Kochanemu przyjacielowi Augustowi Mosbachowi
na pamiątkę spędzonych chwil w Wrocławiu

Autor.

DE

SUPERFICIEBUS CONFOCALIBUS SECUNDI GRADUS.

DISSERTATIO
INAUGURALIS MATHEMATICA

QUAM

CONSENSU ET AUCTORITATE

AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS

IN

ALMA LITERARUM UNIVERSITATE VIADRINA

AD

SUMMOS IN PHILOSOPHIA HONORES

RITE CAPESSENDOS

DIE XV. MENSIS DECEMBRIS MDCCCLV

H. XI. L. C.

PALAM DEFENDET

AUCTOR

STANISLAUS SZENIC,

POSNANIENSIS.

OPPONENTIBUS:

I. ZGORZALEWICZ, PHIL. STUD.

C. SZULC, PHIL. CAND.

C. I. PLEBAŃSKI, PHIL. DR.

VRATISLAVIAE.

TYPIS ROBERTI NISCHKOWSKY.

VIRO

PRAESTANTISSIMO HUMANISSIMO

COMITI

VALERIANO KWILECKI

NEC NON

PATRI

CARISSIMO DILECTISSIMO

JOANNI SZENIC

HUNCCE LIBELLUM

GRATI ANIMI DOCUMENTUM

ESSE VOLUIT

AUCTOR.

De superficiebus confocalibus secundi ordinis*).

Ut lineae secundi gradus, quae universaliter sectiones conicae appellantur, quaedam praecipua propriaque puncta habent, quae foci nominantur, quaeque multis proprietatibus gaudent, ita animum ad superficies secundi ordinis referentes, facile quasdam sectiones conicas inveniemus, quae focis linearum secundi gradus omnino respondent. Qualitates earum sectionum conicarum sunt permultae et ut earum nonnullas melius perspiciamus, primum superficies considerare volumus, quae unum tantum centrum habent.

I.

Aequatio superficierum sec. gr., quae unum tantum centrum habent, est

$$(\alpha)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

ubi intersectio trium coordinatarum perpendicularium planorum in centro superficiei posita est.

Aequationes lineae normalis et plani superficiem secundi gradus in quolibet puncto ξ, η, ζ tangentis, sunt haece

$$(\beta)\ \begin{cases} x-\xi=\dfrac{c^2\xi}{a^2\zeta}(z-\zeta) \\ y-\eta=\dfrac{c^2\eta}{b^2\zeta}(z-\zeta) \end{cases}$$

atque

$$(\gamma)\ \frac{x\xi}{a^2}+\frac{y\eta}{b^2}+\frac{z\zeta}{c^2}=1$$

ubi x, y, z coordinatas currentes, et ξ, η, ζ dati puncti, in superficie (α) positi coordinatas significant. Intersectio lineae normalis (β) et unius coordinatorum planorum, exempli gratia, coordinati plani per perpendiculares axes x atque y transeuntis, cujus aequatio igitur

$(\delta)\ z=o,$

est, ut ex ambobus aequationibus datis (β et δ) facile cognoscere possumus, punctum, cujus coordinatae sunt

*) Conf. Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie, particulièrement de celles qui se rapportent à la Géométrie moderne, par M. Chasles, ancien élève de l'école polytechnique, Bruxelles 1837. In linguam germ. transl. a Sohncke sub titulo: „Geschichte der Geometrie, hauptsächlich in Bezug auf die neuere Methoden." — Halae 1839. Nota XXI.

$$(\varepsilon)\begin{cases} x = \dfrac{a^2 - c^2}{a^2}.\xi \\ y = \dfrac{b^2 - c^2}{b^2}.\eta \\ z = \quad o. \end{cases}$$

Intersectio autem plani superficiem (α) in puncto ξ, η, ζ contingentis, atque ejusdem coordinati plani, per coordinatos axes x, y transeuntis (δ), est linea recta

$$(\zeta)\begin{cases} \dfrac{x\xi}{a^2} + \dfrac{y\eta}{b^2} = 1 \\ z = o \end{cases}$$

cujus aequatio in spatio est data.

Hoc punctum (ε) atque haec linea recta polari relatione secum conjuncta sunt. Inveniemus autem sectionem conicam, ad quam haec dicta relatio polaris puncti et lineae sumenda est, si valores coordinatarum puncti (ε) in aequatione lineae rectae (ζ) ponimus. Habemus autem ex (ε)

$$\xi = \frac{a^2\,x}{a^2 - c^2} \text{ et } \eta = \frac{b^2\,y}{b^2 - c^2}$$

propterea ex (ζ)

$$(\eta)\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2 - c^2} + \dfrac{y^2}{b^2 - c^2} = 1 \\ z = o \end{cases}$$

quae est aequatio postulatae sectionis conicae. Haec sectio conica est in coordinato plano xy posita.

Eodem modo inveniuntur sectionum conicarum in coordinatis planis xz atque yz positarum aequationes:

$$(\vartheta)\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2 - b^2} + \dfrac{z^2}{c^2 - b^2} = 1 \\ y = o \end{cases}$$

atque

$$(\iota)\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2 - a^2} + \dfrac{z^2}{c^2 - a^2} = 1 \\ x = o. \end{cases}$$

Linea normalis atque planum tangens cujuslibet puncti superficiei secundi gradus unicuique principalium diametralium trium planorum superficierum in puncto atque in linea recta, secum polari relatione conjunctis, occurrunt. Quae polaris relatio puncti atque lineae rectae semper ad quandam in principali plano positam sectionem conicam applicanda est.

Si semi-axes a, b, c nominantur atque si $a > b > c$ sumitur, sectio conica in plano magni atque medii axis id est in xy-plano posita, est apud ellipsoiden atque ellipticam hyperboloiden ellipsis, apud hyperbolicam hyperboloiden autem hyperbola; sectio conica in plano magni atque parvi axis, id est in xz-plano posita, est apud omnes tres superficies, quae unum tantum centrum habent, hyperbola; et denique sectio conica, in plano medii atque parvi axis, id est in yz-plano posita, est apud omnes superficies imaginaria. Quae nunc diximus, facile ex aequationibus earum sectionum conicarum (ϑ, η, ι), ubi apud ellipsoiden a^2, b^2, c^2 cum signis positivis, apud ellipticam hyperboloidem a^2 atque b^2 cum signis positivis, c^2 autem cum signo negativo, et apud hyperbolicam hyperboloiden a^2 cum signo positivo, b^2 atque c^2 autem cum signis negativis sumenda sunt, intelligi possunt.

Unaquaeque trium praedictarum sectionum conicarum cum proposita superficie ipsa simplicibus relationibus conjuncta est. Quibus relationibus utentes facillime eas curvas construere possumus. Unaquaeque sectionum praedictarum conicarum enim est, ut facile intelligi potest, in plano sectionis superficiei principalis posita. Foci sectionis conicae, in plano sectionis principalis superficiei positae, id est per planum xy formatae, atque foci sectionis conicae, cujus aequatio

$$(1)\quad \frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1 \qquad z=o$$

sunt iidem. Per planum xy, cujus aequatio $z=o$, ex superficie formata sectio conica habet enim aequationem

$$(2)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad z=o.$$

Excentricitas hujus sectionis, in xy-plano positae, est $e=\sqrt{a^2-b^2}$; excentricitas autem sectionis conicae

$$\frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1$$

est eadem, id est: $e=\sqrt{a^2-c^2-b^2+c^2}=\sqrt{a^2-b^2}$.

Aequatio per xz-planum, cujus aequatio $y=o$, formatae sectionis conicae est:

$$(3)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

atque aequatio per yz-planum $(x=o)$ formatae sectionis est

$$(4)\quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Magnus sectionis conicae (1) axis est $\sqrt{a^2-c^2}$, quod est etiam excentricitas conicae sectionis (3). Parvus autem axis ejusdem sectionis conicae (1) est $\sqrt{b^2-c^2}$, atque eadem est etiam excentricitas conicae sectionis (3). Eadem relatio inter duas alias conicas sectiones invenitur. Qua ex re facile intelligi potest: unamquamque trium nominatarum sectionum conicarum eosdem habere focos, quos sectiones, per plana, in quibus sectiones conicae positae sint, formatae habeant, atque vertices unius cujusque harum sectionum conicarum focos utriusque aliae sectionis principalis esse. Magnus igitur ellipsis axis apud ellipsoiden atque magnus axis hyperbolae apud eandem superficiem jacent in magno superficiei axi; vertices autem ellipsis sunt foci hyperbolae, atque vertices hyperbolae foci ellipsis.

Si una harum trium curvarum sit data, unaquaeque utriusque aliae sectionis conicae in plano, per unam axium principalium primae curvae perpendiculariter transeunte, est posita; ejus vertices sunt foci atque ejus foci vertices hujus primae curvae, qui in principali axi jacent.

