A. (1973), Inflation and Growth: Alternative Approaches, *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 5, no. 1, s. 141-56.
30. Dutt, A., (2010). Keynesian growth theory in the 21st century. in *Twenty-first century Keynesian economics*, ed. Arestis, P., Sawyer, M., s. 39-80. Houndmills and New York: Macmillan Palgrave.
31. Dutt, A., (2012). Distributional dynamics in Post Keynesian growth models. *Journal of Post Keynesian Economics*, vol. 34(3), s. 431-451.
32. Duménil, G., Lévy, D., (1991). Micro adjustment toward long-term equilibrium. *Journal of Economic Theory*, 52(2), s. 369–395.

33. Esfahani H.S., Kim H., (2002). Hiding Public Debt, „*Economic Research Forum Working Papers*”, no. 0202, s. 1-2.
34. Fair, R., (1997a). *Testing the NAIRU model for the United States*. Yale University, mimeo.
35. Fair, R., (1997b). *Testing the NAIRU model for 27 countries*. Yale University, mimeo
36. Filipowicz, K., Misiak, T., Tokarski, T. (2016). Bipolar growth model with investment flows. *Economics and Business Review*, vol. 2(3), s. 32–56.
37. Fischer, S., (1972). Keynes—Wicksell and neoclassical models of money and growth. *American Economic Review*, vol. 62, s. 880—890.
38. Fischer, S., (1974). Money and the Production Function, *Economic Inquiry*, vol. 12, no. 4, s. 517-533.
39. Fischer, S., Modigliani F., (1978). Towards An Understanding of the Real Effects and Costs of Inflation, NBER Working Papers 0303, National Bureau of Economic Research, Inc.
40. Flaschel, P., (2020). *A baseline model of 'Social Protection' in Open economies of the KMG variety*. Bielefeld.
41. Franke R., (1992). Stable, unstable, and cyclical behaviour in a Keynes-Wicksell monetary growth model. *Oxford Economic Papers*, vol. 44, s. 242-256.
42. Friedman M., (1968). The Role of Monetary Policy, *American Economic Review* , vol. 58, s. 1 - 17.
43. Fujino A., (1974). *A Neokeynesian Theory of Inflation and Economic Growth*. Heidelberg: Springer Verlag.
44. Galí, J., (2008). *Monetary Policy, Inflation and the Business Cycle*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
45. Galbraith, J. K., (1997). Time to ditch the NAIRU. *Journal of Economic Perspectives*, vol. 11, s. 93-108.
46. Gandolfo, G., (2005). *Economic Dynamics*. Berlin: Springer Verlag.
47. Goodwin, R. M., (1967). A growth cycle. in: C.H. Feinstein ed.: *Socialism, Capitalism and Economic Growth*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, s. 54 - 58.
48. Grabia T., (2014). Kontrowersje wokół koncepcji krzywej Phillipsa, *Gospodarka Narodowa. The Polish Journal of Economics*, Warsaw School of Economics, iss. 5, s. 5-28.
49. Groth, C., (1988). 'IS-LM dynamics and the hypothesis of adaptive-forward-looking expectations', in P. Flaschel and M. Krüger (eds), *Recent Approaches to Economic Dynamics*. Frankfurt: Verlag Peter Lang, s. 251–66.

