



UNIWERSYTET
EKONOMICZNY
W POZNANIU

Joanna Siwek

Portfel aktywów finansowych z wartością
bieżącą obarczoną ryzykiem nieprecyzyjności

Financial asset portfolio with present value
burdened with imprecision risk

Praca doktorska
powstała w ramach projektu badawczego finansowanego przez
Narodowe Centrum Nauk nr 2015/17/N/HS4/00206

Promotor: Prof. dr hab. Krzysztof Piasecki

Promotor pomocniczy: dr Anna Łyczkowska-Hanćkowiak

Pracę przyjęto dnia 15 05 2017

podpis Promotora

Wydział: Zarządzania

Katedra: Inwestycji i Nieruchomości

Poznań 2017

Autorka chciałaby bardzo podziękować
prof. dr hab. Krzysztofowi Piaseckiemu
oraz dr Annie Łyczkowskiej-Hanćkowiak
za wyrozumiałość, poświęcony czas i życzliwość
oraz wsparcie zarówno merytoryczne jak i
motywacyjne.

Spis treści

Wprowadzenie	5
Rozdział I 1.Zbiory rozmyte jako narzędzie zarządzania nieprecyzyjnością w warunkach niepewności.....	10
1.1. Niepewność i nieprecyzyjność	10
1.2. Zbiory i liczby rozmyte	12
1.3. Miary nieprecyzyjności	22
Rozdział II Nieprecyzyjne oceny korzyści z posiadania instrumentu finansowego	28
2.1. Nieprecyzyjne oceny instrumentów finansowych w literaturze	28
2.2. Nieprecyzyjna wartość bieżąca	30
2.3. Nieprecyzyjna stopa zwrotu	37
2.4. Miary ryzyka nieprecyzyjności dla oczekiwanych rozmytych stóp zwrotu	45
2.5. Rozmyty czynnik dyskontujący	49
2.6. Miary energii i entropii dla rozmytego czynnika dyskontującego	55
2.7. Wnioski	58
Rozdział III Portfel dwuskładnikowy wartością bieżącą daną trójkątną liczbą rozmytą – studium przypadku	59
3.1. Stopa zwrotu z portfela dwuskładnikowego	59
3.2. Czynnik dyskontujący portfela dwuskładnikowego	64
3.3. Składanie portfela dwuskładnikowego	67
3.4. Studium przypadku	69
3.5. Podsumowanie	71
Rozdział IV Portfel wieloskładnikowy z wartością bieżącą dana trójkątną liczbą rozmytą.....	73
4.1. Przypadek wartości bieżącej danej trójkątną liczbą rozmytą.....	73
4.1.1. Stopa zwrotu z portfela wieloskładnikowego.....	73
4.1.2. Czynnik dyskontujący z portfela wieloskładnikowego.....	77
4.1.3. Składanie portfela wieloskładnikowego.....	79
4.1.4. Studium przypadku.....	80
4.2. Przypadek wartości bieżącej danej trójkątną dyskretną liczbą rozmytą	83
4.2.1. Stopa zwrotu z portfela wieloskładnikowego.....	83
4.2.2. Czynnik dyskontujący z portfela wieloskładnikowego.....	86
4.3. Podsumowanie	88

Rozdział V Portfel wieloskładnikowy z wartością bieżącą dana trapezoidalną liczbą rozmytą.....	89
5.1. Przypadek wartości bieżącej danej trapezoidalną liczbą rozmytą	89
5.1.1. Stopa zwrotu z portfela wieloskładnikowego.....	89
5.1.2. Czynniki dyskontujący z portfela wieloskładnikowego.....	92
5.1.3. Składanie portfela wieloskładnikowego.....	94
5.1.4. Studium przypadku.....	95
5.2. Przypadek wartości bieżącej danej trapezoidalną dyskretną liczbą rozmytą.....	97
5.2.1. Stopa zwrotu z portfela wieloskładnikowego.....	97
5.2.2. Czynniki dyskontujący z portfela wieloskładnikowego.....	100
5.3. Podsumowanie	102
Rozdział VI Zebranie i podsumowanie badań.....	103
6.1. Wnioski ogólne	103
6.2. Kierunki dalszych badań	105
6.3. Zakończenie	106
Bibliografia	107
Spis tabel i rysunków	112
Spis symboli	114
Dodatek A.....	116
Dodatek B.....	125

Wprowadzenie

Przesłanek powstania poniższej rozprawy należy szukać w zachodzących na rynku paradoksach sugerujących, że założenie o silnej efektywności rynku może nie być w pełni spełnione. Pomimo założenia, że wszyscy inwestorzy kierują się ścisłym racjonalizmem oraz że posiadają dostęp do tych samych informacji w tym samym czasie, nadal niemożliwe jest wykluczenie ryzyka, którym obarczone jest podejmowanie decyzji inwestorskich.

Prezentowana praca zawiera wnikliwą analizę przyczyn, skutków i zachowania się ryzyka obarczającego instrumenty finansowe oraz złożone z nich portfele, a którego przyczyną jest nieprecyzyjność wyznaczenia wartości bieżącej tych instrumentów. W rozprawie autorka skupia się na aspektach teoretycznych oraz praktycznych zastosowaniach prezentowanej teorii.

Dużą część pracy stanowią przykłady akademickie oraz symulacje oparte na danych rzeczywistych, których celem jest omówienie możliwości zastosowania budowanej teorii w praktyce inwestycyjnej. Prezentowane narzędzia mają bardzo szerokie możliwości poszerzenia oraz modyfikacji, dlatego też mogą być użyte jako część składowa obszerniejszych narzędzi wsparcia decyzyjnego.

Cele i hipotezy badawcze

Autorka postawiła sobie następujące **cele badawcze**:

1. Cel nadrzędny: *Opis zależności pomiędzy ryzykiem niepewności i nieprecyzyjności obarczającymi portfel aktywów finansowych a ryzykiem niepewności i nieprecyzyjności obarczającymi jego składniki.*
2. Cele szczegółowe:
 - a) *Opis zależności pomiędzy ryzykiem niepewności i nieprecyzyjności obarczającymi portfel aktywów finansowych a ryzykiem niepewności i nieprecyzyjności obarczającymi jego składniki z wartością bieżącą modelowaną trójkątną liczbą rozmytą.*
 - b) *Opis zależności pomiędzy ryzykiem niepewności i nieprecyzyjności obarczającymi portfel aktywów finansowych a ryzykiem niepewności i nieprecyzyjności obarczającymi jego składniki z wartością bieżącą modelowaną dyskretną trójkątną liczbą rozmytą.*

- c) *Opis zależności pomiędzy ryzykiem niepewności i nieprecyzyjności obarczającymi portfel aktywów finansowych a ryzykiem niepewności i nieprecyzyjności obarczającymi jego składniki z wartością bieżącą modelowaną trapezoidalną liczbą rozmytą.*
- d) *Opis zależności pomiędzy ryzykiem niepewności i nieprecyzyjności obarczającymi portfel aktywów finansowych a ryzykiem niepewności i nieprecyzyjności obarczającymi jego składniki z wartością bieżącą modelowaną dyskretną trapezoidalną liczbą rozmytą.*

Realizacja przedstawionych celów służyła weryfikacji przyjętych w pracy **hipotez badawczych**:

1. Hipoteza główna: *Tworzenie portfela aktywów finansowych służące obniżeniu ryzyka niepewności nie zmniejsza ryzyka nieprecyzyjności.*
2. Hipotezy pomocnicze:
 - a) *Podczas tworzenia portfela obciążonego ryzykiem nieprecyzyjności obniżenie ryzyka niepewności zwrotu z tego portfela nie powoduje obniżenia ryzyka nieprecyzyjności oceny zwrotu.*
 - b) *Możliwe jest uzasadnienie drogą dedukcji sformułowania zadania maksymalizacji zysku i minimalizacji ryzyka niepewności dla portfela obciążonego nieprecyzyjnością wyznaczenia wartości bieżącej danej trójkątną, trapezoidalną lub dyskretną liczbą rozmytą.*

Źródła i metody badawcze oraz zakres badań empirycznych

W poniższej pracy badania nad wpływem ryzyka nieprecyzyjności na ryzyko portfela inwestycyjnego są przeprowadzone głównie na podstawie dogłębnych studiów literaturowych. Poprzez analizę istniejących modeli ryzyka portfela oraz przy użyciu metody dedukcji formalnej utworzone zostaną nowe, bardziej rzeczywiste i łatwiejsze do zastosowania w praktyce.

Praca zawiera wyniki, które autorka opublikowała w cyklu artykułów naukowych dotyczących portfeli dwu- i wieloskładnikowych uwzględniających ryzyko nieprecyzyjności. Każdy z artykułów ma swoje odbicie w jednym z rozdziałów lub podrozdziałów pracy oraz jest w nim cytowany.

Metodą weryfikacji poprawności każdego z badanych modeli będą symulacje zachowania w przypadku różnych wartości parametrów ryzyka. Zostaną one przeprowadzone w programie Matlab. Wykonane analizy pozwalają na opisanie własności portfeli

obarczonych ryzykiem nieprecyzyjności, która wyrażona jest w postaci rozważanych liczb rozmytych. Ponadto możliwe jest zbadanie zależności pomiędzy różnymi typami ryzyka dla określonych modeli. Prowadzi to do postawienia tezy na temat składania portfeli obarczonych ryzykiem nieprecyzyjności.

W pracy duży nacisk jest położony na sformułowanie możliwie najmniejszej liczby pewników, pozwalających na zamodelowanie sytuacji rynkowej przy jednoczesnym ujęciu całej teorii portfela w sposób możliwie łatwy do interpretacji, implementacji komputerowej oraz zastosowania w praktyce. Na podstawie analizy literaturowej uzasadniona zostanie celowość wyprowadzonej teorii. Jednym z podstawowych zadań będzie również wykazanie opisowej i wyjaśniającej funkcji budowanej teorii oraz jej własności użytkowe.

Badania nad wpływem ryzyka nieprecyzyjności określenia wartości bieżącej na portfel inwestycyjny są podzielone na rozważania na temat portfela złożonego z dwóch lub dowolnej, skończonej liczby instrumentów finansowych. Dla każdego z tych przypadków omówiona zostanie sytuacja, kiedy wartość bieżąca instrumentu dana jest nieprecyzyjnie przy pomocy trójkątnej, trapezoidalnej lub dyskretnej liczby rozmytej. Przeprowadzone rozważania ograniczają się do sytuacji, kiedy proste stopy zwrotu z instrumentu określone są rozkładem normalnym. Zakładana jest również niezmienność innych (prócz ryzyka) parametrów wpływających na portfel.

Dla dwóch i wielu instrumentów składowych oraz dla każdej z rozważanych postaci ich wartości bieżącej zbadane zostaną własności skonstruowanego portfela, a ponadto charakter obarczającego go ryzyka niepewności oraz nieprecyzyjności, wyrażonych wieloznacznością i nieostrością. Główna część pracy opiera się na określeniu zależności pomiędzy tak zdefiniowanymi rodzajami ryzyka oraz budową portfela a postacią każdego z nich. Następnie przeprowadzona zostanie analiza wrażliwości na czynniki ryzyka.

Ostatnim elementem opisu każdego z modeli będzie sformułowanie zadania maksymalizacji zysku dla portfela złożonego z instrumentów obarczonych ryzykiem nieprecyzyjności wyznaczenia wartości bieżącej przy równoczesnej minimalizacji ryzyka obarczającego ten portfel.

Układ i treść rozprawy

Realizacji celów i weryfikacji postawionych hipotez badawczych zostały podporządkowane układ i treść rozprawy. Składa się ona z 6 rozdziałów, wstępu, zakończenia oraz ze spisu bibliografii, tabel i rysunków. Integralną część stanowi także aneks.

W **pierwszym rozdziale** autorka wyjaśnia podstawowe terminy wykorzystywane w dalszych częściach pracy, w tym pojęcia niepewności i nieprecyzyjności oraz związane z nimi miary ryzyka obarczającego instrument finansowy. Ponadto wprowadzona zostaje definicja samego portfela oraz wartości bieżącej instrumentu.

W drugiej części rozdziału przedstawione są studia literaturowe oddające obecny stan wiedzy na temat nieprecyzyjnie określonej wartości bieżącej oraz zwrotów z portfeli uwzględniających ryzyko nieprecyzyjności. W sposób chronologiczny nakreślona jest ewolucja modeli aż do momentu obecnego wraz ze wskazaniem ciągów przyczynowo skutkowych, zależności między modelami oraz ich wyraźnymi wadami i zaletami. Przedstawione są prace na temat zbiorów i liczb rozmytych oraz ich zastosowania w obliczaniu wartości bieżącej, wartości bieżącej netto i stóp zwrotu. Omówione zostają również dotychczasowe badania na temat prób stworzenia zadania maksymalizacji dla rozmytych zwrotów z portfela inwestycyjnego. Na koniec podane są wydedukowane na podstawie studiów literaturowych warianty wartości bieżących, na których opierać się będzie badana teoria portfela.

W rozdziale tym omówiony zostaje również niezbędny aparat matematyczny oraz finansowy potrzebny do przeprowadzenia badań. Wyjaśnione są pojęcia zbioru rozmytego, liczby rozmytej, wprowadzone działania na liczbach rozmytych oraz rozmyta arytmetyka finansowa. Ponadto podane zostają ogólne wzory miar energii i entropii mierzących ryzyko nieprecyzyjności.

W **drugim rozdziale** wprowadzone są pojęcia rozmytej wartości bieżącej i zwrotu z instrumentu finansowego oraz metoda ich wyznaczania. Następnie porównane zostają rozmyte stopy zwrotu z poszczególnych instrumentów oraz rozmyte czynniki dyskontujące. Rozdział stanowi podstawę opisu stopy zwrotu uwzględniającej nieprecyzyjność oraz czynnika dyskontującego dla różnych wariantów wartości bieżących rozważanych w kolejnych częściach pracy.

Trzeci rozdział zawiera rozważania na temat portfela dwuskładnikowego z wartością bieżącą instrumentów daną trójkątną liczbą rozmytą. Budowany jest portfel oraz zostają wyszczególnione zależności pomiędzy wspomnianymi typami ryzyka oraz pomiędzy ryzykiem a postacią portfela. Dodatkowo przeprowadzona jest analiza wrażliwości portfela na różne czynniki ryzyka jak również wrażliwość ryzyka nieprecyzyjności na zmiany wysokości stopy zwrotu bądź czynnika dyskontującego.

W ostatniej części rozdziału sformułowane jest zadanie minimalizacji ryzyka. Rozumowania są poparte symulacjami komputerowymi zachowania portfela oraz przykładami numerycznymi na sztucznych oraz rzeczywistych danych.

W **rozdziale czwartym** następuje powtórzenie przeprowadzonego w rozdziale trzecim rozumowania dla portfela wieloskładnikowego z wartością bieżącą instrumentów daną trójkątną oraz dyskretną trójkątną liczbą rozmytą. Jest to poszerzenie rozdziału drugiego na przypadek bardziej ogólny. W rozdziale tym ponownie największy nacisk położony został na określenie zależności pomiędzy różnymi rodzajami ryzyka oraz pomiędzy ryzykiem a budową portfela.

Schemat **rozdziału piątego** pokrywa się z kształtem rozdziału czwartego. Przeprowadzone zostają badania o podanej wcześniej strukturze, tym razem dla przypadku jeszcze bardziej ogólnego, to jest wartości bieżącej instrumentu danej jako trapezoidalna liczba rozmyta. Określone zostają postaci ryzyka i odpowiednie zależności, jak również zadanie minimalizacji ryzyka dla portfela.

W **zakończeniu** sformułowane zostały ogólne wnioski płynące z przeprowadzonych badań, ich oddziaływanie na rzeczywistość finansową oraz znaczenie dla rozwoju dziedziny.

Na końcu pracy znajduje się **bibliografia, spis tabel i rysunków, spis znaków i symboli** oraz **aneks**.

1. Zbiory rozmyte jako narzędzie zarządzania nieprecyzyznością w warunkach niepewności

W poniższym rozdziale wprowadzone zostaną podstawowe pojęcia używane w pracy takie jak ryzyko, niepewność i nieprecyzyzność oraz elementy teorii zbiorów rozmytych stosowanych do ich opisu.

1.1. Niepewność i nieprecyzyzność

Knight [1921] podał klasyfikację niepewności, która zdaje się być dzisiaj nieaktualna. Zdefiniował *niepewność sensu largo* jako stan wiedzy/umiejętności spowodowany przez dysponowanie niedoskonałą, niepełną lub całkowicie nieznaną informacją. Ponadto stwierdził, że ta część niepewności, która jest wywoływana jedynie przez informację niepełną, może być scharakteryzowana ilościowo (niepewność kwantyfikowalna). Jako model tego typu niepewności Knight zaproponował stosowanie prawdopodobieństwa w ówczesnym tego słowa znaczeniu [Piasecki, 2016]. Wspomniana niepewność sensu largo może być źródłem pewnego ryzyka.