Superficies omnes secundi gradus, quae has tres sectiones conicas habent, confocales superficies nominantur; ipsae autem curvae excentricae vel focales sectiones conicae superficiei vocari possunt. Unaquaeque superficies secundi gradus igitur habet tres focales vel excentricas sectiones conicas, quarum duae sunt reales, tertia autem imaginaria.

Facile perspici potest, principales sectiones duarum superficierum s. g., eosdem focos habentes, habere etiam easdem excentricas sectiones conicas, et vice versa, sectiones principales duarum superficierum confocalium s. g. habere eosdem focos.

Quibus primis proprietatibus atque relationibus inter superficies secundi gradus atque earum sectiones focales conicas utentes facillime in unoquoque casu eas sectiones construere possumus. Ut melius nonnullas confocalium superficierum secundi gradus proprietates cognoscamus, primum singulas superficies, atque postea duas pluresque quam duas considerare volumus.

---

§. 1.

1. Planum quodlibet transversale, unam excentricam sectionem conicam superficiei secundi gradus contingens, polum ad superficiem propositam sumtum in linea habet, quae in puncto, in quo planum sectionem conicam contingit, ad hoc planum est perpendicularis.

Aequatio plani transversalis excentricam sectionem conicam

$$(a)\quad \frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1$$

contingentis est haecce:

$$(b)\quad \frac{x\xi}{a^2-c^2}+\frac{y\eta}{b^2-c^2}+Cz=1$$

si superficies s. g. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ sit atque ξ, η coordinatae puncti contingentis excentricae sectionis conicae (a) appellentur. Polus hujus plani tangentis (b), in cujus aequatione quantitas C quemlibet habere potest valorem — qua ex re numerus planorum excentricam conicam in puncto ξ, η tangentium infinitus est, —

habeat coordinatas ξ', η', ζ': in hoc casu planum polare hujus poli respectu propositae superficiei aequationem

$$(c)\quad \frac{x\xi'}{a^2}+\frac{y\eta'}{b^2}+\frac{z\zeta'}{c^2}=1$$

habebit. Si jam aequatio (b) cum aequatione (c) comparetur,

$$\xi'=\frac{a^2\xi}{a^2-c^2},\ \eta'=\frac{b^2\eta}{b^2-c^2},\ \zeta'=c^2C$$

invenientur. Quum autem polus ξ', η', ζ' plani (b) in qualibet recta linea, in spatio sita,

$$(d)\quad \begin{cases} x = mz + \mu \\ y = nz + \nu \end{cases}$$

versetur, habemus

$$\frac{a^2\xi}{a^2-c^2}=mc^2C+\mu$$

$$\frac{b^2\eta}{b^2-c^2}=nc^2C+\nu$$

et ut eadem linea recta punctum contingens $\xi, \eta, (\zeta = o)$ contineat, oportet fiat conditio

$$\xi = \mu \text{ atque } \eta = \nu.$$

Inventis igitur valoribus

$$m=\frac{\xi}{C(a^2-c^2)},\ n=\frac{\eta}{C(b^2-c^2)},\ \xi=\mu \text{ atque } \eta=\nu$$

in aequatione lineae rectae (d) substitutis, obtinemus aequationem lineae per puncta ξ', η', ζ' atque $\xi, \eta, (\zeta = o)$ transeuntis

$$(e)\quad \begin{cases} x=\dfrac{\xi}{C(a^2-c^2)}z+\xi \\[2ex] y=\dfrac{\eta}{C(b^2-c^2)}z+\eta. \end{cases}$$

Ut autem linea (d) sit ad planum (b) perpendicularis, oportet locum habeant, ut notum est, aequationes

$$(f)\quad m=\frac{\xi}{C(a^2-c^2)},\ n=\frac{\eta}{(b^2-c^2)C}$$

et si aequationem lineae (e) cum aequatione plani (b) comparemus, conditiones (f) satisfactas esse videmus. Polus plani (b) est igitur situs in linea recta (e), quae in puncto contingenti $\xi, \eta, (\zeta = o)$ ad planum (b) est perpendicularis, q. e. d.

2. Si polus cujuslibet plani transversalis (α) ad propositam superficiem secundi gradus applicatus cum polo lineae, in qua hoc planum (α) a plano excentricae sectionis conicae intersecatur, ad hanc excentricam conicam sumto, conjungatur, recta linea per utrumque polum transiens, ad planum transversale (α) est perpendicularis.

Aequatio plani transversalis esto:

$$(\alpha)\quad \frac{A}{D}x+\frac{B}{D}y+\frac{C}{D}z=1.$$

Coordinatae poli hujus plani ad superficiem s. gr. applicati sunt

$$\xi = \frac{A}{D} a^2,\ \eta = \frac{B}{D} . b^2,\ \zeta = c^2 \frac{C}{D}.$$

Planum, in quo sectio conica est posita, sit coordinatum planum xy, cujus aequatio $z = o$; linea intersectionis transversalis plani (α) cum plano excentricae sectionis conicae, erit igitur

$$(\beta) \begin{cases} \frac{A}{D} x + \frac{B}{D} y = 1 \\ z = o \end{cases}$$

Polus hujus lineae intersectionis ad excentricam sectionem conicam sumtus habeat coordinatas ξ', η', ζ'. Si sectio conica habeat aequationem

$$\frac{x^2}{a^2 - c^2} + \frac{y^2}{b^2 - c^2} = 1$$
$$z = o$$

erit

$$\xi' = (a^2 - c^2) . \frac{A}{D},\ \eta' = (b^2 - c^2) \frac{B}{D},\ \zeta' = o.$$

Linea autem, cujus universalis aequatio in spatio formam

$$\begin{cases} x = mz + \mu \\ y = nz + \nu \end{cases}$$

habet, quaeque utrumque polum ξ, η, ζ, atque ξ', η', ζ' conjungit, aequationem

$$(\gamma) \begin{cases} x - \xi = \frac{\xi - \xi'}{\zeta} (z - \zeta) \\ y - \eta = \frac{\eta - \eta'}{\zeta} (z - \zeta) \end{cases}$$

habebit. Quae linea, per aequationem (γ) repraesentata, ad planum transversale (α), ut facile intelligi potest, est perpendicularis. Habemus enim

$$\frac{\xi - \xi'}{\zeta} = \frac{A}{C} \text{ atque } \frac{\eta - \eta'}{\zeta} = \frac{B}{C}$$

quae sunt conditiones, ut linea sit ad planum perpendicularis.

3. Productum distantiarum uniuscujusque plani tangentis superficiem s. g. a duobus talibus punctis, in una excentrica sectione conica positis, per qua tangentes curvae huic plano tangenti parallelae transeunt, est constans.

Si superficies secundi gradus

$$(\alpha)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

plano

$$(\beta)\ Ax + By + Cz = D$$

tangitur, habemus aequationem

$$(\gamma)\ A^2 a^2 + B^2 b^2 + C^2 c^2 - D^2 = o.$$

Aequatio excentricae sectionis conicae in coordinato plano xy positae, est

$$(\delta)\quad \frac{x^2}{a^2-c^2}+\frac{y^2}{b^2-c^2}=1$$

Utrumque punctum hujus sectionis conicae sit ξ, η, ζ atque ξ', η', ζ', ubi est $\zeta=\zeta'=o$. Tangentes in his duobus punctis sunt

$$(\varepsilon)\quad \begin{cases} \dfrac{x\xi}{a^2-c^2}+\dfrac{y\eta}{b^2-c^2}=1 \\ z=o \end{cases}$$

atque

$$(\zeta)\quad \begin{cases} \dfrac{x\xi'}{a^2-c^2}+\dfrac{y\eta'}{b^2-c^2}=1 \\ z=o. \end{cases}$$

Ut autem hae tangentes plano (β) sint parallelae, oportet valores pro x atque pro y, ex aequationibus (ε ζ) in aequatione (α) substituti, infiniti sint. Quo facto habebimus aequationes

$$(\eta)\quad B(b^2-c^2)\xi=A(a^2-c^2)\eta$$

$$(\vartheta)\quad B(b^2-c^2)\xi'=A(a^2-c^2)\eta'$$

Distantiae autem plani (β) a punctis ξ, η, ζ atque ξ', η', ζ' sunt respective:

$$d=\pm\frac{A\xi+B\eta-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$d'=\pm\frac{A\xi'+B\eta'-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

earum productum erit igitur

$$(\iota)\ \pm dd'=\frac{D^2+A^2\xi\xi'+B^2\eta\eta'+AB(\xi\eta'+\xi'\eta)-AD(\xi+\xi')-BD(\eta+\eta')}{A^2+B^2+C^2}.$$

Habemus autem ex (η) atque (ϑ)

$$(\varkappa)\quad \xi\eta'=\xi'\eta$$

et propterea ex (ι)

$$\pm dd'=\frac{A^2\xi\xi'+B^2\eta\eta'+2AB\xi\eta'-AD(\xi+\xi')-BD(\eta+\eta')+D^2}{A^2+B^2+C^2}$$