50. Harrod R. F., (1939). An Essays in Dynamic Theory, *The Economic Journal*, vol. 193(49), s. 14-33.
51. Harrod R. F., (1942). *Toward a Dynamic Economic*. London: Macmillan.
52. Iwai, K., (1981). *Disequilibrium Dynamics*. New Haven: Yale University Press.
53. Johnson, H. G. (1966). The neoclassical one-sector growth model: a geometrical exposition and extension to a monetary economy. *Economica*, vol. 33, s. 265-287
54. Keynes, J. M., (1936). *The General Theory of Employment, Interest and Money*. New York: Macmillan.
55. Kiedrowski, R., (2018). Profit rates equalization and balanced growth in a multi-sector model of classical competition. *Journal of Mathematical Economics*, vol. 77, s. 39–53.
56. Konopczyński, M., (2015). *Optymalna polityka fiskalna w gospodarce otwartej w świetle teorii endogenicznego wzrostu gospodarczego*. Poznań: Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu.
57. Lavoie, M., (2014). *Post-Keynesian Economics: New Foundations*, Edward Elgar
58. Lavoie, M., Stockhammer, E., (2014). *Wage-Led Growth. An Equitable Strategy for Economic Recovery*, Palgrave Macmillan London.
59. Levhari, D., Patinkin, D., (1968). The Role of Money in a Simple Growth Model, *American Economic Review*, vol. 58, s. 713-753.
60. Mankiw, G., (2001). The inexorable and mysterious tradeoff between inflation and unemployment, *Economic Journal*, 111, C45–C61.
61. McCandless G., (2008). *The ABCs of RBCs. An introduction to Dynamic Macroeconomic Models*, Harvard University Press, Rozdział 12.
62. Metzler, L.A. (1941), The nature and stability of inventory cycles. *Review of Economic Statistics*, vol. 23, s.113 - 129.
63. Murakami, H., (2016). Alternative monetary policies and economic stability in a medium-term Keynesian model. *Evolutionary and Institutional Economics Review*, Springer, vol. 13(2), s. 323-362, December.
64. Murakami, H., (2018). Existence and uniqueness of growth cycles in post Keynesian systems, *Economic Modelling*, vol. 75, s. 293-304.
65. Murakami, H., (2020). Monetary policy in the unique growth cycle of post Keynesian systems, *Structural Change and Economic Dynamics*, Elsevier, vol. 52(C), s. 39-49.
66. Nagatani, K., (1970). A note on Professor Tobin's money and economic growth. *Econometrica*, vol. 38, s. 171-175.

67. Napoletano, M., Dosi, G., Fagiolo, G., Roventini, A., (2012). Wage Formation, Investment Behavior and Growth Regimes: An Agent-Based Analysis. *REVUE DE L'OFCE*, vol. 124, iss. 1, s. 235-261.
68. Novales A., Fernandez E., Ruiz J., (2009). *Economic Growth: Theory and Numerical Solution Methods*. Springer.
69. Ogawa, S., (2019a). Dynamic analysis of a disequilibrium macroeconomic model with dual labor markets. *Metroeconomica*, vol. 70(3), s. 525–550.
70. Ogawa, S., (2019b). Effective demand and quantity constrained growth: A simple two sector disequilibrium approach. *MPRA Paper 93336*, University Library of Munich, Germany.
71. Ogawa, S., (2020). Monetary Growth with Disequilibrium: a Non-Walrasian baseline model, *MPRA Paper 101236*, University Library of Munich, Germany.
72. Okun, A., (1971). The Mirage of Steady Inflation. *Brooking Papers on Economic Activity*, 2, 485-498.
73. Orphanides, A., Solow R., (1990). Money, inflation and growth. In B. Friedman and F. Hahn (eds.), *Handbook of Monetary Economics*. Amsterdam: North-Holland, s. 223-261.
74. Pięta, Ł., (2017). Zrównoważony wzrost gospodarczy w teoriach i modelach wzrostu i rozwoju gospodarczego. *Gospodarka w Praktyce i Teorii*, vol. 43(2), s. 51 - 77.
75. Rose, H., (1966). Unemployment in a theory of growth. *International Economic Review*, 7, 260-282.
76. Rose, H., (1967). On the non-linear theory of the employment cycle. *Review of Economic Studies*, vol. 34, s. 153-173.
77. Rose, H., (1969). Real and monetary factors in the business cycle. *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 1, s. 138-152.
78. Rose, H., (1990) *Macroeconomic Dynamics: A Marshallian Synthesis*. Cambridge, MA: Basil Blackwell.
79. Rødseth, A., (2000). *Open economy macroeconomics*. Cambridge University Press.
80. Romer, D., (1996). *Advanced Macroeconomics*. London: McGraw-Hill.
81. Sargent, T., (1987). *Macroeconomic Theory*. New York: Academic Press.
82. Sidrauski, M., (1967a), Rational choice and patterns of growth in a monetary economy, *American Economic Review Papers and Proceedings*, vol. 57, s. 534-544.
83. Sidrauski M., (1967b). Inflation and economic growth, *Journal of Political Economy*, vol. 75, s. 796-810.