Ryzyko, według *Wielkiego Słownika Języka Polskiego* [2017], oznacza „możliwość, że stanie się coś złego; działanie o nieznanym skutkach czy zdarzenie mogące spowodować szkody w majątku podlegającym ubezpieczeniu”. Słowo to jest w powszechnym rozumieniu nacechowane negatywnie, dlatego za Piaseckim [2016] przyjmujemy, że jest to „możliwość zajścia negatywnych skutków podjętych działań”.

Niepewność w teorii ekonomii, rozumiana za Kaplanem [1967] czy von Misesem [1957] oznacza brak wiedzy o przyszłym stanie świata, czyli wystąpienie takiej sytuacji, w której określone warianty decyzyjne mogą spowodować różne następstwa w zależności od tego, który ze stanów świata zajdzie. Ze skutkami podjęcia decyzji w warunkach niepewności wiąże się ryzyko niepewności. Jest to ryzyko podjęcia nietrafnej decyzji związane z brakiem wiedzy o przyszłym stanie otoczenia, mającego wpływ na wynik podjętej decyzji.

Powszechnie używanym narzędziem pomiaru niepewności jest rachunek prawdopodobieństwa. Wykorzystane w rozprawie podstawy rachunku prawdopodobieństwa można znaleźć na przykład w [Krzyśko, 2000].

Podczas podejmowania decyzji w warunkach niepewności w rozumieniu Kaplana i von Misesa oraz przy zastosowaniu narzędzi probabilistycznych, decydent nadal nie ma wystarczającej wiedzy o przyszłych skutkach swojej decyzji. Sugeruje to istnienie, innych niż niepewność, czynników wpływających na ryzyko decyzyjne.

Powodem występowania wspomnianego ryzyka jest nieprecyzyjność informacji wykorzystywanej podczas podejmowaniu decyzji. Jej źródeł można szukać w wielu miejscach. Jednym z nich jest z pewnością subiektywizm podmiotu wybierającego i interpretującego informację, którą ma zamiar się posłużyć. Nieprecyzyjność może objawiać się tu w dysonansie poznawczym, relatywizmie odbioru tego samego bodźca, różnych poziomach intelektualnych podmiotów, szeroko zdefiniowanych różnicach pomiędzy nadawcą a odbiorcą informacji, doświadczeniu a nawet w cechach osobowości.

Drugim ważnym źródłem występowania zjawiska nieprecyzyjności informacji jest niedoskonałość sprzętu i istniejącej wiedzy o świecie. Może ona przejawiać się w niedokładności narzędzi pomiarowych, niewystarczającym aparacie teoretycznym, nakładaniu się błędów obliczeniowych. Z drugiej strony mamy również do czynienia z relatywizmem zjawisk oraz fizycznymi ograniczeniami, niepozwalającymi na dokonanie precyzyjnego pomiaru czy dokładnej obserwacji. Zjawiska te widoczne są również w wykorzystywanym sprzęcie komputerowym, narażonym na opóźnienia (choćby bardzo niewielkie), starzenie się technologii czy subiektywny dobór algorytmów.

Nieprecyzyjność jest zjawiskiem w swoim charakterze nacechowanym negatywnie. Może obarczać na przykład podejmowane decyzje lub pomiary czyli informację, która jest następnie wykorzystywana w dalszych badaniach. Skutkiem wystąpienia nieprecyzyjności informacji jest możliwość pojawienia się negatywnych następstw jej użycia. Taka możliwość nazywana jest ryzykiem nieprecyzyjności, czyli inaczej ryzykiem, którego źródłem jest nieprecyzyjność.

Powszechnie jako nieprecyzyjność informacji rozumie się jej nieostrość oraz wieloznaczność [Klir, 1993]. Wieloznaczność interpretujemy jako brak jednoznacznego wyróżnienia spośród sugerowanych alternatyw decyzyjnych. Nieostrość interpretujemy natomiast jako brak jednoznacznego rozróżnienia pomiędzy daną informacją a jej zaprzeczeniem.

Wzrost wieloznaczności oznacza, że zwiększać się będzie ilość alternatywnych wyborów. Powoduje to zwiększenie ryzyka wybrania spośród rekomendowanych opcji decyzyjnych takiej nietrafnej, która *ex post* zostanie obciążona stratą utraconych korzyści. Ryzyko to nazywamy ryzykiem wieloznaczności.

Wzrost nieostrości oznacza zacieranie się granic wyróżniających rekomendowane alternatywy decyzyjne. Powoduje to, że zwiększa się ryzyko podjęcia decyzji nierekomendowanej. Nazywamy je ryzykiem nieostrości.

Naturalnym modelem matematycznym pozwalającym na uwzględnienie nieprecyzyjności jest zbiór rozmyty. Pojęcie to zostało wprowadzone przez Zadeha [1965]. Teorię zbiorów rozmytych uporządkowali i rozpowszechnili Dubois i Prade [1980] oraz Zimmerman [1990]. Na tak określonym aparacie matematycznym, zawężonym następnie do liczb rozmytych, powstała arytmetyka rozmyta.

1.2. Zbiory i liczby rozmyte

Dowolny zbiór definiujemy za pomocą funkcji $\varphi_A: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{P}$, $A \subset \mathbb{X}$ następująco

$$A = \{x \in \mathbb{X}: \varphi_A(x), \varphi_A \in \mathbb{P}^{\mathbb{X}}\}, \quad (1.1)$$

gdzie funkcję zdaniową $\varphi_A \in \mathbb{P}^{\mathbb{X}}$ nazywamy predyktorem zbioru $A \subset \mathbb{X}$.

W klasycznym rachunku zdań, zdaniem w sensie logicznym nazywamy takie stwierdzenie, o którym możemy jednoznacznie orzec, czy jest prawdziwe czy fałszywe. Przestrzeń wszystkich zdań logicznych oznaczamy za pomocą symbolu $\mathbb{P}_0 \subset \mathbb{P}$. Prawdziwemu zdaniu logicznemu $\mathcal{p} \in \mathbb{P}_0$ możemy przypisać wartość logiczną **T** (prawda)

$$v(\mathcal{p}) = \mathbf{T}, \quad (1.2)$$

a fałszywemu wartość logiczną **F** (fałsz)

$$v(\mathcal{p}) = \mathbf{F}. \quad (1.3)$$

W ten sposób nad przestrzenią \mathbb{P}_0 wszystkich możliwych zdań logicznych rozpinamy funkcję ewaluacji logicznej $v: \mathbb{P}_0 \rightarrow \{\mathbf{F}; \mathbf{T}\}$. Na zbiorze \mathbb{P}_0 określamy działania negacji (\neg), alternatywy (\vee), koniunkcji (\wedge), implikacji (\implies) i równoważności (\iff).

Problemem logiki klasycznej jest nie uwzględnianie intuicyjnego odczucia, że jedno stwierdzenie „jest bardziej prawdziwe” niż inne. Pierwszym formalnym rozwiązaniem tego zagadnienia były logiki wielowartościowe Łukasiewicza [1922]. Przedmiotem rozważań w logice wielowartościowej są te stwierdzenia, dla których istnieje jednoznacznie określony liniowy porządek „nie mniej prawdziwe”. Dowolne stwierdzenie spełniające ten warunek nazywamy wypowiedzią. Przestrzeń wszystkich wypowiedzi oznaczamy przez $\mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}$. Każdej wypowiedzi $\mathcal{p} \in \mathbb{P}_1$ przypisujemy jej wartość logiczną $\tilde{v}(\mathcal{p})$ rozumianą jako funkcja

użyteczności relacji „nie mniej prawdziwe”. Oznacza to, że jeśli p jest „nie mniej prawdziwa” niż q , to wtedy

$$\tilde{v}(p) \geq \tilde{v}(q). \quad (1.4)$$

Każdemu pewnikowi $p \in \mathbb{P}_1$ przypisujemy jego wartość logiczną

$$\tilde{v}(p) = 1, \quad (1.5)$$

a każdemu zdaniu niemożliwemu

$$\tilde{v}(p) = 0. \quad (1.6)$$

W ten sposób nad przestrzenią \mathbb{P}_1 wszystkich wypowiedzi rozpinamy funkcję ewaluacji $\tilde{v}: \mathbb{P}_1 \rightarrow [0; 1]$ [Piasecki, 2016].

Podstawowym narzędziem opisu nieprecyzyjności są zbiory rozmyte. Formalne pojęcie to zostało zaproponowane w [Negoița, Ralescu, 1975], gdzie zbiór rozmyty A opisany jest przez funkcję przynależności $\mu_A \in [0; 1]^{\mathbb{X}}$, jako zbiór par uporządkowanych

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in \mathbb{X}\}. \quad (1.7)$$

Rodzinę wszystkich zbiorów rozmytych postaci (1.7) oznaczamy przez $\mathcal{F}(\mathbb{X})$.

Funkcja przynależności, po długotrwałej dyskusji ([Giles, 1976], [Gottwald, 1979], [Lee, Chang, 1979] i [Wygralak, 1985]), jest interpretowana w świetle teorii logik wielowartościowych Łukasiewicza [1922]. Dla każdego zbioru rozmytego $A \in \mathcal{F}(\mathbb{X})$ wartość funkcji przynależności $\mu_A(x)$ jest identyfikowana z wartością logiczną wypowiedzi $x \in A$. Dzięki temu zbiór rozmyty postaci (1.1) możemy zapisać w równoważnej postaci

$$A = \{x \in \mathbb{X}: \varphi_A(x), \varphi_A \in \mathbb{P}_1^{\mathbb{X}}\}, \quad (1.8)$$

gdzie

$$\mu_A(x) = \tilde{v}(\varphi_A(x)). \quad (1.9)$$

Wnioskujemy stąd, że rodzina funkcji przynależności $[0; 1]^{\mathbb{X}}$ i rodzina zbiorów rozmytych $\mathcal{F}(\mathbb{X})$ są izomorficzne.

Niech $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ oznacza rodzinę wszystkich podzbiorów rozmytych na prostej rzeczywistej \mathbb{R} . Liczbę rozmytą definiujemy za Dubois i Prade [1980] jako podzbiór rozmyty $\mathcal{L} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ o ograniczonym nośniku

$$\mathbb{S}(\mathcal{L}) = \{x \in \mathbb{R}: \mu_{\mathcal{L}}(x) > 0\} \quad (1.10)$$

i reprezentowany przez swą funkcję przynależności $\mu_{\mathcal{L}} \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$ spełniającą warunki:

$$\exists_{x \in \mathbb{S}(\mathcal{L})} \mu_{\mathcal{L}}(x) = 1, \quad (1.11)$$

$$\forall_{(x,y,z) \in (\mathbb{S}(\mathcal{L}))^3} x \leq y \leq z \Rightarrow \mu_{\mathcal{L}}(y) \geq \min\{\mu_{\mathcal{L}}(x); \mu_{\mathcal{L}}(z)\}. \quad (1.12)$$

W oryginalnej pracy Dubois i Prade liczba rozmyta została zdefiniowana jako taki zbiór rozmyty spełniający warunki (1.11) i (1.12), którego nośnik jest przedziałem na prostej rzeczywistej, natomiast funkcja przynależności jest półciągła z góry. Ze względu na potrzebę wprowadzenia powstałych 20 lat później dyskretnych liczb rozmytych, w poniższej pracy liczbę rozmytą będziemy definiować jak wyżej.

Rozważmy teraz parę liczb rozmytych (Q, \mathcal{R}) wraz z odpowiadającymi im funkcjami przynależności $\mu_Q \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$ i $\mu_{\mathcal{R}} \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$. Zgodnie z zasadą rozszerzenia Zadeha, suma $Q \oplus \mathcal{R}$ jest również liczbą rozmytą opisaną funkcją przynależności $\mu_{Q \oplus \mathcal{R}} \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$, gdzie

$$\mathbb{S}(Q \oplus \mathcal{R}) = \{z \in \mathbb{R}: \exists_{(x;y) \in \mathbb{S}(Q) \times \mathbb{S}(\mathcal{R})}: z = x + y\}, \quad (1.13)$$

$$\mu_{Q \oplus \mathcal{R}}(z) = \sup\{\min\{\mu_Q(x); \mu_{\mathcal{R}}(y)\}: (x; y) \in \mathbb{R}^2, z = x + y\}. \quad (1.14)$$

Podobnie, przemnożenie liczby rozmytej \mathcal{R} przez skalar $r \in \mathbb{R}^+$ definiujemy jako iloczyn $r \odot \mathcal{R}$ opisany funkcją przynależności $\mu_{r \odot \mathcal{R}} \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$, gdzie

$$\mathbb{S}(r \odot \mathcal{R}) = \{z \in \mathbb{R}: \exists_{y \in \mathbb{S}(\mathcal{R})}: z = r \cdot y\}, \quad (1.15)$$

$$\mu_{r \odot \mathcal{R}}(z) = \mu_{\mathcal{R}}\left(\frac{z}{r}\right).$$

Rozważane dalej w pracy dyskretne liczby rozmyte, które zostały po raz pierwszy wprowadzone przez Voxmana [2001], mogą być traktowane jako szczególny przypadek liczby rozmytej $\mathcal{L} \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, której nośnik jest zbiorem skończonym

$$\mathbb{S}(\mathcal{L}) \subset Nod(\mathcal{L}) = \{x_1^{\mathcal{L}}, x_2^{\mathcal{L}}, \dots, x_{n_{\mathcal{L}}}^{\mathcal{L}}, n_{\mathcal{L}} \in \mathbb{N}\}, \quad (1.16)$$

gdzie zbiór $Nod(\mathcal{L})$ nazywamy siatką dyskretyzacji.

Przykład 1.1

Na potrzeby tego rozdziału zdefiniujemy przykładową siatkę dyskretyzacji

$$\text{Nod}(\mathcal{L}|0,01) = \{0,01 \cdot i : i \in \mathbb{N}\}.$$

□

Arytmetykę tego typu liczb badali m.in. Guixiang Wang i Cheng Lin Wen [2007] oraz Guixiang Wang, Qing Zhang i Xianjun Cui [2008]. Natomiast Vincente Riera i Torrens [2014], [2015] zastosowali dyskretne liczby rozmyte do modelowania niekompletnej informacji ilościowej.

W literaturze przedmiotu, ze względu na swoje zastosowania oraz możliwości interpretacyjne parametrów, rozważa się kilka charakterystycznych rodzajów liczb rozmytych. Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a \leq b \leq c$ trójkątna liczba rozmyta $T(a; b; c)$ jest zdefiniowana przez funkcję przynależności $\mu_T(\cdot | a; b; c): \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ określoną następująco

$$\mu_T(x|a; b; c) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{dla } a \leq x < b, \\ 1 & \text{dla } x = b, \\ \frac{x-c}{b-c} & \text{dla } b < x \leq c, \\ 0 & \text{dla } x < a \vee x > c, \end{cases} \quad (1.17)$$

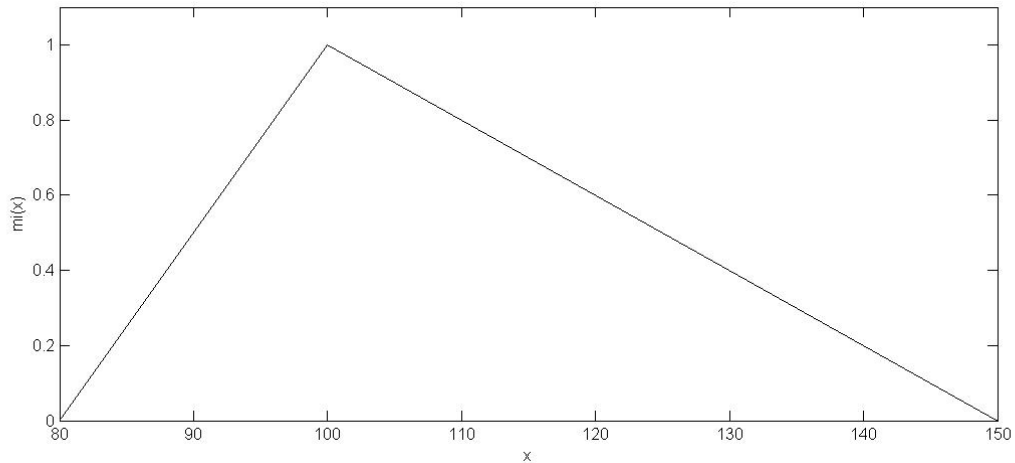
gdzie nośnik jest postaci $\mathbb{S}(T(a; b; c)) =]a; c[$.