Quoniam ξ, η, ζ atque ξ', η', ζ' sunt puncta excentricae sectionis conicae (δ), habemus igitur aequationes

$$(\lambda)\quad \frac{\xi^2}{a^2-c^2}+\frac{\eta^2}{b^2-c^2}=1$$

atque

$$(\mu)\quad \frac{\xi'^2}{a^2-c^2}+\frac{\eta'^2}{b^2-c^2}=1$$

Valorem pro ξ ex ($\varkappa$) exhibitum in (λ) substituentes habebimus

$$\frac{\xi'^2\,\eta^2}{a^2-c^2}+\frac{\eta^2\,\eta'^2}{b^2-c^2}=\eta'^2$$

atque hanc aequationem cum aequatione (μ) comparantes

$$\eta'=\pm\eta$$

invenimus. Quoniam autem $\eta' = \eta$ idem significat punctum, $\eta' = -\eta$ igitur sumendum est. Quo valore substituto pro dd' habebimus

$$\pm dd' = \frac{D^2 - A^2\xi^2 - B^2\eta^2 - 2AB\xi\eta}{A^2 + B^2 + C^2}$$

vel valore ex aequatione (η) pro ξ sumto

$$(\nu) \pm dd' = \frac{B^2D^2(b^2-c^2)^2 - (A^2(a^2-c^2) + B^2(b^2-c^2))^2\eta^2}{B^2(b^2-c^2)^2(A^2+B^2+C^2)}$$

Si autem valorem ex aequatione (η) pro ξ sequentem in aequatione (λ) ponamus, inveniemus

$$\eta^2 = \frac{B^2(b^2-c^2)^2}{A^2(a^2-c^2) + B^2(b^2-c^2)}$$

atque habebimus ex (ν):

$$\pm dd' = \frac{D^2 - A^2(a^2-c^2) - B^2(b^2-c^2)}{A^2 + B^2 + C^2}$$

vel valore (γ) substituto

$$dd' = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)c^2}{A^2 + B^2 + C^2} = c^2$$

quod erat demonstrandum.

4. Productum distantiarum uniuscujusque puncti excentricae sectionis conicae superficiei s. g. a duobus planis tangentibus, non solum sibi invicem, sed etiam lineae sectionem conicam in dicto puncto contingenti parallelis, est semper constans.

Aequationes duorum parallelorum planorum sint

(α) $Ax + By + Cz = D$

(β) $Ax + By + Cz = D'$.

Ut haec plana superficiem propositam s. g.

$$(\gamma)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

tangant, oportet sint aequationes

(δ) $A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 - D^2 = o$

(ε) $A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 - D'^2 = o$.

Excentrica sectio conica sit in xy-plano posita, atque igitur habeat aequationem

$$(\zeta)\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2-c^2} + \dfrac{y^2}{b^2-c^2} = 1. \\ z = o. \end{cases}$$

Punctum utcunque in xy-plano positum habeat coordinatas ξ, η, ζ, ubi ζ aequale est zero. Aequatio lineae in hoc puncto sectionem conicam (ζ) contingentis erit igitur

$$\begin{cases} \dfrac{x\xi}{a^2-c^2} + \dfrac{y\eta}{b^2-c^2} = 1. \\ z = o. \end{cases}$$

Quae tangens ut utrique plano (α) atque (β) sit parallela, oportet aequationes habeamus

$$(\eta)\ \frac{\xi}{\eta} = \frac{A\,(a^2-c^2)}{B\,(b^2-c^2)}.$$

Distantiae utriusque plani a hoc dato puncto sunt respective

$$(\vartheta)\ d = \pm \frac{A\xi + B\eta - D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

atque

$$(\iota)\ d' = \pm \frac{A\xi + B\eta - D'}{\sqrt{A^2+B^2-C^2}}.$$

Productum igitur harum distantiarum erit

$$\pm dd' = \frac{A^2\xi^2+B^2\eta^2+2AB\xi\eta-2A\xi(D+D')-2B\eta(D+D')+DD'}{A^2+B^2+C^2}$$

Habemus autem ex aequationibus (δ) atque (ε)

$$D = \pm D'.$$

In casu, quem consideramus, signum tantum negativum sumi potest; nam, si signum positivum sumeretur, plana (α) et (β) prorsus eadem forent. Quo valore substituto invenitur

$$\pm dd' = \frac{A^2\xi^2+B^2\eta^2+2AB\xi\eta-D^2}{A^2+B^2+C^2}$$

vel valore ex aequatione (η) pro ξ sequente

$$(\varkappa)\ \xi = \frac{A\,(a^2-c^2)}{B\,(b^2-c^2)}\cdot\eta$$

posito

$$\pm dd' = \frac{(A^2(a^2-c^2)^2+B^2(b^2-c^2)^2)\eta^2-B^2D^2\,(b^2-c^2)^2}{B^2(b^2-c^2)^2\,(A^2+B^2+C^2)}.$$

Quum autem ξ, η sit punctum in sectione conica (ζ) situm, habemus etiam aequationem

$$(\lambda)\ \frac{\xi^2}{a^2-c^2}+\frac{\eta^2}{b^2-c^2}=1$$

$$\zeta = o.$$

Ex aequationibus ($\varkappa$) atque (λ) invenimus pro η^2

$$\eta^2 = \frac{B^2\,(b^2-c^2)^2}{A^2\,(a^2-c^2)^2+B^2\,(b^2-c^2)^2}.$$

Quo facto erit productum distantiarum

$$\pm dd' = \frac{A^2\,(a^2-c^2)+B^2\,(b^2-c^2)-D^2}{A^2+B^2+C^2}$$

vel aequatione (δ) respecta

$$dd' = c^2.$$

q. e. d.

5. Si planum utcunque positum superficiem secundi gradus tangens plano unam excentricarum sectionum conicarum contingenti sit parallelum, differentia quadratorum distantiarum horum duorum planorum a centro superficiei est constans.

Aequatio superficiei secundi gradus est

$$(\alpha)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

excentrica autem sectio conica, in coordinato plano xy posita habet aequationem

$$(\beta)\ \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2-c^2}+\dfrac{y^2}{b^2-c^2}=1\\ z=o.\end{cases}$$

Aequatio lineae sectionem conicam (β) in puncto ξ, η, ζ, (ubi $\zeta=o$ est) tangentis est

$$(\gamma)\ \begin{cases}\dfrac{x\xi}{a^2-c^2}+\dfrac{y\eta}{b^2-c^2}=1\\ z=o.\end{cases}$$

Sibi invicem parallela plana habeant aequationes

(δ) $Ax+By+Cz=D$

(ε) $Ax+By+Cz=D'$.

Ut planum (δ) superficiem (α) tangat, oportet fiat aequatio:

(ζ) $A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2-D^2=o$.

Ut autem planum (ε) sectionem conicam (β) in puncto ξ, η, ζ contingat, oportet linea hanc sectionem conicam tangens in hoc plano (ε) posita sit, atque valores ex aequatione (γ) pro y atque z eruti in aequatione (ε) substituti, indefiniti maneant. Quo facto duas habemus aequationes conditionales

(η) $B\,(b^2-c^2)\,\xi=A\,(a^2-c^2)\,\eta$

(ϑ) $D'\eta=B\,(b^2-c^2)$.

Quadrata autem distantiarum utriusque plani (δ) atque (ε) a centro superficiei (α) sunt respective

$$d^2=\frac{D^2}{A^2+B^2+C^2}$$

$$d'^2=\frac{D'^2}{A^2+B^2+C^2}$$

atque igitur differentia horum quadratorum erit

$$d^2-d'^2=\frac{D^2-D'^2}{A^2+B^2+C^2}.$$

Qua in aequatione valoribus ex aequationibus (ζ) atque (ϑ) pro D^2 et D'^2 sequentibus positis, invenitur

$$(\iota)\ d^2-d'^2=\frac{A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2-\frac{1}{\eta^2}.B^2(b^2-c^2)^2}{A^2+B^2+C^2}.$$

Habemus autem ex aequatione

$$\frac{\xi^2}{a^2-c^2}+\frac{\eta^2}{b^2-c^2}=1$$
$$\zeta=o$$

(ξ, η, ζ est enim punctum in sectione conica (β) situm), ibidem valorem pro ξ ex aequatione (η) substituentes, pro η^2

$$\eta^2 = \frac{B^2(b^2-c^2)^2}{A^2(a^2-c^2)+B^2(b^2-c^2)}$$

Quo valore in aequatione (ι) posito, eruitur

$$d^2 - d'^2 = \frac{(A^2+B^2+C^2)c^2}{A^2+B^2+C^2} = c^2$$

q. e. d.

§. 2.

Si dicere volumus, principales duarum superficierum secundi ordinis sectiones iisdem focis circumscriptas esse, differentia quadratorum earum principalium diametrorum, ut facile intelligi potest, constans sit oportet. Si igitur aequationes duarum superficierum secundi ordinis

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

atque

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1$$

appellentur, relatio inter utramque superficiem

$$a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2$$

sumenda est, qua exprimamus, utramque superficiem easdem excentricas sectiones conicas habere. Quae relatio duobus modis generaliter exprimi atque ex proprietatibus, non solum ad vertices utriusque superficiei, sed etiam ad omnia earum puncta spectantibus deduci potest.