84. Sijben, J., (1977). *Money and Economic Growth*. Leiden: Martinus Nijho.
85. Solow, R.M., (1956). A contribution to the theory of economic growth. *Quarterly Journal of Economics*, vol. 70, s. 65-94.
86. Staiger, D., Stock, J.H. and Watson, M.W., (1997). The NAIRU, Unemployment and Monetary Policy. *Journal of Economic Perspectives*, vol. 11, s. 33-49.
87. Stein, J., (1966). Money and capacity growth. *Journal of Political Economy*, vol. 74, s. 451—465.
88. Stein, J., (1968). Rational choice and the patterns of economic growth in a monetary economy: comment. *American Economic Review*, vol. 58, s. 944-950.
89. Stein, J., (1969). Neoclassical and Keynes-Wicksell monetary growth models. *Journal of Money, Credit and Banking*, vol. 1, s. 153-171.
90. Stein, J., (1970). Monetary growth theory in perspective. *American Economic Review*, vol. 60, s. 85-106.
91. Stein, J., (1971). *Money and Capacity Growth*. New York: *Columbia University Press*.
92. Swan T. W. (1956). Economic Growth and Capital Accumulation, *Economic Record*, vol. 32, s. 334-361.
93. Patinkin D., (1965). *Money, Interest, and Prices: An Integration of Monetary and Value Theory*, Harper Row, New York.
94. Przybylska-Mazur, A., (2013). Reguły polityki pieniężnej a prognozowanie wskaźnika inflacji. *Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach*. nr 124, Progностyczne uwarunkowania ryzyka gospodarczego i społecznego.
95. Taylor, J., (1993). Discretion versus policy rules in practice. *Carnegie-Rochester Conference Series on Public Policy* 39, s. 195—214.
96. Taylor J.B., (1999). A Historical Analysis of Monetary Policy Rules, in: Taylor J.B. (ed.), *Monetary Policy Rules*, University of Chicago Press.
97. Taylor, J.B., (2015). *A Monetary Policy for the Future, Progress and Confusion: The State of Macroeconomic Policy*, Olivier Blanchard, Raghuram Rajan, Kenneth Rogoff, Lawrence H. Summers
98. Tobin, J., (1955). A dynamic aggregative model. *Journal of Political Economy*, vol. 63, s. 103-115.
99. Tobin J., (1965). Money and economic growth. *Econometrica*, vol. 33, s. 671-684.
100. Turnovsky, S.J., (2000). *Methods of Macroeconomic Dynamics*. Cambridge, MA: MIT, 2000. Print.

101. Trzepla M., (2007). Reguła Taylora – zastosowanie dla gospodarki polskiej. *Zeszyty Programu Top 15*, vol. 1(1), s. 193-218.
102. Walsh, C.E. (1998). *Monetary Theory and Policy*, MIT, Cambridge.
103. Wicksell, K., (1936). *Interest and Prices: A Study of the Causes Regulating the Value of Money*, translated by Richard Kahn, McMillan.
104. Winek D., Robak S., (2003). *Naturalna stopa procentowa, luka PKB i inercja inflacyjna, a wybór optymalnej stopy procentowej. Badania dla Polski 1992–2002*, Wyższa Szkoła Handlu i Finansów Międzynarodowych.
105. Wojtyna, A., (2004), *Szkice o polityce pieniężnej*. Warszawa: PWN, 2004, s. 255.