Przykład 1.2

Funkcja przynależności przykładowej trójkątnej liczby rozmytej $T(80; 100; 150)$ dana jest wzorem

$$\mu_T(x) = \begin{cases} \frac{x-80}{20} & \text{dla } 80 \leq x < 100, \\ 1 & \text{dla } x = 100, \\ \frac{x-150}{-50} & \text{dla } 100 < x \leq 150, \\ 0 & \text{dla } x < 80 \vee x > 150. \end{cases}$$

i została przedstawiona na Rysunku 1.1.



Rys. 1.1 Wykres funkcji przynależności przykładowej trójkątnej liczby rozmytej $T(80; 100; 150)$

□

Zgodnie z (1.13) i (1.14) suma dowolnych trójkątnych liczb rozmytych $T(a_1; b_1; c_1)$ oraz $T(a_2; b_2; c_2)$ jest również trójkątną liczbą rozmytą

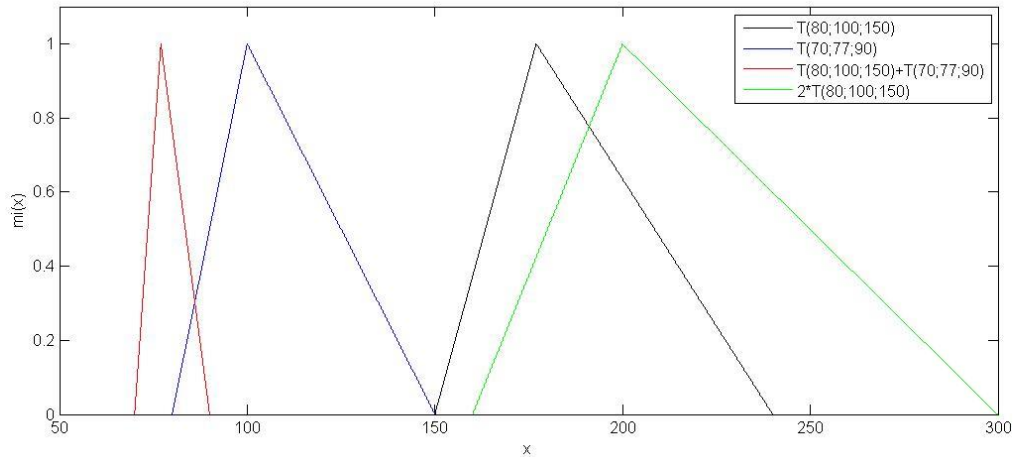
$$T(a_1; b_1; c_1) \oplus T(a_2; b_2; c_2) = T(a_1 + a_2; b_1 + b_2; c_1 + c_2). \quad (1.18)$$

Podobnie w przypadku mnożenia przez skalar mamy

$$r \odot T(a_1; b_1; c_1) = T(r \cdot a_1; r \cdot b_1; r \cdot c_1). \quad (1.19)$$

Przykład 1.3

Funkcje przynależności przykładowych trójkątnych liczb rozmytych $T(80; 100; 150)$ i $T(70; 77; 90)$, ich sumy oraz mnożenia przez skalar została przedstawiona na Rysunku 1.2. Warto zauważyć, że zarówno suma trójkątnych liczb rozmytych jak i trójkątna liczba rozmyta przemnożona przez skalar są nadal trójkątnymi liczbami rozmytymi.



Rys. 1.2 Wykresy funkcji przynależności przykładowych trójkątnych liczb rozmytych $T(80; 100; 150)$ i $T(70; 77; 90)$, ich sumy oraz mnożenia przez skalar równy 2

□

Dla dowolnych $a \leq b \leq c \leq d$ trapezoidalna liczba rozmyta $Tr(a; b; c; d)$ to liczba rozmyta dana funkcją przynależności $\mu_{Tr}(\cdot | a; b; c; d): \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$

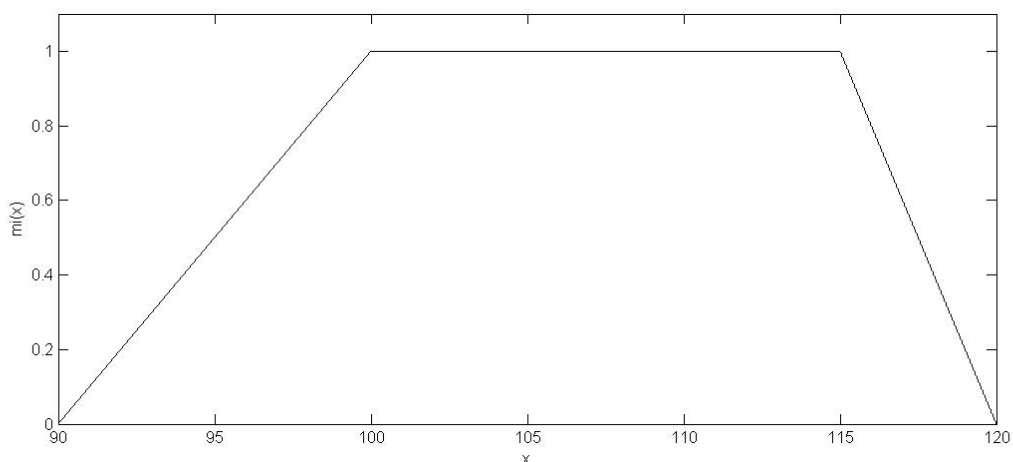
$$\mu_{Tr}(x|a; b; c; d) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{dla } a \leq x < b, \\ 1 & \text{dla } b \leq x \leq c, \\ \frac{x-d}{c-d} & \text{dla } c < x \leq d, \\ 0 & \text{dla } x < a \vee x > d, \end{cases} \quad (1.20)$$

gdzie nośnik jest postaci $\mathbb{S}(Tr(a; b; c; d)) =]a; d[$.

Przykład 1.4

Funkcja przynależności przykładowej trapezoidalnej liczby rozmytej $Tr(90; 100; 115; 120)$, przedstawionej na Rysunku 1.3., ma postać

$$\mu_{Tr}(x) = \begin{cases} \frac{x-90}{10} & \text{dla } 90 \leq x < 100, \\ 1 & \text{dla } 100 \leq x \leq 115, \\ \frac{x-120}{-5} & \text{dla } 115 < x \leq 120, \\ 0 & \text{dla } x < 90 \vee x > 120. \end{cases}$$



Rys. 1.3 Wykres funkcji przynależności przykładowej trapezoidalnej liczby rozmytej $Tr(90; 100; 115; 120)$

□

Zgodnie z (1.13) i (1.14) suma dowolnych trapezoidalnych liczb rozmytych $Tr(a_1; b_1; c_1; d_1)$ oraz $Tr(a_2; b_2; c_2; d_2)$ jest trapezoidalną liczbą rozmytą

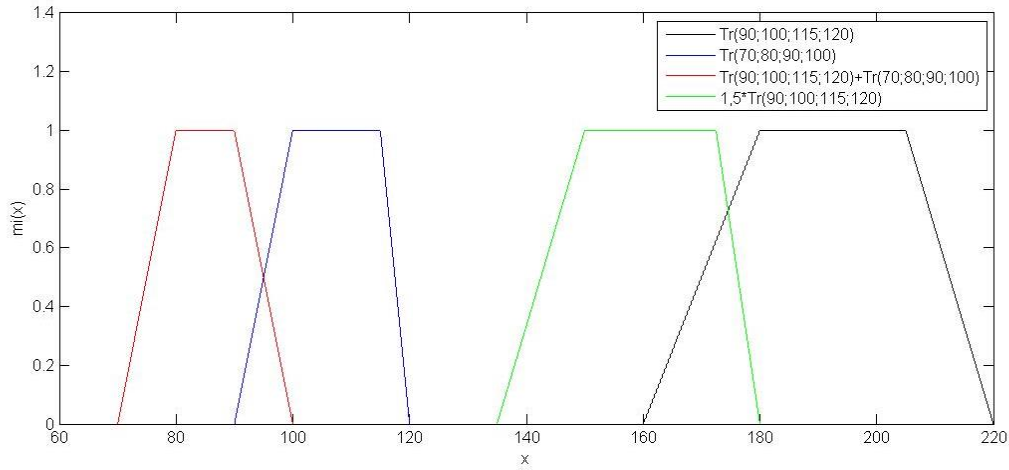
$$Tr(a_1; b_1; c_1; d_1) \oplus Tr(a_2; b_2; c_2; d_2) = Tr(a_1 + a_2; b_1 + b_2; c_1 + c_2; d_1 + d_2). \quad (1.21)$$

Podobnie w przypadku mnożenia przez skalar

$$r \odot Tr(a_1; b_1; c_1; d_1) = Tr(r \cdot a_1; r \cdot b_1; r \cdot c_1; r \cdot d_1). \quad (1.22)$$

Przykład 1.5

Funkcje przynależności przykładowych trapezoidalnych liczb rozmytych $Tr(90; 100; 115; 120)$ i $Tr(70; 80; 90; 100)$, ich sumy oraz mnożenia przez skalar 1,5 zostały pokazane na Rysunku 1.4. Warto zauważyć, że suma trapezoidalnych liczb rozmytych oraz trapezoidalna liczba rozmyta przemnożona przez skalar są nadal trapezoidalnymi liczbami rozmytymi.



Rys. 1.4 Wykres funkcji przynależności przykładowych trapezoidalnych liczb rozmytych $Tr(90; 100; 115; 120)$ i $Tr(70; 80; 90; 100)$, ich sumy oraz mnożenia przez skalar 1,5

□

Trapezoidalna dyskretna liczba rozmyta stanowi szczególny przypadek dyskretnej liczby rozmytej i analogicznie jak w [Wang, Qing Zhang, Xianjun Cui, 2008] definiujemy ją jako czwórkę $DTr(a; b; c; d)$ z nośnikiem $\mathbb{S}(DTr(a; b; c; d)) \subset Nod(\mathcal{L})$ oraz funkcją przynależności $\mu_{DTr} \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$ taką, że dla $x \in \mathbb{S}(DTr(a; b; c; d))$

$$\mu_{DTr}(x|a; b; c; d) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{dla } a \leq x < b, \\ 1 & \text{dla } b \leq x \leq c, \\ \frac{x-d}{c-d} & \text{dla } c < x \leq d, \\ 0 & \text{dla } x < a \vee x > d. \end{cases} \quad (1.23)$$

Przykład 1.6

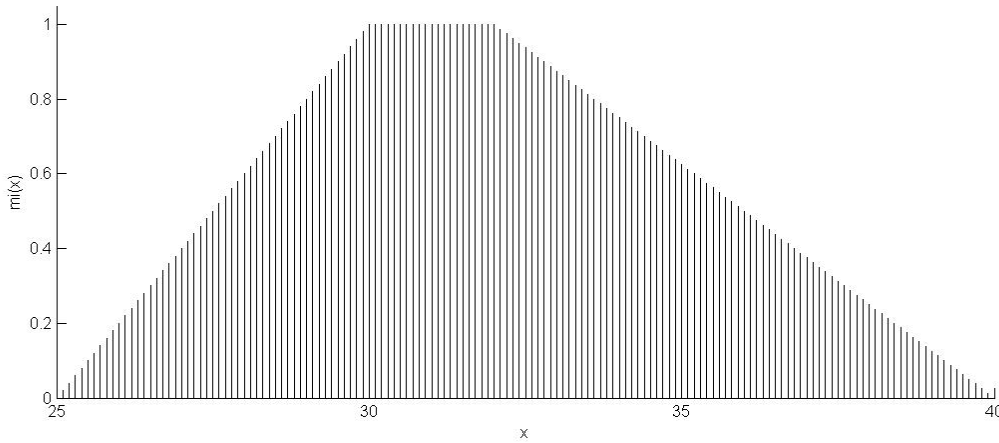
Funkcja przynależności przykładowej trapezoidalnej dyskretnej liczby rozmytej $DTr(25; 30; 32; 40)$, $\mathbb{S}(DTr(25; 30; 32; 40)) \subset Nod(\mathcal{L}|0,01)$ dana jest wzorem

$$\mu_{DT}(x) = \begin{cases} \frac{x-25}{5} & \text{dla } 25 \leq x < 30, \\ 1 & \text{dla } 30 \leq x \leq 32, \\ \frac{x-40}{-8} & \text{dla } 32 < x \leq 40, \\ 0 & \text{dla } x < 25 \vee x > 40, \end{cases}$$

co jest równoważne

$$\mu_{DT}(i) = \begin{cases} \frac{100 \cdot i - 25}{5} & \text{dla } 2500 \leq i < 3000, \\ 1 & \text{dla } 3000 \leq i \leq 3200, \\ \frac{i - 40}{-8} & \text{dla } 3200 < i \leq 4000, \\ 0 & \text{dla } i < 2500 \vee i > 4000. \end{cases}$$

Wykres funkcji przynależności do trapezoidalnej dyskretnej liczby rozmytej wyrażonej powyższym wzorem przedstawiony jest na Rysunku 1.5.



Rys. 1.5 Wykres funkcji przynależności przykładowej trapezoidalnej dyskretnej liczby rozmytej $DTr(25; 30; 32; 40)$

□

Podobnie jak w przypadku trapezoidalnych liczb rozmytych, suma dowolnych dyskretnych trapezoidalnych liczb rozmytych $DTr(a_1; b_1; c_1; d_1)$ oraz $DTr(a_2; b_2; c_2; d_2)$, z $\mathbb{S}(DTr(a_1; b_1; c_1; d_1)) \subset Nod(\mathcal{L})$ i $\mathbb{S}(DTr(a_2; b_2; c_2; d_2)) \subset Nod(\mathcal{L})$ jest również dyskretną trapezoidalną liczbą rozmytą

$$DTr(a_1; b_1; c_1; d_1) \oplus DTr(a_2; b_2; c_2; d_2) = DTr(a_1 + a_2; b_1 + b_2; c_1 + c_2; d_1 + d_2) \quad (1.24)$$

z nośnikiem

$$\begin{aligned} & \mathbb{S}(DTr(a_1 + a_2; b_1 + b_2; c_1 + c_2; d_1 + d_2)) \\ & = \{x_i = 0,01i; 100(a_1 + a_2) < i < 100(d_1 + d_2), \quad i \in \mathbb{N}\} \subset Nod(\mathcal{L}). \end{aligned}$$

Podobnie w przypadku mnożenia przez skalar

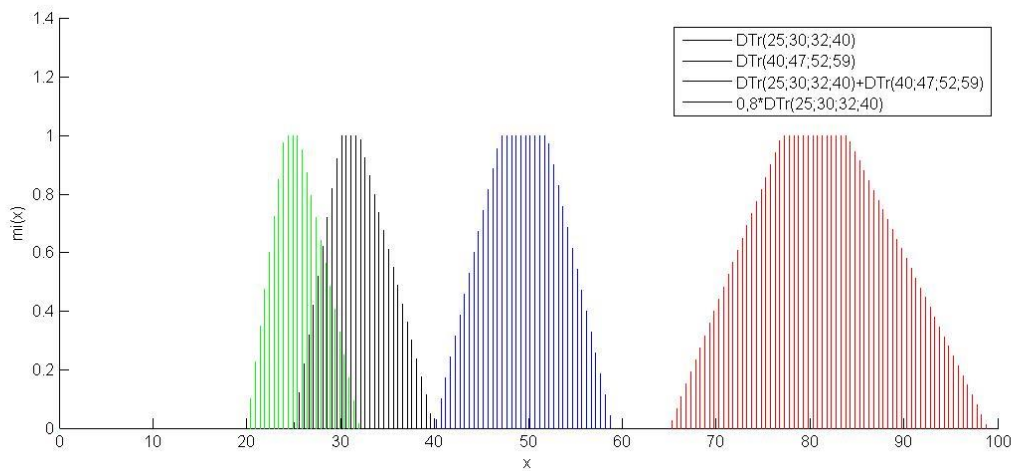
$$r \cdot DTr(a_1; b_1; c_1; d_1) = DTr(r \cdot a_1; r \cdot b_1; r \cdot c_1; r \cdot d_1) \quad (1.25)$$

z nośnikiem $\mathbb{S}(rDTr(a_1; b_1; c_1; d_1)) = \{0,01i: 100ra_1 < i < 100rd_1, i \in \mathbb{N}\} \subset Nod(\mathcal{L})$.

Warto zauważyć, że zarówno suma trapezoidalnych dyskretnych liczb rozmytych jak i trapezoidalna dyskretna liczba rozmyta przemnożona przez skalar są nadal trapezoidalnymi dyskretnymi liczbami rozmytymi.