1. Differentia quadratorum distantiarum duorum, utcunque positorum, sibi invicem parallelorum planorum, quae respective duas superficies secundi ordinis, easdem excentricas sectiones conicas habentes tangunt, a centro utriusque superficiei est semper constans.

Aequationes utriusque superficiei sunto

$$(\alpha) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$(\beta) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1.$$

Quoniam hae superficies sunt confocales, habemus igitur aequationem conditionalem

$$(\gamma) \quad a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2$$

Ut autem duo sibi invicem parallela plana, quorum aequationes universalem habent formam

$$(\delta) \quad Ax + By + Cz = D$$

$$(\varepsilon) \quad Ax + By + Cz = D'$$

superficies (α) et (β) respective tangant, oportet sint aequationes

$$(\zeta) \quad A^2a^2 + B^2b^2 + C^2c^2 - D^2 = o$$

$$(\eta) \quad A^2a'^2 + B^2b'^2 + C^2c'^2 - D'^2 = o.$$

Distantia autem plani (δ) a centro superficiei (α) est

$$d = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

atque eodem modo alterum planum (ε) a centro alterius superficiei (β) distantiam habet sequentem:

$$d' = \frac{D'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Obtinemus igitur

$$d^2 - d'^2 = \frac{D^2 - D'^2}{A^2+B^2+C^2}$$

vel valoribus pro D^2 atque D'^2 ex aequationibus (ζ) atque (η) positis

$$d^2 - d'^2 = \frac{A^2(a^2 - a'^2) + B^2(b^2 - b'^2) + C^2(c^2 - c'^2)}{A^2+B^2+C^2}$$

vel denique aequatione (γ) sumta

$$d^2 - d'^2 = a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2.$$

Adnotatio. Si ellipsoïdes atque hyperboloïdes sibi sint confocales, plana, ellipsoïdem tangentia atque planis hyperboloïdae conum asymptoticum contingentibus parallela, omnia ab utriusque superficiei communi centro aequaliter distant.

Aequatio ellipsoïdae est

$$(\alpha) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ubi a^2, b^2 atque c^2 signa habent positiva; aequatio autem hyperboloidae semel partitae esto:

$$(\beta) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 1.$$

Ut autem dictae superficies sibi sint confocales, debet esse aequatio

$$(\gamma) \quad a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 + c'^2.$$

Asymptoticus conus ellipticae hyperboloidae (β) habet, ut est notum, aequationem

$$(\delta) \quad \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = o.$$

Plana asymptoticum hyperboloidae conum tangentia habeant aequationes

$$(\varepsilon) \quad Ax + By + Cz = o$$

$$(\zeta) \quad A'x + B'y + C'z = o$$

ubi aequationes conditionales

$$(\eta) \quad A^2 a'^2 + B^2 b'^2 - C^2 c'^2 = o$$

$$(\vartheta) \quad A'^2 a'^2 + B'^2 b'^2 - C'^2 c'^2 = o$$

locum habent. Plana autem planis (ε) atque (ζ) parallela, et ellipsoidem (α) tangentia erunt

$$(\iota) \quad Ax + By + Cz = D$$

atque

$$(\varkappa) \quad A'x + B'y + C'z = D'$$

ubi utraque aequatio conditionalis

$(\lambda)\ A^2 a^2 + B^2 b^2 + C^2 c^2 - D^2 = o$

$(\mu)\ A'^2 a^2 + B'^2 b^2 + C'^2 c^2 - D'^2 = o$

valet. Quae plana (ι) $(\varkappa)$ sequentes a communi superficiei centro distantias habent:

$$(\nu)\ d = \frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

et

$$(o)\ d' = \frac{D'}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$$

Valore autem pro D ex aequatione (λ) in aequatione (ν) substituto invenitur

$$d = \sqrt{\frac{A^2 a^2 + B^2 b^2 + C^2 c^2}{A^2 + B^2 + C^2}}$$

vel aequationibus (γ) atque (η) consideratis

$$d = \sqrt{\frac{A^2 a^2 + B^2 (a^2 - a'^2 + b'^2) + C^2 (a^2 - a'^2 - c'^2)}{A^2 + B^2 + C^2}} = \sqrt{a^2 - a'^2}.$$

Eodem modo invenitur

$$d' = \sqrt{a^2 - a'^2}.$$

Habemus igitur $d = d'$ q. e. d.

Secundam proprietatem universalem superficies tantummodo ejusdem generis habent. Utraque igitur superficies aut ellipsoides aut elliptica aut hyperbolica hyperboloides sit oportet. Ut autem haec proprietas exprimi enuntiarique possit, correspondentia superficierum puncta duo talia puncta appellentur, quorum coordinatae in directione uniuscujusque axis principalis, semi-diametris superficierum, ad eundem axem directis, sunt proportionales.

2. Si duae superficies secundi ordinis atque ejusdem generis sint confocales, differentia quadratorum duarum diametrorum in duobus correspondentibus harum superficierum punctis occurrentium, est constans.

Duae superficies sunto ellipsoidae

$$(\alpha)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$(\beta)\ \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1$$

ubi aequatio

$(\gamma)\ a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2$

locum habet. Puncta autem correspondentia habeant coordinatas ξ, η, ζ atque ξ', η', ζ', ita ut habeamus proportiones

$(\delta)\ \xi : \xi' = a : a'$

$(\varepsilon)\ \eta : \eta' = b : b'$

$(\zeta)\ \zeta : \zeta' = c : c'$.

Longitudo in puncto ξ, η, ζ ellipsoidae occurrentis semi-diametri est haecce:

$$l = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$$

atque similiter in correspondenti puncto ξ', η', ζ' alteri ellipsoidae occurrens semi-diameter habet longitudinem

$$l' = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2}.$$

Erit igitur

$$l^2 - l'^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \xi'^2 - \eta'^2 - \zeta'^2.$$

Valoribus autem ex proportionibus (δ) (ε) (ζ) pro ξ, η, ζ erutis in hac aequatione substitutis, obtinemus

$$l^2 - l'^2 = \frac{\xi'^2}{a'^2}(a^2 - a'^2) + \frac{\eta'^2}{b'^2}(b^2 - b'^2) + \frac{\zeta'^2}{c'^2}(c^2 - c'^2).$$

Quum ξ', η', ζ' sit punctum in ellipsoide (β) situm, habemus

$$\frac{\xi'^2}{a'^2} + \frac{\eta'^2}{b'^2} + \frac{\zeta'^2}{c'^2} = 1$$

i. e.

$$\frac{\xi'^2}{a'^2} = 1 - \frac{\eta'^2}{b'^2} - \frac{\zeta'^2}{c'^2}$$

atque igitur

$$l^2 - l'^2 = a^2 - a'^2 + \frac{\eta'^2}{b'^2}(b^2 - b'^2 - a^2 + a'^2) - \frac{\zeta'^2}{c'^2}(c^2 - c'^2 - a^2 + a'^2)$$

vel aequatione (γ) respecta

$$l^2 - l'^2 = a^2 - a'^2$$

q. e. d.

Quo ex theoremate deduci sequens theorema potest:

3. Si duae superficies secundi ordinis ejusdemque generis sint confocales, distantia duorum in his superficiebus utpote positorum punctorum distantiae correspondentium punctorum est aequalis.

Duae superficies habeant easdem aequationes, sicut in procedenti theoremate. Punctum in ellipsoide (α) electum habeat coordinatas ξ, η, ζ, coordinataeque in superficie (β) positi puncti sint ξ', η', ζ'. Quorum punctorum distantia erit, ut omnino est notum

$$(\alpha') \quad d = \sqrt{(\xi - \xi')^2 + (\eta - \eta')^2 + (\zeta - \zeta')^2}.$$

Coordinatae puncto ξ, η, ζ correspondentis puncti sunto ξ'', η'', ζ'' atque coordinatae alteri puncto ξ', η', ζ' correspondentis puncti appellentur ξ''', η''', ζ'''. Habebimus tum sequentes aequationes conditionales:

$$\begin{aligned}
\xi &: \xi'' = a : a' \text{ vel } a'\xi = a\xi'' \\
\eta &: \eta'' = b : b' \text{ vel } b'\eta = b\eta'' \\
\zeta &: \zeta'' = c : c' \text{ vel } c'\zeta = c\zeta'' \\
\xi' &: \xi''' = a' : a \text{ vel } a\xi' = a'\xi''' \\
\eta' &: \eta''' = b' : b \text{ vel } b\eta' = b'\eta''' \\
\zeta' &: \zeta''' = c' : c \text{ vel } c\zeta' = c'\zeta'''.
\end{aligned}$$

Valoribus autem pro ξ, η, ζ atque ξ', η', ζ', ex his aequationibus sequentibus in aequatione (α') substitutis, reperietur

$$d = \sqrt{\frac{a^2}{a'^2}\xi''^2 + \frac{a'^2}{a^2}\xi'''^2 + \frac{b^2}{b'^2}\eta''^2 + \frac{b'^2}{b^2}\eta'''^2 + \frac{c^2}{c'^2}\zeta''^2 + \frac{c'^2}{c^2}\zeta'''^2 - 2(\xi''\xi''' + \eta''\eta''' + \zeta''\zeta''')}.$$

Quum punctum ξ'', η'', ζ'' in ellipsoide (β), et punctum ξ''', η''' ζ''' in ellipsoide (α) versetur, habemus

$$\frac{\xi''^2}{a'^2}=1-\frac{\eta''^2}{b'^2}-\frac{\zeta''^2}{c'^2}$$

atque

$$\frac{\xi'''^2}{a^2}=1-\frac{\eta'''^2}{b^2}-\frac{\zeta'''^2}{c^2}.$$

Propterea nonnullis facilibus reductionibus factis invenitur

$$d=\sqrt{(\xi''-\xi''')^2+(\eta''-\eta''')^2+(\zeta''-\zeta''')^2}.$$

Obtinemus igitur

$$\sqrt{(\xi''-\xi''')^2+(\eta''-\eta''')^2+(\zeta''-\zeta''')^2}=\sqrt{(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2}$$

q. e. d.

4. Si duae superficies secundi ordinis sint confocales et si per fixum punctum in uno axi earum principali linea transversalis per primam superficiem, postea autem secunda linea transversalis ita ducatur, ut cosinus angulorum, quos utraque linea transversalis cum unoquoque utriusque alii axis principalis format, ad se invicem, sicut superficierum diametri ad unumquemque eorum axium directae, se habeant, sequentia theoremata locum habent:

A. Partes in utraque linea transversali respective per utramque superficiem abscissae ita se habent invicem, ut utraque ad primum principalem axem directa superficierum diameter.

B. Sinus angulorum, quos utraque linea transversalis cum hoc primo axi principali format, eodem modo se habent, sicut duae superficierum diametri, quae per haec duo puncta, in quibus lineae transversales plano diametrali ad hunc primum axem perpendiculari occurrunt, transeunt.

C. Utraque diameter in utraque superficie sibi invicem correspondebit.

A) Superficies confocales habeant aequationes

$$(\alpha)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

atque

$$(\beta)\quad \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1$$

ubi aequatio conditionalis

$$(\gamma)\quad a^2-a'^2=b^2-b'^2=c^2-c'^2$$

locum habet. Punctum sit in z-axi positum; habebit igitur coordinatas $x=\xi=o$, $y=\eta=o$, $z=\zeta$. Aequationes per hoc punctum transeuntium linearum transversalium appellabuntur igitur

$$(\delta)\begin{cases}x=m\,(z-\zeta)\\ y=n\,(z-\zeta)\end{cases}$$

atque

$$(\varepsilon)\begin{cases}x=m'(z-\zeta)\\ y=n'\,(z-\zeta).\end{cases}$$

Cosinus nunc angulorum, quos linea transversalis (δ) cum axibus x atque y format, sunt respective

$$\cos. v = \frac{m}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}$$

$$\cos. w = \frac{n}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}}.$$

Similiter cosinus angulorum, quos linea transversalis (ε) cum iisdem format axibus, appellantur respective

$$\cos. v' = \frac{m'}{\sqrt{1 + m'^2 + n'^2}}$$

et

$$\cos. w' = \frac{n'}{\sqrt{1 + m'^2 + n'^2}}.$$

Habemus igitur secundum hypothesin

$$(\zeta) \quad \frac{m}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}} : \frac{m'}{\sqrt{1 + m'^2 + n'^2}} = a : a'$$

$$(\eta) \quad \frac{n}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}} : \frac{n'}{\sqrt{1 + m'^2 + n'^2}} = b : b'$$

vel etiam

$$(\vartheta) \quad \frac{m}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}} : \frac{m'}{\sqrt{1 + m'^2 + n'^2}} = a' : a$$

$$(\iota) \quad \frac{n}{\sqrt{1 + m^2 + n^2}} : \frac{n'}{\sqrt{1 + m'^2 + n'^2}} = b' : b.$$

Ex proportionibus (ζ) et (η) obtinemus aequationes

$$(\varkappa) \quad \frac{a^2 m'^2}{1 + m'^2 + n'^2} = \frac{a'^2 m^2}{1 + m^2 + n^2}$$

$$(\lambda) \quad \frac{b^2 n'^2}{1 + m'^2 + n'^2} = \frac{b'^2 n^2}{1 + m^2 + n^2}$$

vel

$$m'^2(a^2(1 + n^2) + (a^2 - a'^2)\, n^2) = a'^2 m^2 + a'^2 m^2 n'^2$$

$$n'^2(b^2(1 + m^2) + (b^2 - b'^2) m^2) = b'^2 n^2 + b'^2 n^2 m'^2$$

Quibus ex aequationibus pro m'^2 atque n'^2 invenitur

$$(\mu) \quad m'^2 = \frac{a'^2 b^2 m^2}{a^2 b^2 + (a^2 - a'^2)\,(b^2 m^2 + a^2 n^2)}$$

$$(\nu) \quad n'^2 = \frac{a^2 b'^2 n^2}{a^2 b^2 + (a^2 - a'^2)\,(b^2 m^2 + a^2 n^2)}$$

si in reducendis expressionibus pro m'^2 atque n'^2 simul aequatio (γ) respiciatur.

Eodem modo ex proportionibus (ϑ) et (ι) obtinebimus aequationes hasce:

$$\frac{a'^2m'^2}{1+m'^2+n'^2}=\frac{a^2m^2}{1+m^2+n^2}$$

et

$$\frac{b'^2n'^2}{1+m'^2+n'^2}=\frac{b^2n^2}{1+m^2+n^2}$$

atque igitur inveniemus

$$m'^2=\frac{a^2b'^2m^2}{a'^2b'^2+(a'^2-a^2)(b'^2m^2+a'^2n^2)}$$

$$n'^2=\frac{a'^2b^2n^2}{a'^2b'^2+(a'^2-a^2)(b'^2m^2+a'^2n^2)}.$$

Ut coordinatae punctorum intersectionis lineae transversalis (δ) cum utraque superficie inveniantur, in aequationibus (α) atque (β) valores (δ) sunt substituendi, atque postea valores pro x, y, z respective definiendi. Reductione facta invenietur:

$$x=\frac{-a^2b^2m\zeta\pm abcm\sqrt{a^2b^2+(b^2m^2+a^2n^2)(c^2-\zeta^2)}}{a^2b^2+c^2(b^2m^2+a^2n^2)}$$

$$y=\frac{-a^2b^2n\zeta\pm abcn\sqrt{a^2b^2+(b^2m^2+a^2n^2)(c^2-\zeta^2)}}{a^2b^2+c^2(b^2m^2+a^2n^2)}$$

$$z=\frac{c^2\zeta(b^2m^2+a^2n^2)\pm abc\sqrt{a^2b^2+(b^2m^2+a^2n^2)(c^2-\zeta^2)}}{a^2b^2+c^2(b^2m^2+a^2n^2)}$$

atque

$$x'=\frac{-a'^2b'^2m\zeta\pm a'b'c'm\sqrt{a'^2b'^2+(b'^2m^2+a'^2n^2)(c'^2-\zeta^2)}}{a'^2b'^2+c'^2(b'^2m^2+a'^2n^2)}$$

$$y'=\frac{-a'^2b'^2n\zeta\pm a'b'c'n\sqrt{a'^2b'^2+(b'^2m^2+a'^2n^2)(c'^2-\zeta^2)}}{a'^2b'^2+c'^2(b'^2m^2+a'^2n^2)}$$

$$z'=\frac{c'^2\zeta(b'^2m^2+a'^2n^2)\pm a'b'c'\sqrt{a'^2b'^2+(b'^2m^2+a'^2n^2)(c'^2-\zeta^2)}}{a'^2b'^2+c'^2(b'^2m^2+a'^2n^2)}.$$

Similiter coordinatae punctorum, in quibus altera linea transversalis utramque superficiem secat, appellantur. In his expressionibus m atque n tantum cum m′ atque n′ commutandum est. Partes igitur in prima linea transversali per utramque superficiem abscissae, sunt hae:

$$s=\frac{2abc}{a^2b^2+c^2(b^2m^2+a^2n^2)}\cdot\sqrt{(1+m^2+n^2)(a^2b^2+(b^2m^2+a^2n^2)(c^2-\zeta^2))}$$

atque

$$s'=\frac{2a'b'c'}{a'^2b'^2+c'^2(b'^2m^2+a'^2n'^2)}\cdot\sqrt{(1+m^2+n^2)(a^2b^2+(b^2m^2+a^2n^2)(c^2-\zeta^2))}.$$