Przykład 1.7

Wykresy funkcji przynależności przykładowych trapezoidalnych dyskretnych liczb rozmytych $DTr(25; 30; 32; 40)$ i $DTr(40; 47; 57; 59)$, ich sumy oraz mnożenia przez skalar równy 0,8 zostały przedstawione na Rysunku 1.6.



Rys. 1.6 Wykresy funkcji przynależności przykładowych trapezoidalnych dyskretnych liczb rozmytych $DTr(25; 30; 32; 40)$ i $DTr(40; 47; 57; 59)$, ich sumy oraz mnożenia przez skalar równy 0,8

□

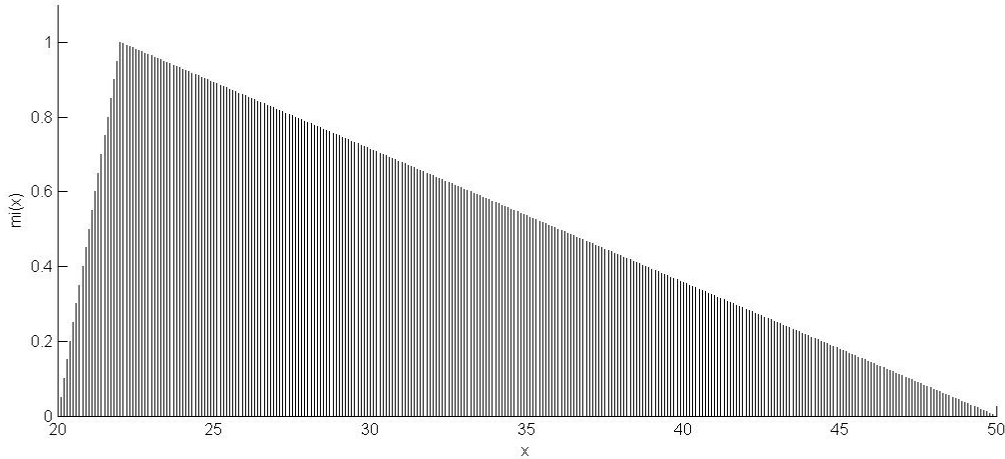
Trójkątna dyskretna liczba rozmyta $DT(a; b; c)$ to szczególny przypadek trapezoidalnej dyskretniej liczby rozmytej $DTr(a; b; c; d)$, gdzie $b = c$, ozn. $DT(a; b; c)$.

Przykład 1.8

Funkcja przynależności przykładowej trójkątnej dyskretniej liczby rozmytej $DT(20; 22; 50)$, przedstawiona na Rysunku 1.7, dana jest wzorem

$$\mu_{DT}(x) = \begin{cases} \frac{x-20}{2} & \text{dla } 20 \leq x < 22, \\ 1 & \text{dla } x = 22, \\ \frac{x-50}{-28} & \text{dla } 22 < x \leq 50, \\ 0 & \text{dla } x < 20 \vee x > 50 \end{cases}$$

z nośnikiem $\mathbb{S}(DT(20; 22; 50)) = \{0,01 \cdot i: 2000 < i < 3000, i \in \mathbb{N}\}$.



Rys. 1.7 Wykres funkcji przynależności trójkątnej dyskretnej liczby rozmytej DT(20;22;50)

□

Do badania interakcji nieprecyzyjności i niepewności wykorzystujemy zbiór probabilistyczny Hirota [1981]. Mamy, że dla ustalonego zbioru Ω stanów otoczenia, rozkład wartości logicznej predykatora $\varphi_H \in \mathbb{P}_1^{\mathbb{X}}$ w dowolnym zbiorze rozmytym (1.8) może być przedstawiony jako funkcja $\mu_H \in [0; 1]^{\mathbb{R} \times \Omega}$ określona przez tożsamość

$$\mu_H(x, \omega) = \tilde{v}(\varphi_H, \omega), \quad (1.26)$$

gdzie $\mu_H(x, \cdot)$ jest mierzalna dla ustalonego x . Dla ustalonego stanu świata zewnętrznego ω $\mu_H(\cdot, \omega) \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$ jest funkcją przynależności wyznaczającą w sposób jednoznaczny zbiór rozmyty $\tilde{H}(\omega)$. Otrzymana w ten sposób rodzina zbiorów probabilistycznych

$$\tilde{H} = \{\tilde{H}(\omega) \in \mathcal{F}(\mathbb{X}): \Omega \ni \omega\} \quad (1.27)$$

będzie nazywana zbiorem Hirota.

1.3. Miary nieprecyzyjności

Do pomiaru zbioru rozmytego $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ z nośnikiem będącym ograniczonym przedziałem liczbowym stosujemy miarę Khalili'ego [1979] $m: \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ daną za pomocą zależności

$$m(A) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_A(x) dx. \quad (1.28)$$

Do pomiaru zbioru rozmytego $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ z nośnikiem danym jako zbiór dyskretny $\mathbb{S}(A) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, stosujemy miarę $m: \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

$$m(A) = \sum_{x \in \mathbb{S}(A)} \mu_A(x). \quad (1.29)$$

Narzędziem pomiaru wieloznaczności liczby rozmytej $L \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ jest zaproponowana przez de Luca i Terminiego [1979] miara energii

$$d(L) = m(L). \quad (1.30)$$

Natomiast nieostrość liczby rozmytej $L \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ jest mierzona entropią wprowadzoną również przez de Luca i Terminiego [1972]. W naszych rozważaniach miarę entropii $e: \mathcal{F}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ określimy, zgodnie z sugestiami Kosko [1986], dla dowolnej liczby rozmytej $L \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ za pomocą zależności

$$e(L) = \frac{m(L \cap L^c)}{m(L \cup L^c)}, \quad (1.31)$$

gdzie L^c jest dopełnieniem zbioru L .

Ze względu na dobre syntetyczne uzasadnienie oraz uniwersalizm powyższej zależności, zaproponowana przez Kosko miara entropii jest obecnie powszechnie stosowana. Prace nad entropią dyskretnych liczb rozmytych były prowadzone między innymi przez de Luca, Terminiego [1972], Dumitrescu [1993] i Wenyi Zeng, Qilei Feng, Hong Xing Li [2006]. Zgodnie z definicją podaną powyżej, energia dla trójkątnej liczby rozmytej $T(a; b; c)$ wyraża się zatem wzorem

$$d(T(a; b; c)) = \int_{\mathbb{S}(T(a; b; c))} \mu(x) dx = \frac{1}{2} \cdot (c - a). \quad (1.32)$$

Przykład 1.9

Dla trójkątnej liczby rozmytej $T(80; 100; 150)$ przedstawionej na rysunku 1.1 miara energii wynosi

$$d(T(80; 100; 150)) = \frac{1}{2} \cdot (150 - 80) = 35.$$

□

Dla trapezoidalnej liczby rozmytej $Tr(a; b; c; d)$ miara energii zgodnie z (1.30) jest równa

$$d(\text{Tr}(a; b; c; d)) = \int_{\mathbb{S}(\text{Tr}(a; b; c; d))} \mu(x) dx = \frac{1}{2} \cdot (c + d - a - b). \quad (1.33)$$

Przykład 1.10

Dla trapezoidalnej liczby rozmytej $T(90; 100; 115; 120)$ przedstawionej na rysunku 1.3 miara energii wynosi

$$d(T(90; 100; 115; 120)) = \frac{1}{2} \cdot (115 + 120 - 90 - 100) = 22,5.$$

□

W przypadku dyskretnej liczby rozmytej $L \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ obliczanie miary energii sprowadza się do wyznaczenia

$$d(L) = \sum_{x \in \mathbb{S}(L)} \mu_L(x). \quad (1.34)$$

Przykład 1.11

Dla trapezoidalnej dyskretnej liczby rozmytej $DTr(25; 30; 32; 40)$ o nośniku $\mathbb{S}(DTr(25; 30; 32; 40)) = \{0,01 \cdot i : 2500 < i < 4000, i \in \mathbb{N}\} \subset \text{Nod}(L)$ miara energii jest równa

$$d(DTr(25; 30; 32; 40)) = \sum_{i=2500}^{4000} \mu_{DTr}(0,01 \cdot i) = 850.$$

□

Przykład 1.12

Dla trójkątnej dyskretnej liczby rozmytej $DT(20; 22; 50)$ o nośniku $\mathbb{S}(DT(20; 22; 50)) = \{0,01 \cdot i : 2000 < i < 5000, i \in \mathbb{N}\}$ miara energii wynosi

$$d(DT(20; 22; 50)) = \sum_{i=2000}^{5000} \mu_{DT}(0,01 \cdot i) = 1500.$$

□

Podobnie możemy wyznaczyć miary entropii dla każdej z rozważanych postaci liczby rozmytej. I tak, dla trójkątnej liczby rozmytej $T(a; b; c)$ miara entropii zgodnie z (1.31) mamy

$$\begin{aligned}
e(T(a; b; c)) &= \frac{m(T(a; b; c) \cap T(a; b; c)^c)}{m(T(a; b; c) \cup T(a; b; c)^c)} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (b - a) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (c - b)}{c - a - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (b - a) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (c - b)} = \frac{\frac{1}{4} \cdot (c - a)}{\frac{3}{4} \cdot (c - a)} = \frac{1}{3}.
\end{aligned} \tag{1.35}$$

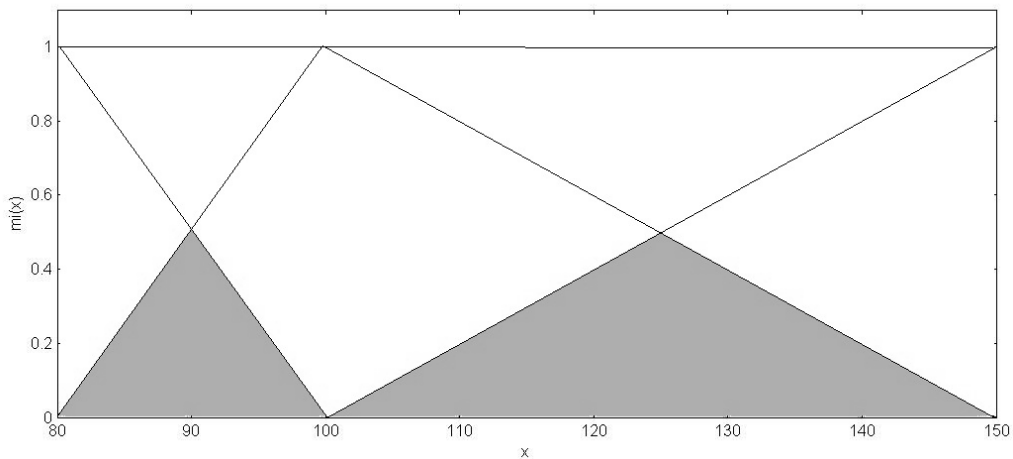
Warto zauważyć, że miara entropii dla trójkątnych liczb rozmytych jest wartością stałą.

Przykład 1.13

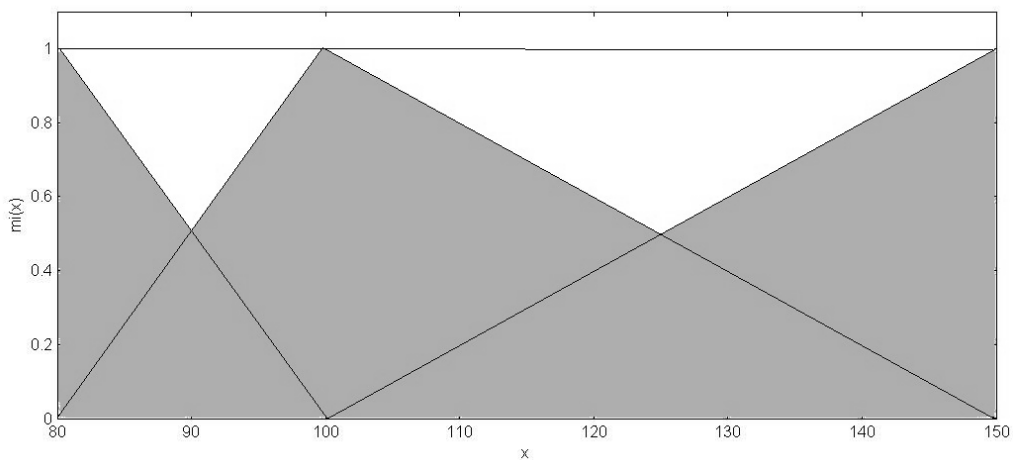
Dla trójkątnej liczby rozmytej $T(80; 100; 150)$ miara entropii jest równa

$$e(T(80; 100; 150)) = \frac{m(T(80; 100; 150) \cap T(80; 100; 150)^c)}{m(T(80; 100; 150) \cup T(80; 100; 150)^c)} = \frac{1}{3}.$$

co pokazano dodatkowo na rysunkach 1.8 i 1.9.



Rys. 1.8 Część wspólna liczb rozmytych $T(80; 100; 150)$ oraz $[T(80; 100; 150)]^c$



Rys. 1.9 Suma liczb rozmytych $T(80; 100; 150)$ oraz $[T(80; 100; 150)]^c$

□

Podobnie, miara entropii dla trapezoidalnej liczby rozmytej $Tr(a; b; c; d)$ dana jest poprzez

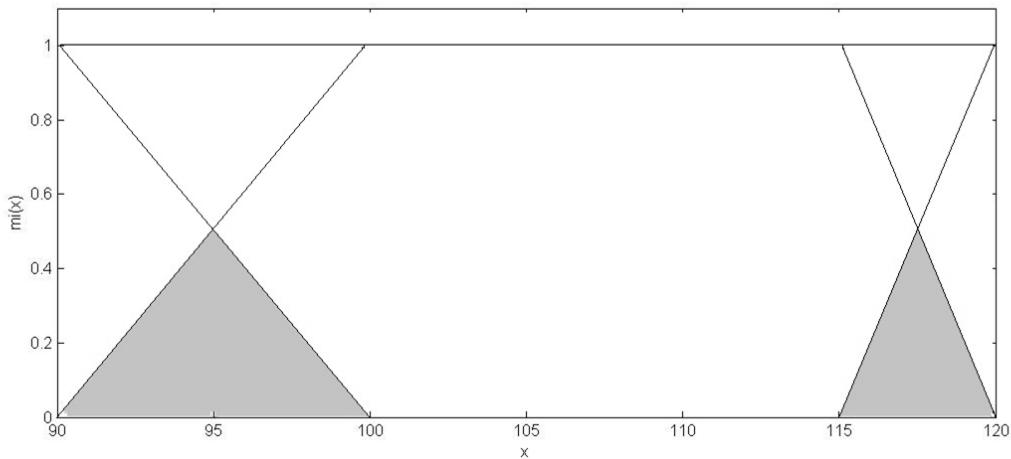
$$\begin{aligned}
 e(Tr(a; b; c; d)) &= \frac{d(Tr(a; b; c; d) \cap [Tr(a; b; c; d)]^c)}{d(Tr(a; b; c; d) \cup Tr(a; b; c; d)^c)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (b - a) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (d - c)}{d - a - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (b - a) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (d - c)} = \frac{b - a + d - c}{-b - 3a + 3d + c}. \quad (1.36)
 \end{aligned}$$

Przykład 1.14

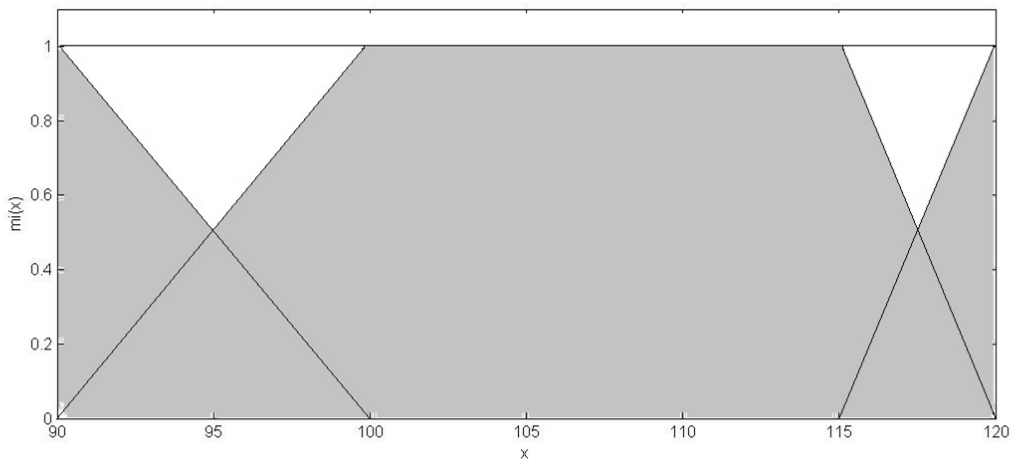
Dla trapezoidalnej liczby rozmytej $T(90; 100; 115; 120)$ miara entropii wynosi

$$e(Tr(90; 100; 115; 120)) = \frac{100 - 90 + 120 - 115}{-100 - 3 \cdot 90 + 3 \cdot 120 + 115} = \frac{1}{7},$$

co uzasadniono dodatkowo na rysunkach 1.10 i 1.11.



Rys. 1.10 Część wspólna liczb rozmytych $Tr(90; 100; 115; 120)$ oraz $[Tr(90; 100; 115; 120)]^c$



Rys. 1.11 Suma liczb rozmytych $Tr(90; 100; 115; 120)$ oraz $[Tr(90; 100; 115; 120)]^c$

□

Dla dowolnej dyskretnej liczby rozmytej $L \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ entropia dana jest wzorem

$$e(L) = \frac{m(L \cap L^c)}{m(L \cup L^c)} = \frac{\sum_{x \in \mathbb{S}(L)} \min\{\mu_L(x); 1 - \mu_L(x)\}}{\sum_{x \in \mathbb{S}(L)} \max\{\mu_L(x); 1 - \mu_L(x)\}} \quad (1.37)$$

Przykład 1.15

Dla trapezoidalnej dyskretnej liczby rozmytej $DTr(25; 30; 32; 40)$ miara entropii jest równa

$$e(DTr(25; 30; 32; 40)) = \frac{\sum_{i=2500}^{4000} \min\{\mu(0,1 \cdot i); 1 - \mu(0,1 \cdot i)\}}{\sum_{i=2500}^{4000} \max\{\mu(0,1 \cdot i); 1 - \mu(0,1 \cdot i)\}} = 0,2768.$$

□

Przykład 1.16

Dla trójkątnej dyskretnej liczby rozmytej $DT(20; 22; 50)$ miara entropii wynosi

$$e(DT(20; 22; 50)) = \frac{\sum_{i=2000}^{5000} \min\{\mu(0,1 \cdot i); 1 - \mu(0,1 \cdot i)\}}{\sum_{i=2000}^{5000} \max\{\mu(0,1 \cdot i); 1 - \mu(0,1 \cdot i)\}} = \frac{1}{3}.$$

□

2. Nieprecyzyjne oceny korzyści z posiadania instrumentu finansowego

Poniższy rozdział zawiera opisy modeli nieprecyzyjnej oceny korzyści płynących z posiadania instrumentu finansowego, wykorzystywanych w dalszej części pracy. Podane jest uzasadnienie istnienia nieprecyzyjności oraz mechanizm wyznaczania stóp zwrotu. Poruszony jest również temat źródeł nieprecyzyjności w modelach portfela instrumentów finansowych. Rozdział otwiera przegląd literatury przedmiotu.

2.1 Nieprecyzyjne oceny instrumentów finansowych w literaturze

Pod pojęciem instrumentu finansowego rozumiemy uprawnienie do przyszłego przychodu finansowego, wymagalnego w ściśle określonym terminie. Nieprecyzyjność ocen korzyści płynących z posiadania instrumentu finansowego jest naturalną przyczyną ryzyka obarczającego instrumenty finansowe.

Źródeł dotychczasowego stanu wiedzy na temat nieprecyzyjnych ocen instrumentów finansowych należy szukać w pracy Warda [1985], który zdefiniował wartość bieżącą jako zdyskontowany rozmyty przepływ pieniężny. Następnie Calzi [1990] podał definicję rozmytej wartości bieżącej. Dalsze prace nad pojęciem wartości bieżącej (krócej – *PV*) zaowocowały uogólnieniem definicji [Greenhut i inni, 2005], a następnie przeniesieniem jej na przypadek rozmytej stopy procentowej przez Sheena [2005].

Buckley [1987, 1992], Gutierrez [1989] oraz Kuchta [2000] i Lesage [2001] przeprowadzili wnikliwą analizę problemów związanych z zastosowaniem arytmetyki rozmytej do wyznaczania wartości bieżącej. Huang [2007] uogólniła natomiast ponownie definicję Warda dla przypadku, kiedy przyszłe przepływy pieniężne dane są w postaci rozmytej zmiennej losowej. W 2005 Tsao wprowadził nową, bardziej ogólną definicję wartości bieżącej, przy założeniu, że przyszły przepływ pieniężny jest rozmytym zbiorem probabilistycznym.

Gwałtowny rozwój matematyki systemów rozmytych zaowocował stworzeniem rozmytej analizy portfelowej. Główną ideą tego podejścia było zastosowanie istniejącej teorii portfela i rozmycie części rozważanych parametrów, takich jak zwrot lub wartość bieżąca [Li, Quin, Kar, 2010], [Quin, Wen, Gu, 2011] albo parametrów rozkładów prawdopodobieństwa [Tanaka, Guo, Turksen, 2000].

Matematykę systemów rozmytych stosuje się również do analizy portfela w przypadku, kiedy to niepewność jest modelowana za pomocą zbioru rozmytego. W większości artykułów poruszających to zagadnienie, zakłada się z góry, że zwrot z instrumentu jest zbiorem rozmytym [Duan, Stahler, 2011]. Założenie to jest jednak w dużej ilości prac związane raczej z niepewnością zwrotu i niejasną lub niepełną informacją, którą kieruje się inwestor. Do modelowania tak rozumianego portfela instrumentów finansowych autorzy stosują głównie teorię możliwości [Liu Zhang, 2013], [Wu, Li, 2012] i teorię wiarygodności [Mehlawat, 2016]. Ostatnie lata zaowocowały natomiast badaniami nad portfelami instrumentów o rozmytych zwrotach, umożliwiającymi modyfikację składu portfela przed czasem zakończenia inwestycji [Zhang, Zhang, Xiao, 2013], [Sabarido, Ruiz, Bermudez, Vercher, Luque, 2016], [Guo, Li, Kar, Yu, 2016]. Pełne kompendium wiedzy na temat portfeli instrumentów finansowych o zwrotach modelowanych zbiorami rozmytymi zostało przedstawione w [Shouyang Wang i inni, 2011] oraz [Fang, Yong, Wang, 2008].

W pracach [Huang, 2007 a, b], [Haifeng i inni, 2012] zaproponowano stworzenia portfeli instrumentów finansowych, które umożliwiłyby modelowanie ryzyka nieprecyzyjności obarczającej zwrot. Wprowadzenie nieprecyzyjności w rozważanych portfelach miało na celu zastąpienie narzędzi probabilistycznych w modelowaniu niepewności. Kahraman, Ruan, Tolga [2002] przedstawili pracę, w której zarówno przepływy pieniężne jak i stopy zwrotu z nich dane są jako trapezoidalne liczby rozmyte. Podejście to ma na celu pokazanie, że eksperci na rynku operują przy wyznaczaniu wartości bieżącej netto jedynie pewnymi nieprecyzyjnymi wielkościami. W 2011 roku Phani Bushan Rao i Ravi Shankar zaproponowali sposób porównywania trapezoidalnych liczb rozmytych, co ma zastosowanie na przykład w zadaniu minimalizacji ryzyka i maksymalizacji zysku z portfela, gdzie stopa zwrotu jest trapezoidalną liczbą rozmytą.

W [Piasecki, 2011 a] nieprecyzyjnie oszacowaną PV oceniono na podstawie bieżącej ceny rynkowej aktywa finansowego. Przyczyną braku precyzji oszacowania dopatrywano tam się w przesłankach behawioralnych. Piasecki [2011 a, b] zauważył, że ze względu na nieprecyzyję wyznaczenia wartości bieżącej oraz traktowanie wartości przyszłej jako zmiennej losowej, możliwe jest przedstawienie stopy zwrotu z instrumentu jako rozmytego zbioru probabilistycznego. Zaproponowany model nie tylko uwzględnia problem nieprecyzyjności, ale dodatkowo również wskazuje na istnienie niepewności obarczającej instrument.

W [Piasecki, 2011 c] pokazano, że jeśli PV jest rozmytą liczbą rzeczywistą, to stopa zwrotu jest rozmytym zbiorem probabilistycznym [Hiroto, 1981]. W [Siwek, 2015] i [Piasecki, Siwek, 2016] omówiono przypadek prostej stopy zwrotu, gdzie PV jest trójkątną liczbą

rozmytą, natomiast FV jest zmienną losową o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa. Z tego powodu, jako punkt wyjścia wybrano założenie o normalnym rozkładzie prostej stopy zwrotu przyjęte w klasycznej pracy Markowicz'a [1952].

W większości proponowanych modeli ujęcie nieprecyzyjności przejawia się w założeniu o danych *a priori* rozmytych zwrotach z instrumentów finansowych. W prezentowanej rozprawie źródłem rozmycia jest nieprecyzyjnie określona wartość bieżąca, na podstawie której następnie wyznacza się rozmytą stopę zwrotu oraz czynnik dyskontujący. Wspomniana metoda analizy zagadnienia nieprecyzyjności pozwala na wyprowadzenie efektywnych zależności pomiędzy konstrukcją portfela a zwrotem z niego. Uzyskane w ten sposób metody zarządzania portfelem są uzasadnione na mocy dedukcji matematycznej i tym samym bardziej wiarygodne.

2.2 Nieprecyzyjna wartość bieżąca

Nieprecyzyjnością może być obarczone wyznaczenie wartości bieżącej instrumentu finansowego, co ma swoje odbicie w ocenach zwrotów z instrumentów i portfeli finansowych. Przejawia się tu behawioryzm w podejmowaniu decyzji - każdy inwestor, podając wartość jaką ma dla niego instrument, dokonuje pewnych uogólnień i zaokrągleń, które ułatwiają obliczenia i jedynie przybliżają odczucie co do jego wartości. Inwestor nie potrafi zazwyczaj podać tej wartości w postaci liczbowej. Jednocześnie jednak na podstawie własnego doświadczenia, posiadanej wiedzy, istniejącej sytuacji rynkowej i historii wcześniejszego inwestowania jest w stanie podać pewne jej przybliżenie, bądź też ogólne granice określające przedział dopuszczalnych wartości instrumentu. Ponadto, każdy inwestor wykazuje indywidualny poziom awersji do ryzyka, który wpływa na jego odczucia na temat wartości bieżącej instrumentu.

Dowodem istnienia nieprecyzyjności wyznaczenia informacji może być fakt zachodzenia transakcji na rynku silnie efektywnym. Przy założeniu, że każdy z inwestorów kieruje się przesłankami racjonalnymi i posiada pełną informację o panującej sytuacji rynkowej, nadal zawierane są przeciwne do siebie transakcje. Oznacza to, że inwestorzy muszą postrzegać wartość instrumentu w różny sposób, ponieważ przy takim samym zbiorze informacji podejmują przeciwne decyzje dotyczące kupna i sprzedaży. Potwierdza to przypuszczenie, że wartość bieżąca jest wartością ściśle subiektywną, która prócz przesłanek racjonalnych uwzględnia również przesłanki behawioralne, takie jak doświadczenie inwestycyjne. Jako subiektywna, jest ona zatem wyznaczona nieprecyzyjnie.

Kolejnym powodem występowania ryzyka nieprecyzyjności wartości bieżącej instrumentu są opóźnienia pomiędzy podjęciem decyzji dotyczącej konkretnej wartości bieżącej instrumentu a zastosowaniem tak wskazanej wartości do podjęcia decyzji inwestycyjnej i wprowadzenia jej do systemu komputerowego. W najprostszym ujęciu wartość bieżąca instrumentu równa jest jego cenie rynkowej, jednak cena rynkowa zmienia się i w czasie pomiędzy określeniem wartości bieżącej a podjęciem decyzji inwestycyjnej może ona ulec zmianie. Na podobnej zasadzie może występować opóźnienie związane z niedoskonałością systemu informatycznego, jakością infrastruktury technicznej czy szybkością łączy komputerowych.

W prezentowanej pracy skupiono się na opisanu ryzyka nieprecyzyjności wartości bieżącej. Powodem powyższego założenia jest przede wszystkim fakt, że rozważana wartość bieżąca ma charakter subiektywny oraz nie ulega weryfikacji w przyszłości. Nie jesteśmy w stanie określić, czy dobrze odzwierciedlała ona obecną w danym momencie wartość instrumentu, ze względu na jej subiektywny i indywidualny charakter. Reasumując, nie otrzymujemy liczbowej realizacji PV w ustalonym momencie przyszłości. Tym samym wartość bieżąca nie spełnia warunków potrzebnych dla istnienia prawdopodobieństwa, niezależnie czy są to warunki określone przez Knighta [1964], von Mises'a [1957], van Lambalgen [1996], Kaplana [2001], Kołmogorowa [1956], Sadowskiego [1980] czy Czerwińskiego [1969].

Ponadto, wartość bieżąca instrumentów finansowych wyznaczana jest w warunkach narażonych na występowanie nieprecyzyjności. Powodem tego jest wykorzystywanie różnego rodzaju sprzętu komputerowego narażonego na opóźnienia oraz obciążonego dyskretyzacją obliczeń, zaokrągleniami i ograniczeniami pamięci. Co więcej, w wykorzystywanych narzędziach decyzyjnych implementuje się subiektywnie dobrane algorytmy, jak również programy narażone na błędy programisty. Podsumowując przytoczone postulaty, wartość bieżąca może być traktowana jako wartość nieprecyzyjna. Stąd w prezentowanej rozprawie jest modelowana liczbą rozmytą PV z funkcją przynależności $\mu_{PV} \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$.

Zawężając do analizowanych przypadków, wartość bieżąca instrumentu modelowana za pomocą trójkątnej liczby rozmytej $PV_1 = T(\check{C}_{min}; \check{C}; \check{C}_{max})$ jest określona przez funkcję przynależności $\mu_{PV_1} \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$

$$\mu_{PV_1}(x) = \begin{cases} \frac{x - \check{C}_{min}}{\check{C} - \check{C}_{min}} & \text{dla } \check{C}_{min} \leq x < \check{C}, \\ 1 & \text{dla } x = \check{C}, \\ \frac{x - \check{C}_{max}}{\check{C} - \check{C}_{max}} & \text{dla } \check{C} < x \leq \check{C}_{max}, \\ 0 & \text{dla } \check{C}_{min} < x < \check{C}_{max}, \end{cases} \quad (2.1)$$

gdzie

- \check{C} jest ceną rynkową instrumentu obserwowaną w momencie wyznaczania jego wartości bieżącej,
- $\check{C}_{min} \in]0; \check{C}]$ jest maksymalnym dolnym oszacowaniem możliwej ceny rynkowej,
- $\check{C}_{max} \in [\check{C}; +\infty[$ jest minimalnym górnym oszacowaniem możliwej ceny rynkowej.

Wartość bieżąca instrumentu modelowana za pomocą trapezoidalnej liczby rozmytej $PV_2 = Tr(\check{C}_{min}; \check{C}_*; \check{C}^*; \check{C}_{max})$ jest określona przez swoją funkcję przynależności $\mu_{PV_2} \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$

$$\mu_{PV_2}(x) = \begin{cases} \frac{x - \check{C}_{min}}{\check{C}_* - \check{C}_{min}} & \text{dla } \check{C}_{min} \leq x < \check{C}_*, \\ 1 & \text{dla } \check{C}_* \leq x \leq \check{C}^*, \\ \frac{x - \check{C}_{max}}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} & \text{dla } \check{C}^* < x \leq \check{C}_{max}, \\ 0 & \text{dla } x < \check{C}_{min}, x > \check{C}_{max}, \end{cases} \quad (2.2)$$

gdzie

- $\check{C}_* \in [\check{C}_{min}; \check{C}]$ jest minimalnym górnym oszacowaniem cen zauważalnie mniejszych od obserwowanej ceny rynkowej \check{C} ,
- $\check{C}^* \in [\check{C}; \check{C}_{max}]$ jest maksymalnym dolnym oszacowaniem cen zauważalnie większych od obserwowanej ceny rynkowej \check{C} .

Dla wartości bieżącej będącej trójkątną bądź trapezoidalną dyskretną liczbą rozmytą, siatka dyskretyzacyjna ma postać

$$Nod(PV) = \{x_i \in \mathbb{R}: x_i = 0,01 \cdot i; i \in \mathbb{N}\}, \quad (2.3)$$

gdzie stała 0,01 oznacza wyznaczanie wartości z dokładnością do 0,01 zł.