Eodem modo partes, per superficies respective in altera linea transversali abscissae, appellantur

$$s_{,}=\frac{2abc}{a^2b^2+c^2(b^2m'^2+a^2n'^2)}\cdot\sqrt{(1+m'^2+n'^2)(a^2b^2+(b^2m'^2+a^2n'^2)(c^2-\zeta^2))}$$

atque

$$s_{,}'=\frac{2a'b'c'}{a'^2b'^2+c'^2(b'^2m'^2+a'^2n'^2)}\cdot\sqrt{(1+m'^2+n'^2)(a'^2b'^2+(b'^2m'^2+a'^2n'^2)(c'^2-\zeta^2))}.$$

Habemus nunc

$$\frac{s}{s,'}=\frac{2abc(a'^2b'^2+c'^2(b'^2m'^2+a'^2n'^2))}{2a'b'c'(a^2b^2+c^2(b^2m^2+a^2n^2))}\sqrt{\frac{(1+m^2+n^2)(a^2b^2+(b^2m^2+a^2n^2))(c^2-\zeta^2)}{(1+m'^2+n'^2)(a'^2b'^2+(b'^2m'^2+a'^2n'^2))(c'^2-\zeta^2)}}.$$

Aequatio ($\varkappa$) sequenti modo scribi potest:

$$\sqrt{\frac{1+m^2+n}{1+m'^2+n'^2}}=\sqrt{\frac{a'^2m}{a^2m'^2}}$$

vel valore pro m'^2 ex (μ) substituto

$$\sqrt{\frac{1+m^2+n^2}{1+m'^2+n'^2}}=\frac{1}{ab}\sqrt{a^2b^2+(a^2-a'^2)\,(b^2m^2+a^2n^2)}.$$

Invenitur porro variis reductionibus factis

$$a'^2b'^2+c'^2(b'^2m'^2+a'^2n'^2)=\frac{a'^2b'^2\,(a^2b^2+(b^2m^2+a^2n^2)\,c^2)}{a^2b^2+(a^2-a'^2)(b^2m^2+a^2n^2)}.$$

Quibus inventis expressionibus substitutis obtinebimus aequationem

$$\frac{s}{s,'}=\frac{2abc.\ a'^2b'^2}{2a'b'c'.\ aa'bb'}=\frac{c}{c'}$$

vel proportionem

$s : s,' = c : c'$.

Eodem modo proportio

$s' : s, = c' : c$

invenitur, q. e. d.

B) Cosinus angulorum, quos ambae lineae transversales cum axi z formant, sunt respective

$$\cos.\ \varphi=\frac{1}{\sqrt{1+m^2+n^2}}\ \text{atque}\ \cos.\ \varphi'=\frac{1}{\sqrt{1+m'^2+n'^2}}.$$

Eorum sinus sunt igitur

$$\sin.\ \varphi=\sqrt{\frac{m^2+n^2}{1+m^2+n^2}}$$

et

$$\sin.\ \varphi'=\sqrt{\frac{m'^2+n'^2}{1+m'^2+n'^2}}.$$

Planum diametrale, ad quod hic z-axis est perpendicularis, est coordinatum planum xy, cujus aequatio $z=o$ appellatur. Aequatione hujus plani cum aequationibus utriusque lineae transversalis conjuncta, respective coordinatae punctorum intersectionis harum linearum transversalium cum xy-plano inveniuntur:

$$x=-m\zeta$$
$$y=-n\zeta$$
$$z=o$$

et

$$x=-m'\zeta$$
$$y=-n'\zeta$$
$$z=o.$$

Utraque diameter respective per haec inventa puncta transiens, in xy-plano jacebit. Erunt igitur eaedem ut diametri per xy-planum ex utraque superficie respective ex secatarum sectionum conicarum, quarum aequationes

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=o \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a'^2}+\dfrac{y^2}{b'^2}=1 \\ z=o \end{cases}$$

nominantur. Aequatio diametri, per punctum $x=-m\zeta$, $y=-n\zeta$, $z=o$ transeuntis, erit nunc:

$$\begin{cases} y=\dfrac{n}{m}x \\ z=o. \end{cases}$$

Ejus longitudo erit igitur

$$d=2ab\sqrt{\frac{m^2+n^2}{b^2m^2+a^2n^2}}.$$

Longitudo alterius diametri erit similis

$$d'=2a'b'\sqrt{\frac{m'^2+n'^2}{b'^2m'^2+a'^2n'^2}}$$

vel valoribus (γ) ($\varkappa$) (μ) atque (ν) respectis

$$d'=2\sqrt{\frac{a'^2b^2m^2+a^2b'^2n^2}{b^2m^2+a^2n^2}}.$$

Est autem proportio

$$\sin.\varphi:\sin.\varphi'=\sqrt{\frac{m^2+n^2}{1+m^2+n^2}}:\sqrt{\frac{m'^2+n'^2}{1+m'^2+n'^2}}$$

vel necessariis substitutionibus factis

$$\frac{\sin.\varphi}{\sin.\varphi'}=\frac{2ab\sqrt{\dfrac{m^2+n^2}{b^2m^2+a^2n^2}}}{2\sqrt{\dfrac{a'^2b^2m^2+a^2b'^2n^2}{b^2m^2+a^2n^2}}}.$$

C) Invenitur

$$\frac{d^2}{4}-\frac{d'^2}{4}=a^2-a'^2$$

id est: utraque diameter in duobus correspondentibus punctis superficiebus occurrit. Quae diametri igitur sibi correspondent.

5. Si duae superficies secundi ordinis sint confocales atque si per rectam in uno earum trium planorum diametralium (principalium) positam lineam, duo plana tangentialia ducantur, cosinus angulorum, quos haec plana cum principali, ad hoc planum perpendicu-

lari axi formant, ita se habent, ut superficierum ad hunc axem directae diametri. Superficies confocales habeant aequationes

$$(\alpha)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$(\beta)\ \frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}+\frac{z^2}{c'^2}=1$$

ubi est conditio confocalitatis haecce:

$$(\gamma)\ a^2-a'^2=b^2-b'^2=c^2-c'^2.$$

Aequatio lineae rectae, in xy-plano positae, sit

$$(\delta)\ \begin{cases} y=mx+\mu \\ z=o. \end{cases}$$

Si autem aequationes planorum tangentialium appellentur

$$(\varepsilon)\ Ax+By+Cz=D$$

$$(\zeta)\ A'x+B'y+C'z=D'$$

aequationes conditionales locum habere debent:

$$(\eta)\ A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2-D^2=o$$

$$(\vartheta)\ A'^2a'^2+B'^2b'^2+C'^2c'^2-D'^2=o.$$

Quoniam recta linea (δ) in utroque plano (ε) (ζ) posita esse debet, habemus sequentes aequationes conditionales

$$(\iota)\ A+Bm=o$$

$$(\varkappa)\ D'-B\mu=o$$

et

$$(\lambda)\ A'+B'm=o$$

$$(\mu)\ D'-B'\mu=o.$$

Sinus autem angulorum, quos haec duo plana cum axi ad xy-planum perpendiculari formant, sunt respective:

$$\sin.\ v=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\sin.\ w=\frac{C'}{\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

Erit igitur

$$(\nu)\ \cos.\ v=\sqrt{\frac{A^2+B^2}{A^2+B^2+C^2}}$$

$$(o)\ \cos.\ w=\sqrt{\frac{A'^2+B'^2}{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

Aequationibus (η) usque ad (μ) utentes, incognitas quantitates A, A' etc. definiemus. Ex (ι) atque ($\varkappa$) invenitur

$$A=-Bm \text{ atque } D=B\mu.$$

Quibus valoribus positis, aequatio (η) ita scribi potest:

$$B^2(a^2m^2+b^2-\mu^2)+C^2c^2=o$$

unde eruitur

$$\frac{B^2}{C^2}=\frac{c^2}{\mu^2-b^2-a^2m^2}.$$

Erit igitur

$$\frac{A^2}{C^2} = \frac{c^2 m^2}{\mu^2 - b^2 - a^2 m^2}.$$

Eodem modo obtinebimus

$$\frac{B'^2}{C'^2} = \frac{c'^2}{\mu^2 - b'^2 - a'^2 m^2}$$

atque

$$\frac{A'^2}{C'^2} = \frac{c'^2 m^2}{\mu^2 - b'^2 - a'^2 m^2}.$$

Quibus valoribus in expressionibus pro cos. v atque cos. w positis, invenietur

$$\cos. v = \sqrt{\frac{c^2(1+m^2)}{c^2(1+m^2)+\mu^2 - b^2 - a^2 m^2}}$$

et

$$\cos. v' = \sqrt{\frac{c'^2(1+m^2)}{c'^2(1+m^2)+\mu^2 - b'^2 - a'^2 m^2}}.$$

Si nunc cos. v per cos. v' dividamus, obtinemus

$$\frac{\cos. v}{\cos. v'} = \sqrt{\frac{c^2(m^2(c'^2 - a'^2) + (c'^2 - b'^2) + \mu^2)}{c'^2(m^2(c^2 - a^2) + (c^2 - b^2) + \mu^2)}}$$

vel aequatione (γ) respecta

$$\frac{\cos. v}{\cos. v'} = \frac{c}{c'}$$

id est

$$\cos. v : \cos. v' = c : c'$$

q. e. d.