Wartość bieżąca dana trapezoidalną dyskretną liczbą rozmytą $PV_3 = DTr(\check{C}_{min}; \check{C}_*; \check{C}_{max})$ jest określona przez funkcję przynależności $\mu_{PV_3} \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$ taką, że dla każdego $x \in \mathbb{S}(PV_3) = \{x_i = 0,01 \cdot i: 100 \cdot \check{C}_{min} < i < 100 \cdot \check{C}_{max}, i \in \mathbb{N}\} \subset Nod(PV)$

$$\mu_{PV_3}(x) = \begin{cases} \frac{x - \check{C}_{min}}{\check{C}_* - \check{C}_{min}} & \text{dla } \check{C}_{min} \leq x < \check{C}_*, \\ 1 & \text{dla } \check{C}_* \leq x \leq \check{C}^*, \\ \frac{x - \check{C}_{max}}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} & \text{dla } \check{C}^* < x \leq \check{C}_{max}. \\ 0 & \text{dla } x < \check{C}_{min}, x > \check{C}_{max}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Wartości bieżąca instrumentu dana trójkątną dyskretną liczbą rozmytą $PV_4 = DT(\check{C}_{min}; \check{C}; \check{C}_{max})$ jest określona przez swoją funkcję przynależności $\mu_{PV_4} \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$

$$\mu_{PV_4}(x) = \begin{cases} \frac{x - \check{C}_{min}}{\check{C} - \check{C}_{min}} & \text{dla } \check{C}_{min} \leq x < \check{C}, \\ 1 & \text{dla } x = \check{C}, \\ \frac{x - \check{C}_{max}}{\check{C} - \check{C}_{max}} & \text{dla } \check{C} < x \leq \check{C}_{max}. \\ 0 & \text{dla } x < \check{C}_{min}, x > \check{C}_{max}, \end{cases} \quad (2.5)$$

z nośnikiem

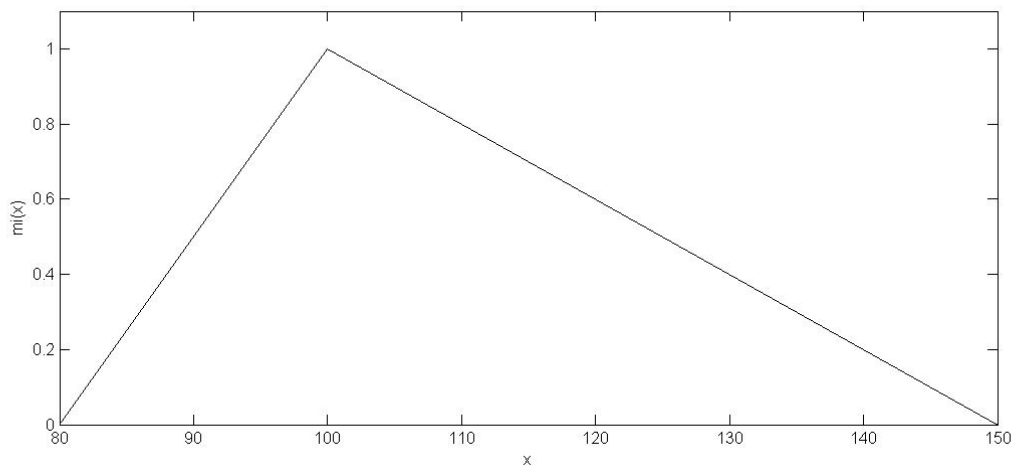
$$\mathbb{S}(PV_4) = \mathbb{S}(DT(\check{C}_{min}; \check{C}; \check{C}_{max})) = \{0,01i: 100 \check{C}_{min} < i < 100\check{C}_{max}, i \in \mathbb{N}\} \subset Nod(PV).$$

Przykład 2.1

Wartość bieżąca modelowana trójkątną liczbą rozmytą $PV_1 = T(80; 100; 150)$ jest określona przez swą funkcję przynależności $\mu_{PV_1}: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$

$$\mu_{PV_1}(x) = \begin{cases} \frac{x}{20} - 4 & \text{dla } 80 \leq x < 100, \\ 1 & \text{dla } x = 100, \\ \frac{-x}{50} + 3 & \text{dla } 100 < x \leq 150, \\ 0 & \text{dla } x < 80 \vee x > 150. \end{cases}$$

Nośnik jest postaci $\mathbb{S}(PV_2) =]80; 150[$. Wykres powyższej funkcji przynależności został pokazany na Rysunku 2.1.



Rys. 2.1 Wykres funkcji przynależności wartości bieżącej określonej za pomocą trójkątnej liczby rozmytej $T(80; 100; 150)$

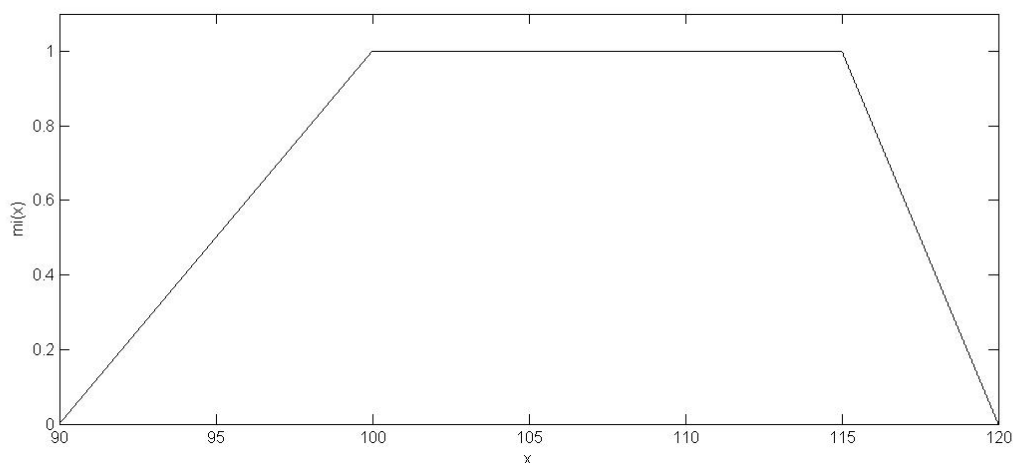
□

Przykład 2.2

Wartość bieżąca modelowana trapezoidalną liczbą rozmytą $PV_2 = Tr(90; 100; 115; 120)$ określona jest funkcją przynależności $\mu_{PV_2}: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$

$$\mu_{PV_2}(x) = \begin{cases} \frac{x}{10} - 9 & \text{dla } 90 \leq x < 100, \\ 1 & \text{dla } 100 \leq x \leq 115, \\ \frac{-x}{5} + 24 & \text{dla } 115 < x \leq 120, \\ 0 & \text{dla } x < 90 \vee x > 120 \end{cases}$$

z nośnikiem postaci $S(PV_2) =]90; 120[$. Funkcja ta została pokazana na Rysunku 2.2.



Rys. 2.2 Wykres funkcji przynależności wartości bieżącej określonej za pomocą trapezoidalnej liczby rozmytej $Tr(90; 100; 115; 120)$

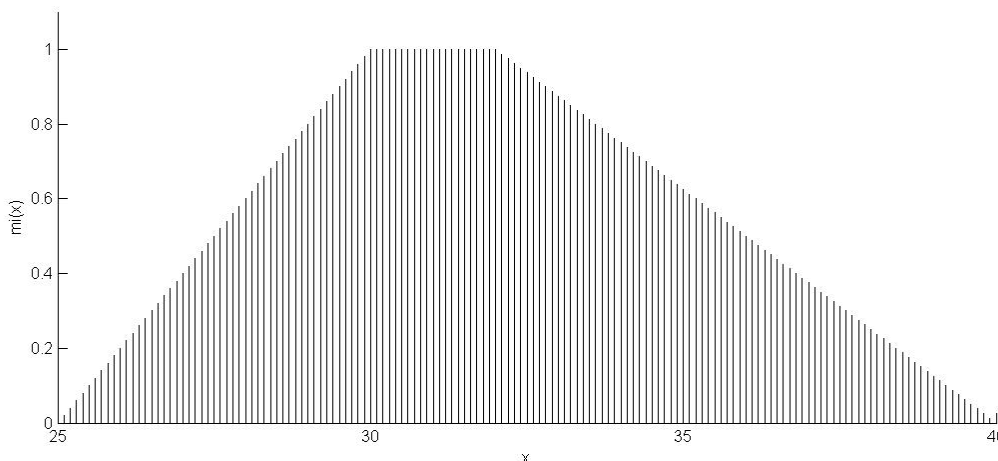
□

Przykład 2.3

Wartość bieżąca modelowana trapezoidalną dyskretną liczbą rozmytą $PV_3 = Tr(25; 30; 32; 40)$ z nośnikiem $\mathbb{S}(PV_3) = \{0,01i : 2500 < i < 4000, i \in \mathbb{N}\} \subset Nod(PV)$ określona jest funkcją przynależności $\mu_{PV_3}: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$

$$\mu_{PV_3}(x) = \begin{cases} \frac{x}{5} - 5 & \text{dla } 25 \leq x < 30, \\ 1 & \text{dla } 30 \leq x \leq 32, \\ \frac{-x}{8} + 5 & \text{dla } 32 < x \leq 40, \\ 0 & \text{dla } x < 25 \vee x > 40. \end{cases}$$

Powyższa funkcja została przedstawiona na Rysunku 2.3.



Rys. 2.3 Wykres funkcji przynależności wartości bieżącej określonej za pomocą trapezoidalnej dyskretniej liczby rozmytej $DTr(25; 30; 32; 40)$

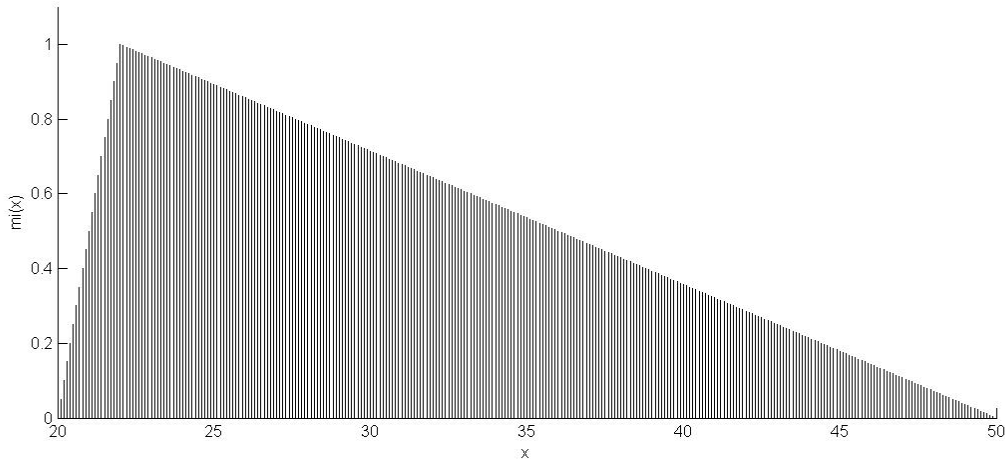
□

Przykład 2.4

Wartość bieżąca modelowana trójkątną dyskretną liczbą rozmytą $PV_4 = T(20; 22; 50)$ z nośnikiem $\mathbb{S}(PV_4) = \{0,01 \cdot i : 2000 < i < 5000, i \in \mathbb{N}\} \subset Nod(PV)$ określona jest funkcją przynależności $\mu_{PV_4}: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$

$$\mu_{PV_4}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} - 10 & \text{dla } 20 \leq x < 22, \\ 1 & \text{dla } x = 22, \\ \frac{-x}{28} + \frac{25}{14} & \text{dla } 22 < x \leq 50, \\ 0 & \text{dla } x < 20 \vee x > 50. \end{cases}$$

Jej wykres przedstawia Rysunek 2.4.



Rys. 2.4 Wykres funkcji przynależności wartości bieżącej określonej za pomocą trójkątnej dyskretnej liczby rozmytej $DT(20; 22; 50)$

□

Nieprecyzyjnie oszacowana wartość bieżąca prowadzi do nieprecyzyjnie oszacowanej oceny korzyści \mathcal{B} . Z drugiej strony ocena ta może stanowić przesłankę do rekomendacji inwestycyjnej. Wtedy nieprecyzyjność oceny korzyści \mathcal{B} prowadzi do braku precyzji w sformułowaniu rekomendacji.

Rozważając nieprecyzyjność możemy za Klirem [1993] wyróżnić niejednoznaczność oraz nieostrość informacji. Niejednoznaczność obarczającą rekomendację inwestycyjną interpretujemy jako brak jednoznacznego wyróżnienia zalecanej decyzji inwestycyjnej. Nieostrość rekomendacji to brak jednoznacznego rozróżnienia pomiędzy zalecanymi i niezalecanymi decyzjami inwestycyjnymi.

Wzrost wieloznaczności w tym przypadku oznacza, że zwiększać się będzie ilość alternatywnych rekomendacji inwestycyjnych. Powoduje to wzrost ryzyka wybrania spośród rekomendowanych alternatyw takiej decyzji finansowej, która *ex post* zostanie obciążona utratą szans. Ten rodzaj ryzyka nazywamy ryzykiem wieloznaczności. Jako jego miarę zastosujemy miarę energii $d(\mathcal{B})$.

Wzrost nieostrości oznacza zacieranie się granic wyróżniających zalecane alternatywy decyzyjne. Powoduje to zwiększenie się ryzyka wyboru decyzji niezalecanej. Ten rodzaj ryzyka nazywamy ryzykiem nieostrości i będziemy oceniać za pomocą miary entropii $e(\mathcal{B})$.

2.3 Nieprecyzyjna stopa zwrotu

Podstawową oceną korzyści płynących z posiadania instrumentu finansowego jest stopa zwrotu. Podobnie jak w [Piasecki, 2016] zakładamy, że dowolny instrument finansowy jest opisany dla dowolnego momentu $t > 0$ przy pomocy V_t i V_0 , gdzie

- $V_t \in \mathbb{R}^+$ – wartość przyszła instrumentu w momencie t (w skrócie – FV),
- $V_0 \in \mathbb{R}^+$ – wartość bieżąca instrumentu (krócej – PV).

Stopę zwrotu r z tego instrumentu, wyznaczoną na moment t , definiujemy jako

$$r = r(V_0; V_t), \quad (2.6)$$

gdzie $r: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ jest dowolną funkcją malejącą wartości bieżącej V_0 i rosnącą dla wartości przyszłej V_t .

W teorii i praktyce finansowej powszechnie stosuje się założenie, że wartość bieżąca instrumentu równa jest jego bieżącej cenie rynkowej \check{C} , to znaczy

$$V_0 = \check{C}, \quad (2.7)$$

co w połączeniu z (2.6) daje

$$r_t = r(\check{C}; V_t). \quad (2.8)$$

Zgodnie z tezą o niepewności [Mises, 1962], [Kaplan, Barish, 1967], przewidywana wartość przyszła V_t jest niepewna. Niepewność ta jest skutkiem braku wiedzy o realizacji przyszłego stanu rzeczy. Stan ten będzie możliwy do określenia dopiero w ustalonym momencie $t > 0$, co pozwoli na wskazanie faktycznej wartości przyszłej V_t . Za [Kołmogorow, 1933, 1956], [Mises, 1957], [Lambalgen, 1996], [Sadowski, 1976, 1980], [Czerwiński, 1960, 1969], [Caplan, 2001] wnioskujemy, że mamy tutaj do czynienia z niepewnością kwantyfikowalną opisaną za pomocą rozkładu prawdopodobieństwa. Modelem formalnym tej niepewności jest traktowanie FV jako zmiennej losowej $\tilde{V}_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$, gdzie Ω jest zbiorem wszystkich elementarnych stanów ω rynku finansowego [Piasecki, 2016].

Zaproponowany przez Piaseckiego [2011 b] model nieprecyzyjnej stopy zwrotu opiera się na następujących założeniach:

- stopa zwrotu r_t jest malejącą funkcją wartości początkowej V_0 i rosnącą funkcją wartości przyszłej V_t ,

- wartość przyszła jest zmienną losową $\tilde{V}_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$,
- wartość bieżąca jest liczbą rozmytą reprezentowaną przez funkcję przynależności $\mu_{PV} \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$.

Wtedy stopa zwrotu z instrumentu finansowego wyznaczana jest jako rozmyty zbiór probabilistyczny o funkcji przynależności

$$\tilde{\rho}(r, \omega) = \sup\{\mu_{PV}(x): r = r_V^{-1}(x; \tilde{r}_t(\omega)); x \in \mathbb{R}\}. \quad (2.9)$$

Model ten nie uwzględnia kosztów transakcyjnych ani takich warunków ograniczających jak płynność czy posiadany kapitał inwestycyjny. Zakładamy, że obliczenia oprócz wymienionych czynników są prowadzone *ceteris paribus*. Dlatego zgodnie z (2.8) stopa zwrotu także jest zmienną losową wyznaczoną za pomocą tożsamości

$$\tilde{r}_t(\omega) = r(\check{C}; \tilde{V}_t(\omega)). \quad (2.10)$$

Zakładamy, że znany jest rozkład stopy zwrotu \tilde{r}_t i tym samym generuje on rozkład prawdopodobieństwa na Ω . Wobec opisanej powyżej monotoniczności funkcji stopy zwrotu, istnieje funkcja odwrotna $r_V^{-1}(\check{C}, \cdot): \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ taka, że

$$\tilde{V}_t(\omega) = r_V^{-1}(\check{C}; \tilde{r}_t(\omega)). \quad (2.11)$$

Najczęściej w literaturze bada się

- prostą stopę zwrotu

$$R_t = \frac{V_t - \check{C}}{\check{C}}, \quad (2.12)$$

- logarytmiczną stopę zwrotu

$$\hat{R}_t = \ln\left(\frac{V_t}{\check{C}}\right). \quad (2.13)$$

Zgodnie z założeniami przyjętymi przez Markowitza [1952], w rozprawie ograniczamy się do założenia o prostych stopach zwrotu. Stąd z (2.10) i (2.12) otrzymujemy

$$\tilde{r}_t(\omega) = \frac{\tilde{V}_t(\omega) - \check{C}}{\check{C}}. \quad (2.14)$$

Zmienna losowa odpowiadająca wartości przyszłej jest zatem określona za pomocą zależności

$$\tilde{V}_t(\omega) = \check{C} \cdot (1 + \tilde{r}_t(\omega)). \quad (2.15)$$

Tym samym, dla ustalonego stanu świata ω oraz wartości bieżącej danej liczbą rozmytą, zgodnie ze wzorem (2.14) i zasadą rozszerzania Zadeha, rozmyta stopa zwrotu jest zbiorem probabilistycznym \tilde{R} z funkcją przynależności $\tilde{\rho} \in [0; 1]^{\mathbb{R} \times \Omega}$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(r, \omega) &= \sup \left\{ \mu_{PV}(x) : x = \frac{\tilde{V}_t(\omega)}{1+r}; x \in \mathbb{R} \right\} = \mu_{PV} \left(\frac{\tilde{V}_t(\omega)}{1+r} \right) \\ &= \mu_{PV} \left(\frac{\check{C} \cdot (1 + \tilde{r}_t(\omega))}{1+r} \right). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Nawiązując do Markowitza [1952], zakładamy że prosta stopa zwrotu $\tilde{r}_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, wyznaczona za pomocą (2.14) dla PV równej cenie rynkowej \check{C} , ma normalny rozkład prawdopodobieństwa $N(\bar{r}; \sigma)$. Wtedy, ze względu na własności $\tilde{\rho}$ oraz zależność (2.16), oczekiwana rozmyta stopa zwrotu z instrumentu dana jest funkcją przynależności

$$\rho(r) = \sup \left\{ \mu_{PV}(x) : x = \frac{\check{C} \cdot (1 + \bar{r})}{1+r}; x \in \mathbb{R} \right\} = \mu_{PV} \left(\frac{\check{C} \cdot (1 + \bar{r})}{1+r} \right). \quad (2.17)$$

Zatem dla PV danego liczbą rozmytą możemy policzyć rozmytą oczekiwaną stopę zwrotu R . W pracy założenie o wartości bieżącej instrumentu zawężono do przypadku, kiedy jest ona trójkątną, trapezoidalną, dyskretną trapezoidalną lub dyskretną trójkątną liczbą rozmytą. Dla poszczególnych postaci wartości bieżących, dla których liczona jest oczekiwana rozmyta stopa zwrotu, powyższy wzór przyjmuje następujące postaci.

Zgodnie z (2.1) i (2.17), dla PV danej jako trójkątna liczba rozmyta $PV_1 = T(\check{C}_{min}; \check{C}; \check{C}_{max})$, oczekiwana stopa zwrotu R_1 jest liczbą rozmytą z funkcją przynależności

$$\rho_{R_1}(r) = \begin{cases} \frac{\frac{1+\bar{r}}{1+r} - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}}}{1 - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}}} & \text{dla } \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} \leq \frac{1+\bar{r}}{1+r} < 1, \\ 1 & \text{dla } \frac{1+\bar{r}}{1+r} = 1, \\ \frac{\frac{1+\bar{r}}{1+r} - \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}}}{1 - \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}}} & \text{dla } 1 < \frac{1+\bar{r}}{1+r} \leq \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}}, \\ 0 & \text{dla } \frac{1+\bar{r}}{1+r} < \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}}, \quad \frac{1+\bar{r}}{1+r} > \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}}, \end{cases} \quad (2.18)$$

która po uproszczeniu sprowadza się do postaci

$$\rho_{R_1}(r) = \begin{cases} \frac{\check{C} \cdot \frac{1+\bar{r}}{1+r} - \check{C}_{min}}{\check{C} - \check{C}_{min}} & \text{dla } \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} \leq \frac{1+\bar{r}}{1+r} < 1, \\ 1 & \text{dla } \frac{1+\bar{r}}{1+r} = 1, \\ \frac{\check{C} \cdot \frac{1+\bar{r}}{1+r} - \check{C}_{max}}{\check{C} - \check{C}_{max}} & \text{dla } 1 < \frac{1+\bar{r}}{1+r} \leq \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}}, \\ 0 & \text{dla } \frac{1+\bar{r}}{1+r} < \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}}, \quad \frac{1+\bar{r}}{1+r} > \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}}, \end{cases} \quad (2.19)$$

gdzie

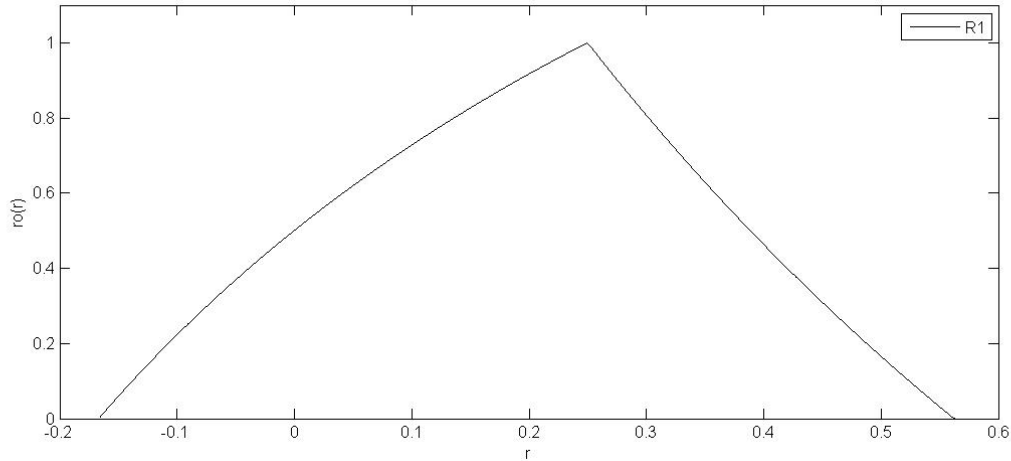
- $\check{C}_{min} \in]0; \check{C}]$ jest maksymalnym dolnym oszacowaniem możliwej ceny rynkowej,
- $\check{C}_{max} \in [\check{C}; +\infty[$ jest minimalnym górnym oszacowaniem możliwej ceny rynkowej.

Przykład 2.5

Jeżeli prosta stopa zwrotu (2.14) ma rozkład normalny $N(0,25; 0,02)$, to dla wartości bieżącej $PV_1 = T(80; 100; 150)$ opisanej w przykładzie (1.2), oczekiwana rozmyta stopa zwrotu R_1 z instrumentu dana jest funkcją przynależności

$$\rho_{R_1}(r) = \mu_{PV_1} \left(\frac{100 \cdot (1 + 0,25)}{1+r} \right) = \begin{cases} \frac{6,25}{1+r} - 4 & \text{dla } 0,64 \leq \frac{1}{1+r} < 0,8, \\ 1 & \text{dla } \frac{1}{1+r} = 0,8, \\ 3 - \frac{2,5}{1+r} & \text{dla } 0,8 < \frac{1}{1+r} \leq 1,2, \\ 0 & \text{dla } 1,2 < \frac{1}{1+r}, \frac{1}{1+r} < 0,64. \end{cases}$$

Wykres powyższej funkcji przynależności został przedstawiony na Rysunku 2.5.



Rys. 2.5 Wykres funkcji przynależności oczekiwanej stopy zwrotu z instrumentu finansowego o $PV_1 = T(80; 100; 150)$ przy założeniu, że prosta stopa zwrotu (2.14) ma rozkład $N(0,25; 0,02)$

□

Podobnie w przypadku $PV_2 = Tr(\check{C}_{min}; \check{C}_*; \check{C}^*; \check{C}_{max})$, oczekiwana rozmyta stopa zwrotu jest liczbą rozmytą R_2 z funkcją przynależności $\rho_{R_2} \in [0; 1]^{\mathbb{R} \times \Omega}$

$$\rho_{R_2}(r) = \begin{cases} \frac{\check{C} \cdot (1 + \bar{r}) - \check{C}_{min}}{\check{C}_* - \check{C}_{min}} & \text{dla } \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} \leq \frac{1 + \bar{r}}{1 + r} < \frac{\check{C}_*}{\check{C}}, \\ 1 & \text{dla } \frac{\check{C}_*}{\check{C}} \leq \frac{1 + \bar{r}}{1 + r} \leq \frac{\check{C}^*}{\check{C}}, \\ \frac{\check{C} \cdot (1 + \bar{r}) - \check{C}_{max}}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} & \text{dla } \frac{\check{C}^*}{\check{C}} < \frac{1 + \bar{r}}{1 + r} \leq \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}}, \\ 0 & \text{dla } \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} < \frac{1 + \bar{r}}{1 + r}, \quad \frac{1 + \bar{r}}{1 + r} < \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}}, \end{cases} \quad (2.20)$$

gdzie

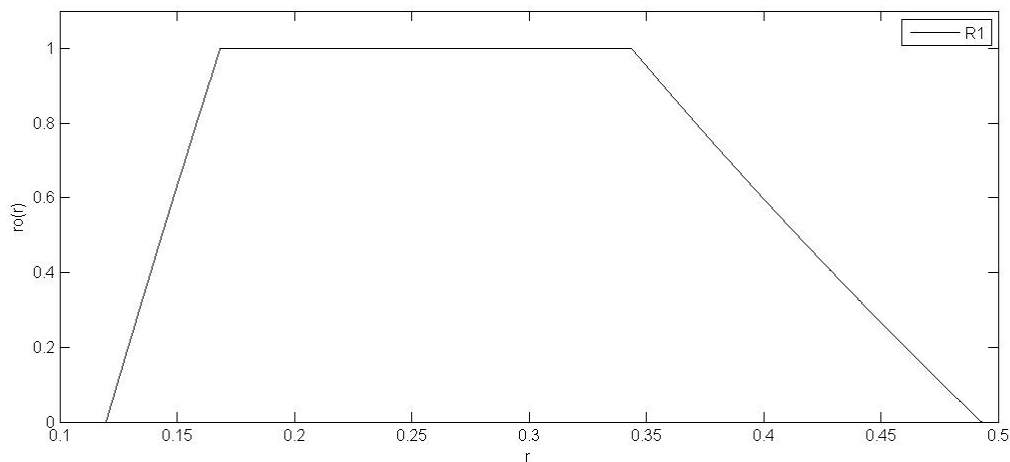
- $\check{C}_* \in [\check{C}_{min}; \check{C}]$ jest minimalnym górnym oszacowaniem cen zauważalnie mniejszych od obserwowanej ceny rynkowej \check{C} ,
- $\check{C}^* \in [\check{C}; \check{C}_{max}]$ jest maksymalnym dolnym oszacowaniem cen zauważalnie większych od obserwowanej ceny rynkowej \check{C} .

Przykład 2.6

Jeżeli prosta stopa zwrotu ma rozkład normalny $N(0,25; 0,02)$, to dla $PV_2 = Tr(90; 100; 115; 120)$ i ceny rynkowej $\check{C} = 107,5$ oczekiwana rozmyta stopa zwrotu R_2 z instrumentu przyjmuje wartość

$$\rho_{R_2}(r) = \mu_{PV_2} \left(\frac{134,38}{1+r} \right) = \begin{cases} \frac{14,44}{1+r} - 9 & \text{dla } 0,67 \leq \frac{1}{1+r} < 0,74, \\ 1 & \text{dla } 0,74 \leq \frac{1}{1+r} \leq 0,86, \\ 60 - \frac{26,88}{1+r} & \text{dla } 0,86 < \frac{1}{1+r} \leq 0,89 \\ 0 & \text{dla } 0,89 < \frac{1}{1+r}, \frac{1}{1+r} < 0,67. \end{cases}$$

Wykres funkcji przynależności do powyższej oczekiwanej stopy zwrotu został pokazany na Rysunku 2.6.



Rys. 2.6 Wykres funkcji przynależności oczekiwanej stopy zwrotu z instrumentu o $PV_2 = Tr(90; 100; 115; 120)$ i cenie rynkowej $\check{C} = 107,5$, przy założeniu, że prosta stopa zwrotu (2.14) ma rozkład $N(0,25; 0,02)$

□

Siatka dyskretyzacyjna rozmytej stopy zwrotu R dana jest wzorem

$$\begin{aligned} Nod(R, \check{C}, \bar{r}) &= \left\{ r_i: r_i = \frac{\check{C} \cdot (1 + \bar{r}) - x_i}{x_i}; x_i \in Nod(PV) \right\} \\ &= \left\{ r_i: r_i = \frac{100 \cdot \check{C} \cdot (1 + \bar{r})}{i} - 1; i \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Podobnie w przypadku $PV_3 = DTr(\check{C}_{min}; \check{C}_*; \check{C}^*; \check{C}_{max})$, oczekiwana rozmyta stopa zwrotu jest liczbą rozmytą R_3 z funkcją przynależności $\rho_{R_3} \in [0; 1]^{\mathbb{R} \times \Omega}$

$$\rho_{R_3}(r) = \begin{cases} \frac{\check{C} \cdot (1 + \bar{r})}{1 + r} - \check{C}_{min} & \text{dla } \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} \leq \frac{1 + \bar{r}}{1 + r} < \frac{\check{C}_*}{\check{C}}, \\ 1 & \text{dla } \frac{\check{C}_*}{\check{C}} \leq \frac{1 + \bar{r}}{1 + r} \leq \frac{\check{C}^*}{\check{C}}, \\ \frac{\check{C} \cdot (1 + \bar{r})}{1 + r} - \check{C}_{max} & \text{dla } \frac{\check{C}^*}{\check{C}} < \frac{1 + \bar{r}}{1 + r} \leq \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}}, \\ 0 & \text{dla } \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} < \frac{1 + \bar{r}}{1 + r}, \quad \frac{1 + \bar{r}}{1 + r} < \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} \end{cases} \quad (2.22)$$

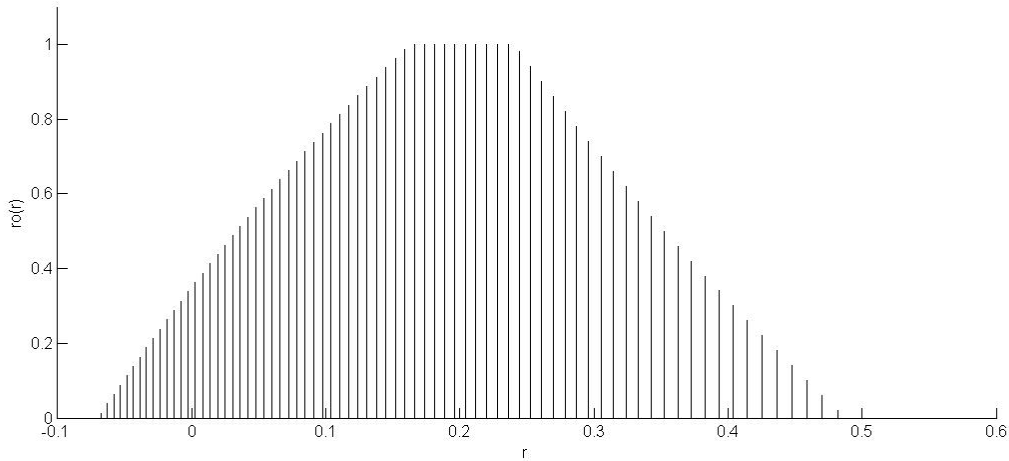
$$z \mathbb{S}(R_3) = \left\{ r_i: r_i = \frac{100 \cdot \check{C} \cdot (1 + \bar{r})}{i} - 1; 100 \cdot \check{C}_{min} < i < 100 \cdot \check{C}_{max}, i \in \mathbb{N} \right\} \subset \text{Nod}(R, \check{C}, \bar{r}).$$

Przykład 2.7

Jeżeli prosta stopa zwrotu ma rozkład normalny $N(0,2; 0,6)$, to funkcja przynależności oczekiwanej stopy zwrotu R_3 dla instrumentu o $PV_3 = DTr(25; 30; 32; 40)$ i ceny rynkowej $\check{C} = 31$ dana jest poprzez

$$\rho_{R_3}(r) = \mu_{PV_3} \left(\frac{31(1 + 0,2)}{1 + r} \right) = \begin{cases} \frac{7,44}{1 + r} - 5 & \text{dla } 0,67 \leq \frac{1}{1 + r} < 0,8, \\ 1 & \text{dla } 0,8 \leq \frac{1}{1 + r} \leq 0,94, \\ 8 - \frac{7,44}{1 + r} & \text{dla } 0,94 < \frac{1}{1 + r} \leq 1,07, \\ 0 & \text{dla } 1,89 < \frac{1}{1 + r}, \quad \frac{1}{1 + r} < 1,07 \end{cases}$$

i nośnik $r_i \in \mathbb{S}(R_3) = \left\{ r_i: r_i = \frac{3100 \cdot 1,2}{i} - 1; 2500 < i < 4000, i \in \mathbb{N} \right\} \subset \text{Nod}(R; 31; 0,2)$, co przedstawiono na Rysunku 2.7.