6. Punctum intersectionis trium ad se invicem perpendicularium planorum, quae tres confocales superficies respective tangunt, in sphaera positum erit. Tres confocales superficies habeant aequationes

$$(\alpha)\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$(\beta)\ \frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1$$

$$(\gamma)\ \frac{x^2}{a''^2} + \frac{y^2}{b''^2} + \frac{z^2}{c''^2} = 1$$

ubi conditiones confocalitatis sunt haece:

(δ) $a^2 - a'^2 = b^2 - b'^2 = c^2 - c'^2$

(ε) $a^2 - a''^2 = b^2 - b''^2 = c^2 - c''^2$.

Aequationes trium planorum universaliter appellentur

(ζ) $y = Ax + Cz + D$

(η) $y = A'x + C'z + D'$

(ϑ) $y = A''x + C''z + D''$.

Quoniam haec plana tres superficies secundi ordinis (α) (β) (γ) tangere debent, sequentes aequationes conditionales esse oportet

$$(\iota)\quad A^2 a^2 + b^2 + C^2 c^2 - D^2 = o$$
$$(\varkappa)\quad A'^2 a'^2 + b'^2 + C'^2 c'^2 - D'^2 = o$$
$$(\lambda)\quad A''^2 a''^2 + b''^2 + C''^2 c''^2 - D''^2 = o$$

et quoniam ad se invicem eadem plana perpendicularia sunt, habemus etiam aequationes

$$(\mu)\quad 1 + AA' + CC' = o$$
$$(\nu)\quad 1 + AA'' + CC'' = o$$
$$(o)\quad 1 + A'A'' + C'C'' = o.$$

Ut relationem inter communes coordinatas puncti, in quo tria plana tangentialia se mutuo secant, obtineamus, ex superioribus conditionalibus aequationibus, quantitates A, A', B, B' etc. sunt eliminandae.

Ex aequationibus (μ) atque (ν) invenitur

$$(\pi)\quad C''(1 + AA') - C'(1 + AA'') = o$$

atque ex aequationibus (o) atque (π) obtinetur

$$C' = \sqrt{-\frac{(1 + AA')(1 + A'A'')}{1 + AA''}}$$

Eodem modo invenitur

$$C'' = \sqrt{-\frac{(1 + AA'')(1 + A'A'')}{1 + AA'}}$$

atque

$$C = \sqrt{-\frac{(1 + AA')(1 + AA'')}{1 + A'A''}}$$

Si his valoribus pro C, C' atque C'' inventis utentes, valores ex aequationibus (ζ) (η) (ϑ) pro D, D' atque D'' erutos atque hos valores pro C, C', C'' ipsos in aequationibus (ι) $(\varkappa)$ (λ) ponamus, inveniemus

$$(\rho)\quad \begin{aligned} &A^2(1+A'A'')x^2+(1+A'A'')y^2-(1+AA')(1+AA'')z^2-2A(1+A'A'')xy \\ &+2AWxz-2Wyz-A^2(1+A'A'')a^2-(1+A'A'')b^2+(1+AA')(1+AA'')c^2=o \end{aligned}$$

$$(\sigma)\quad \begin{aligned} &A'^2(1+AA'')x^2+(1+AA'')y^2-(1+A'A'')(1+AA')z^2-2A'(1+AA'')xy \\ &+2A'Wxz-2Wyz-A'^2(1+AA'')a'^2-(1+AA'')b'^2+(1+A'A'')(1+AA')c'^2=o \end{aligned}$$

$$(\tau)\quad \begin{aligned} &A''^2(1+AA')x^2+(1+AA')y^2-(1+AA'')(1+A'A'')z^2-2A''(1+AA')xy \\ &+2A''Wxz-2Wyz-A''^2(1+AA')a''^2-(1+AA')b''^2+(1+AA'')(1+A'A'')c''^2=o \end{aligned}$$

ubi brevitatis caussa

$$W = \sqrt{-(1+AA')(1+AA'')(1+A'A'')}$$

positum est. Aequatione (τ) ab aequatione (σ) atque aequatione (σ) ab aequatione (ρ) subtractis, nonnullisque reductionibus factis, invenitur

$$\begin{aligned} &(A'+A''+AA'A'')x^2-Ay^2-A(1+A'A'')z^2-2xy+2Wxz \\ &+A(1+A'A'')c'^2-A'(1+AA'')a'^2-A''a''^2+A(a''^2-a'^2+b'^2)=o \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(A+A'+AA'A'')x^2-A''y^2-A''(1+AA')z^2-2xy+2Wxz+ \\ &A''(1+AA')c^2-A(1+A'A'')a^2-A'a'^2+A''(a'^2-a^2+b^2)=o \end{aligned}$$

unde duobus his aequationibus a se subtractis denique sequens sphaerae quaesitae aequatio eruitur:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a''^2 + b'^2 + c^2.$$

Radius hujus sphaerae habet valorem

$$r = \sqrt{a''^2 + b'^2 + c^2}.$$

Nota. Omittere non possum hujus theorematis simpliciorem et elegantiorem demonstrationem, quae mihi communicata est.

Notum est, si longitudo perpendiculi ab initio coordinatarum ad quodlibet planum demissi (P) nominetur atque si anguli, quos cum singulis axibus coordinatis x, y, z format, sint α, β, γ, hoc planum habere aequationem hancce:

(a) $\cos.\alpha.\ x + \cos.\beta.\ y + \cos.\gamma.\ z = P.$

Si igitur duo alia plana simili modo appellentur

(b) $\cos.\alpha'.\ x + \cos.\beta'.\ y + \cos.\gamma'.\ z = P'$

(c) $\cos.\alpha''.\ x + \cos.\beta''.\ y + \cos\gamma''.\ z = P''$

et si conditio, ut haec tria plana ad se invicem sint perpendicularia, respiciatur, relationes, quae inter cosinus horum novem angulorum locum habent, in sequentibus expressionibus, ut est notum, sunt comprehensae:

$$\cos.\alpha.\ \cos.\alpha' + \cos.\beta.\ \cos.\beta' + \cos.\gamma.\ \cos.\gamma' = 0$$
$$\cos.\alpha.\ \cos.\alpha'' + \cos.\beta.\ \cos.\beta'' + \cos.\gamma.\ \cos.\gamma'' = 0$$
$$\cos.\alpha'.\ \cos.\alpha'' + \cos.\beta'.\cos.\beta'' + \cos.\gamma'.\ \cos.\gamma'' = 0$$
$$\cos.\alpha.\ \cos.\beta. + \cos.\alpha'.\cos.\beta' + \cos.\alpha''\cos.\beta'' = 0$$
$$\cos.\alpha.\ \cos.\gamma. + \cos.\alpha'.\cos.\gamma' + \cos.\alpha''\cos.\gamma'' = 0$$
$$\cos.\beta.\ \cos.\gamma. + \cos.\beta'.\cos.\gamma.' + \cos.\beta''\cos.\gamma'' = 0$$

et

$$\cos.^2\alpha + \cos.^2\beta + \cos.^2\gamma = 1$$
$$\cos.^2\alpha' + \cos.^2\beta' + \cos.^2\gamma' = 1$$
$$\cos.^2\alpha'' + \cos.^2\beta'' + \cos.^2\gamma'' = 1$$
$$\cos.^2\alpha + \cos.^2\alpha' + \cos.^2\alpha'' = 1$$
$$\cos.^2\beta + \cos.^2\beta' + \cos.^2\beta'' = 1$$
$$\cos.^2\gamma + \cos.^2\gamma' + \cos.^2\gamma'' = 1$$

Quum autem plana (a), (b), (c) tangant superiores propositas superficies (α), (β), (γ), habemus aequationes

(d) $a^2 \cos.^2\alpha + b^2 \cos.^2\beta + c^2 \cos.^2\gamma = P^2$

(e) $a'^2 \cos.^2\alpha' + b'^2 \cos.^2\beta' + c'^2 \cos.^2\gamma' = P'^2$

(f) $a''^2 \cos.^2\alpha'' + b''^2 \cos.^2\beta'' + c''^2 \cos.^2\gamma'' = P''^2$

Addendo quadrata aequationum (a), (b), (c) atque postea respiciendo in iis superiores relationes invenitur

(g) $x^2 + y^2 + z^2 = P^2 + P'^2 + P''^2$

aequationibus autem (d), (e), (f) additis et conditionibus confocalitatis (δ), (ε) superficierum (α), (β), (γ) in iis respectis obtinetur

$$a^2\cos.^2\alpha + b^2\cos.^2\beta + c^2\cos.^2\gamma + (a^2 + b'^2 - b^2)\cos.^2\alpha'$$
$$+ b'^2\cos.^2\beta' + (c^2 + b'^2 - b^2)\cos.^2\gamma' + (a^2 + b''^2 - b^2)\cos.^2\alpha''$$
$$+ b''^2\cos.^2\beta'' + (c^2 + b''^2 - b^2)\cos.^2\gamma'' = P^2 + P'^2 + P''^2$$

vel relationibus superioribus consideratis

$$a^2 + c^2 + b'^2 + b''^2 + b^2\cos.^2\beta - b^2(\cos.^2\alpha' + \cos.^2\alpha'' + \cos.^2\gamma' + \cos.^2\gamma'') = P^2 + P'^2 + P''^2$$

vel

$$a^2 + c^2 + b'^2 + b''^2 - b^2 = P^2 + P'^2 + P''^2$$

i. e.

$$a''^2 + b'^2 + c^2 = P^2 + P'^2 + P''^2.$$

Erit igitur

$$x^2 + y^2 + z^2 = a''^2 + b'^2 + c^2$$

aequatio quaesitae sphaerae, cujus radius est:

$$r = \sqrt{a''^2 + b'^2 + c^2}$$

q. e. d.

7. Si per utramque excentricam sectionem conicam superficiei secundi gradus planum transversale ducatur atque si polus lineae, in qua hoc planum plano uniuscujusque earum sectionum conicarum

occurrit, ad hanc curvam sumatur, linea recta, hunc utrumque polum conjungens, ad planum transversale perpendicularis erit. Superficies habeat aequationem

$$(\alpha)\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

Aequationes utriusque excentricae sectionis conicae erunt tunc

$$(\beta)\ \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2-c^2}+\dfrac{y^2}{b^2-c^2}=1\\ z=o\end{cases}$$

atque

$$(\gamma)\ \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2-b^2}+\dfrac{z^2}{c^2-b^2}=1\\ y=o.\end{cases}$$

Ut aequatio lineae intersectionis plani transversalis

$$(\delta)\ Ax+By+Cz=D$$

cum planis, in quibus sectiones conicae (β) atque (γ) jacent, igitur cum planis $z=o$ atque $y=o$ inveniatur, valores $y=o$ et $z=o$ in aequatione (δ) sunt substituendi. Quae lineae erunt igitur

$$(\varepsilon)\ \begin{cases}Ax+By=D\\ z=o\end{cases}$$

atque

$$(\zeta)\ \begin{cases}Ax+Cz=D\\ y=o.\end{cases}$$

Aequatio autem lineae polaris puncti ξ, η, ζ ad primam sectionem conicam sumtae, est

$$(\eta)\ \begin{cases}\dfrac{x\xi}{a^2-c^2}+\dfrac{y\eta}{b^2-c^2}=1\\ \zeta=o\end{cases}$$

atque aequatio lineae polaris alii puncti ξ', η', ζ' ad secundam sectionem conicam sumtae nominabitur

$$(\vartheta)\ \begin{cases}\dfrac{x\xi'}{a^2-c^2}+\dfrac{z\zeta'}{c^2-b^2}=1\\ \eta=o.\end{cases}$$

Quoniam lineae intersectionis (ε) et (ζ) ad sectiones conicas sumtae respective polares esse debent, necesse est, ut aequationes (ε) atque (η), aeque ac aequationes (ζ) atque (ϑ) sibi sint identicae, si earum poli ξ, η, ζ atque ξ', η', ζ' respective nominentur. Ex aequationibus comparatis (ε) atque (η) habemus coordinatas poli primae lineae intersectionis

$$\xi=\frac{A}{D}(a^2-c^2),\ \eta=\frac{B}{D}(b^2-c^2),\ \zeta=o.$$

Aequationibus autem (ζ) atque (ϑ) secum comparatis coordinatae poli alterius lineae intersectionis

$$\xi'=\frac{A}{D}(a^2-b^2),\ \eta'=o \text{ atque } \zeta'=\frac{C}{D}(c^2-b^2)$$

inveniuntur. Aequatio lineae rectae, polos ξ, η, ζ atque ξ', η', ζ' secum conjungentis est nunc

$$\begin{cases} x-\xi=\frac{\xi-\xi'}{\zeta-\zeta'}(z-\zeta) \\ y-\eta=\frac{\eta-\eta'}{\zeta-\zeta'}(z-\zeta) \end{cases}$$

ubi x, y, z currentes coordinatae nominantur. Pro ξ, η, ζ atque ξ', η', ζ' inventos valores substituentes habebimus aequationem

$$(\iota)\quad \begin{cases} x=\frac{A}{C}z-\frac{A}{D}(c^2-a^2) \\ y=\frac{B}{C}z-\frac{B}{D}(c^2-b^2) \end{cases}$$

quae est aequatio lineae ad planum (δ) perpendicularis, q. e. d.

A d n o t a t i o. Si hoc planum transversale superficiem secundi ordinis (α) in puncto ξ'', η'', ζ'' tangat, linea recta (ι) in hoc puncto superficiei normalis erit.

Planum superficiem (α) tangens habet aequationem

$$(\varkappa)\quad \frac{x\xi''}{a^2}+\frac{y\eta''}{b^2}+\frac{z\zeta''}{c^2}=1.$$

Comparatis autem secum aequationibus (δ) atque ($\varkappa$) invenietur

$$A=\frac{D\xi''}{a^2},\ B=\frac{D\eta''}{b^2},\ C=\frac{D\zeta''}{c^2}$$

Quibus valoribus in aequatione (ι) substitutis, sequens aequatio

$$\begin{cases} x=\frac{c^2\xi''}{a^2\zeta''}z-\frac{\xi''}{a^2}(c^2-a^2) \\ y=\frac{c^2\eta''}{b^2\zeta''}z-\frac{\eta''}{b^2}(c^2-b^2) \end{cases}$$

obtinetur. Haec aequatio repraesentat autem aequationem normalis ad punctum ξ'', η'', ζ'' superficiei (α) ductae lineae.

II.

Omnia theoremata, quae apud confocales superficies secundi ordinis, unum tantum centrum habentes, adducta demonstrataque erant, etiam apud superficies, quae nullum centrum habent, vel quae permultis centris gaudent, id est apud paraboloides, quarum aequatio in simplicissima forma

$$y^2+\alpha^2x^2=2pz$$

ubi α^2 non solum signum positivum, sed etiam signum negativum habere potest (prout paraboloides est elliptica vel hyperbolica), nominatur, facile intelligi demonstrarique possunt.

THESES DEFENDENDAE.

1. Logica est mathematicae anima, omniaque logici systematis membra mathematici systematis membris respondent.
2. Reflexio atque combinatio est rerum mathematicarum fons.
3. Geometria omnia theoremata a priori deducit; sed formas in tabula describens cogitata mentis a posteriori significat.
4. Attentio est mater observationum.
5. Omnis scientia ad rerum naturam historiamque spectans in fide constat.
6. Fides est passiva, mens autem activa cognitionis certitudo.
7. Vera persuasio est certissima, sanctissima fortissimaque fides.
8. Qui deum negat, etiam se ipsum negat.
9. Dubito, ergo cogito.
10. Essentia sine forma non invenitur.
11. Ubi veritas, ibi scientia; ubi utraque, ibi cognitio.
12. Perceptio ita se habet ad imaginationem, sicut corpus ad animam.
13. Persuasio est hominum potestas, factum autem hominum opus.
14. Multitudo sensationum, perceptorum atque recordationum in notionis valentia comprehensa ejus corpus, unitas autem in notione vivens ejus animam repraesentat.

Vita.

Natus sum Boleslaus Stanislaus Szenic, fidei catholicae addictus, die I mens. Maji anni hujus seculi XXXI in vico, cui nomen est Bieczyny prope oppidum Czempiń in regione Costensi sito, parentibus Johanne, qui nunc officiis administratoris rei rusticae in vico Psarskie prope oppidum Pniewy in regione Samotulensi sito fungitur, et Maria, e gente Bartkowiacana. Primis literarum elementis a ludi magistro in vico Srocko, prope oppidum Czempiń sito, Carissimo Hojański imbutus, postea autem literarum ad adeundum gymnasium necessariarum privatim capax factus, anno aetatis tertio decimo gymnasium Posnaniense ad Stam Mariam Magdalenam, quod t. t. directore Cel. Prabucki florebat, frequentare coepi, unde sex annis post testimonio maturitatis a Clarissimo Doctissimo directore Brettner instructus hanc almam literarum Universitatem adii Viadrinam et Rectore Magnifico Ill. Barkow inter cives academicos receptus apud philosophos decano Ill. Ambrosch nomen dedi. Per hoc temporis spatium me docuerunt Viri Clarissimi, Illustrissimi, Doctissimi:

Mathesin, Kummer et Galle; physicen Frankenheim et Kirchhoff; astronomiam Galle; chemiam Bunsen, Loewig et Duflos;

botanicen Goeppert; mineralogiam et geologiam Glocker et Scharenberg; philosophiam Braniss, Elvenich, Groeger et Ogiński; zoologiam Gravenhorst et Siebold; historiam Roepell; aestheticen Kahlert; literaturam polonicam Kraiński.

Quibus omnibus viris optime de me meritis pro doctrinis mihi oblatis gratias me agere, quam maximas possim, semperque acturum esse profiteor.