Rys. 2.7 Wykres funkcji przynależności oczekiwanej stopy zwrotu z instrumentu o $PV_3 = DTr(25; 30; 32; 40)$ i cenie rynkowej $\check{C} = 31$, przy założeniu, że prosta stopa zwrotu (2.14) ma rozkład $N(0,2; 0,6)$ \square

Dla $PV_4 = DT(\check{C}_{min}; \check{C}; \check{C}_{max})$, oczekiwana stopa zwrotu R_4 jest zbiorem rozmytym z funkcją przynależności

$$\rho_{R_4}(r) = \begin{cases} \frac{\check{C} \cdot \frac{1+\bar{r}}{1+r} - \check{C}_{min}}{\check{C} - \check{C}_{min}} & \text{dla } \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} \leq \frac{1+\bar{r}}{1+r} < 1, \\ 1 & \text{dla } \frac{1+\bar{r}}{1+r} = 1, \\ \frac{\check{C} \cdot \frac{1+\bar{r}}{1+r} - \check{C}_{max}}{\check{C} - \check{C}_{max}} & \text{dla } 1 < \frac{1+\bar{r}}{1+r} \leq \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}}, \\ 0 & \text{dla } \frac{1+\bar{r}}{1+r} < \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}}, \quad \frac{1+\bar{r}}{1+r} > \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} \end{cases} \quad (2.23)$$

z nośnikami $r_i \in \mathbb{S}(R_4) = \left\{ r_i: r_i = \frac{100 \cdot \check{C} \cdot (1+\bar{r})}{i} - 1; 100 \cdot \check{C}_{min} < i < 100 \cdot \check{C}_{max}, i \in \mathbb{N} \right\} \subset Nod(R; \check{C}; \bar{r})$.

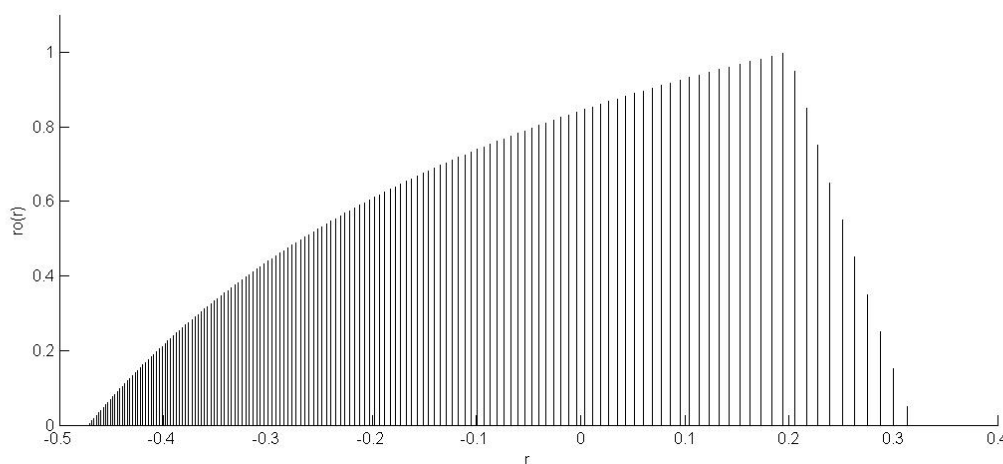
Przykład 2.8

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, jeżeli prosta stopa zwrotu ma rozkład normalny $N(0,2; 0,6)$, to funkcja przynależności oczekiwanej stopy zwrotu R_4 dla instrumentu o $PV_4 = DT(20; 22; 50)$ dana jest poprzez

$$\rho_{R_4}(r) = \mu_{PV_4}\left(\frac{26,4}{1+r}\right) = \begin{cases} \frac{13,2}{1+r} - 10 & \text{dla } 0,76 \leq \frac{1}{1+r} < 0,83, \\ 1 & \text{dla } \frac{1}{1+r} = 0,83, \\ 1,79 - \frac{0,94}{1+r} & \text{dla } 0,83 < \frac{1}{1+r} \leq 1,89, \\ 0 & \text{dla } 1,89 < \frac{1}{1+r}, \frac{1}{1+r} < 0,76 \end{cases}$$

i nośnik $r_i \in \mathbb{S}(R_4) = \left\{ r_i: r_i = \frac{2200 \cdot 1,2}{i} - 1; 2000 < i < 5000, i \in \mathbb{N} \right\} \subset \text{Nod}(R; 22; 0,2)$.

Wykres powyższej funkcji przynależności został przedstawiony na Rysunku 2.8.



Rys. 2.8 Wykres funkcji przynależności oczekiwanej stopy zwrotu z instrumentu o $PV_4 = DT(20; 22; 50)$ przy założeniu, że prosta stopa zwrotu (2.14) ma rozkład $N(0,2; 0,6)$

□

2.4 Miary ryzyka nieprecyzyjności dla oczekiwanych rozmytych stóp zwrotu

Miara energii dla oczekiwanej stopy zwrotu z instrumentu o wartości bieżącej danej dowolną liczbą rozmytą wyraża się wzorem

$$d(R) = \int_{x \in \mathbb{S}(R)} \rho(x) dx. \quad (2.24)$$

Miara energii dla oczekiwanej stopy zwrotu R_1 z instrumentu o $PV_1 = T(\check{C}_{min}; \check{C}; \check{C}_{max})$, wyraża się wzorem¹

¹ Patrz Dodatek A, Wyprowadzenie 1

$$d(R_1) = \frac{(1 + \bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} - \check{C}_{max}} \cdot \ln \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} + \frac{(1 + \bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} - \check{C}_{min}} \cdot \ln \frac{\check{C}}{\check{C}_{min}}. \quad (2.25)$$

Miara energii dla oczekiwanej rozmytej stopy zwrotu R_2 z instrumentu o $PV_2 = Tr(\check{C}_{min}; \check{C}_*; \check{C}^*; \check{C}_{max})$ i cenie rynkowej \check{C} dana jest przez²

$$d(R_2) = \frac{\check{C} \cdot (1 + \bar{r})}{\check{C}_* - \check{C}_{min}} \cdot \left(\ln \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}_*} - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}_*} + 1 \right) + \check{C}^* - \check{C}_* \quad (2.26)$$

$$+ \frac{\check{C} \cdot (1 + \bar{r})}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} \cdot \left(\ln \frac{\check{C}^*}{\check{C}_{max}} + \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}^*} - 1 \right).$$

Miara energii dla oczekiwanej stopy zwrotu R_3 z instrumentu o $PV_3 = DTr(\check{C}_{min}; \check{C}_*; \check{C}^*; \check{C}_{max})$ i cenie rynkowej \check{C} może zostać obliczona przy pomocy

$$d(R_3) = \sum_{r \in \mathbb{S}(R_3)} \rho_{R_3}(r). \quad (2.27)$$

Miara energii dla oczekiwanej stopy zwrotu R_4 z instrumentu o $PV_4 = DT(\check{C}_{min}; \check{C}; \check{C}_{max})$ obliczana jest z

$$d(R_4) = \sum_{r \in \mathbb{S}(R_4)} \rho_{R_4}(r). \quad (2.28)$$

Przejdźmy teraz do miary entropii. Wielkość ta dla oczekiwanej stopy zwrotu R_1 z instrumentu o $PV_1 = T(\check{C}_{min}; \check{C}; \check{C}_{max})$ wyraża się wzorem³

$$e(R_1) = \frac{\frac{1}{\check{C} - \check{C}_{max}} \left(\ln \frac{4\check{C} \cdot \check{C}_{max}}{(\check{C} + \check{C}_{max})^2} + \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} - 1 \right) + \frac{1}{\check{C} - \check{C}_{min}} \left(\ln \frac{(\check{C} + \check{C}_{min})^2}{4\check{C} \cdot \check{C}_{min}} - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} + 1 \right)}{\check{C}_{max} - \check{C}_{min} - \frac{1}{\check{C} - \check{C}_{max}} \left(\ln \frac{4\check{C} \cdot \check{C}_{max}}{(\check{C} + \check{C}_{max})^2} + \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} - 1 \right) - \frac{1}{\check{C} - \check{C}_{min}} \left(\ln \frac{(\check{C} + \check{C}_{min})^2}{4\check{C} \cdot \check{C}_{min}} - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} + 1 \right)}. \quad (2.29)$$

Miarę entropii dla oczekiwanej stopy zwrotu R_2 z instrumentu o $PV_2 = Tr(\check{C}_{min}; \check{C}_*; \check{C}^*; \check{C}_{max})$ i cenie rynkowej \check{C} , można obliczyć z⁴

² Patrz Dodatek A, Wyprowadzenie 3

³ Patrz Dodatek A, Wyprowadzenie 2

⁴ Patrz Dodatek A, Wyprowadzenie 4

$$\begin{aligned}
e(R_2) = & \left[\frac{1}{\check{c}_* - \check{c}_{min}} \cdot \left(\ln \frac{(\check{c} + \check{c}_{min})^2}{4\check{c}_* \check{c}_{min}} - \frac{\check{c}_{min}}{\check{c}_*} - 1 + \frac{2 \cdot (\check{c}_* + \check{c}_{min})}{\check{c} + \check{c}_{min}} \right) \right. \\
& + \frac{1}{\check{c}_* - \check{c}_{max}} \cdot \left(\ln \frac{4 \cdot \check{c}_* \cdot \check{c}_{max}}{(\check{c} + \check{c}_{max})^2} + \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}_*} - 1 - \frac{2 \cdot (\check{c}_* + \check{c}_{max})}{\check{c} + \check{c}_{max}} \right) \left. \right] \\
& \cdot \left[\check{c}_{max} - \check{c}_{min} - \frac{1}{\check{c}_* - \check{c}_{min}} \cdot \left(\ln \frac{(\check{c} + \check{c}_{min})^2}{4 \cdot \check{c}_* \cdot \check{c}_{min}} - \frac{\check{c}_{min}}{\check{c}_*} - 1 + \frac{2 \cdot (\check{c}_* + \check{c}_{min})}{\check{c} + \check{c}_{min}} \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{\check{c}_* - \check{c}_{max}} \cdot \left(\ln \frac{4 \cdot \check{c}_* \cdot \check{c}_{max}}{(\check{c} + \check{c}_{max})^2} + \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}_*} - 1 - \frac{2 \cdot (\check{c}_* + \check{c}_{max})}{\check{c} + \check{c}_{max}} \right) \right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.30}$$

Miarę entropii dla oczekiwanej stopy zwrotu R_3 z instrumentu o $PV_3 = DTr(\check{c}_{min}; \check{c}_*; \check{c}_{max})$ i cenie rynkowej \check{c} obliczamy zgodnie ze wzorem

$$e(R_3) = \frac{\sum_{r \in \mathbb{S}(R_3)} \min\{\rho_{R_3}(r); 1 - \rho_{R_3}(r)\}}{\sum_{r \in \mathbb{S}(R_3)} \max\{\rho_{R_3}(r); 1 - \rho_{R_3}(r)\}}. \tag{2.31}$$

Miara entropii dla oczekiwanej stopy zwrotu R_4 z instrumentu o $PV_4 = DT(\check{c}_{min}; \check{c}; \check{c}_{max})$ jest równa

$$e(R_4) = \frac{\sum_{r \in \mathbb{S}(R_4)} \min\{\rho_{R_4}(r); 1 - \rho_{R_4}(r)\}}{\sum_{r \in \mathbb{S}(R_4)} \max\{\rho_{R_4}(r); 1 - \rho_{R_4}(r)\}}. \tag{2.32}$$

Policzmy, dla przykładu, wartości miar energii i entropii dla instrumentów finansowych, których oczekiwane stopy zwrotu wyznaczyliśmy w poprzednim podrozdziale.

Przykład 2.9

Miara energii dla oczekiwanej stopy zwrotu z instrumentu o wartości bieżącej $PV_1 = T(80; 100; 150)$, o oczekiwanej rozmytej stopie zwrotu R_1 z funkcją przynależności (2.25) wyraża się wzorem

$$d(R_1) = \int_{0,25}^{0,5625} \frac{1,25}{1+r} - 0,8}{0,2} dr + \int_{0,2}^{0,25} \frac{1,25}{1+r} - 1,5}{-0,5} dr = 0,1926.$$

□

Przykład 2.10

Miara energii dla oczekiwanej stopy zwrotu z instrumentu o wartości bieżącej $PV_2 = Tr(90; 100; 115; 120)$ z ceną rynkową $\check{C} = 107,5$ o oczekiwanej rozmytej stopie zwrotu R_2 danej funkcją przynależności (2.26) przyjmuje następującą wartość

$$d(R_2) = \int_{0,3438}^{0,4931} \frac{\frac{1,25}{1+r} - \frac{90}{107,5}}{\frac{10}{107,5}} dr + (0,3438 - 0,1685) + \int_{0,1198}^{0,1685} \frac{\frac{1,25}{1+r} - \frac{90}{107,5}}{-\frac{5}{107,5}} dr = 0,2720.$$

□

Przykład 2.11

Miara energii dla oczekiwanej stopy zwrotu z instrumentu o wartości bieżącej $PV_3 = DTr(25; 30; 32; 40)$ z ceną rynkową $\check{C} = 31$ o oczekiwanej rozmytej stopie zwrotu R_3 danej funkcją przynależności (2.27) jest równa

$$d(R_3) = 850.$$

□

Przykład 2.12

Miara energii dla oczekiwanej stopy zwrotu z instrumentu o wartości bieżącej $PV_4 = DT(20; 22; 50)$ i oczekiwanej rozmytej stopie zwrotu R_4 danej funkcją przynależności (2.28) jest równa

$$d(R_4) = 1500.$$

□

Przejdźmy teraz do miary entropii.

Przykład 2.13

Dla oczekiwanej stopy zwrotu z instrumentu o wartości bieżącej $PV_1 = T(80; 100; 150)$ i oczekiwanej rozmytej stopie zwrotu R_1 danej funkcją przynależności (2.29) miara energii wynosi

$$e(R_1) = 0,2673.$$

□

Przykład 2.14

Miara entropii dla oczekiwanej stopy zwrotu z instrumentu o wartości bieżącej $PV_2 = Tr(90; 100; 115; 120)$ z ceną rynkową $\check{C} = 107,5$ i oczekiwanej rozmytej stopie zwrotu R_2 danej funkcją przynależności (2.30) przyjmuje wartość

$$e(R_2) = 0,1524.$$

□

Przykład 2.15

Miara entropii dla oczekiwanej stopy zwrotu z instrumentu o wartości bieżącej $PV_3 = DTr(25; 30; 32; 40)$ z ceną rynkową $\check{C} = 31$ i oczekiwanej rozmytej stopie zwrotu R_3 danej funkcją przynależności (2.31) jest równa

$$e(R_3) = 0,2766.$$

□

Przykład 2.16

Miara entropii dla oczekiwanej stopy zwrotu z instrumentu o wartości bieżącej $PV_4 = DT(20; 22; 50)$ i oczekiwanej rozmytej stopie zwrotu R_4 danej funkcją przynależności (2.32) wynosi

$$e(R_4) = \frac{1}{3}.$$

□

2.5 Rozmyty czynnik dyskontujący

Korzyści czerpane z posiadania instrumentu finansowego ocenić można przy pomocy czynnika dyskonta v określonego przez

$$v = \frac{1}{1+r}, \tag{2.33}$$

gdzie r jest stopą zwrotu z tego instrumentu. Korzystając z zależności (2.33), na podstawie rozmytej stopy zwrotu $R \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ z dowolnego instrumentu wyznaczamy rozmyty czynnik dyskontujący. Jest on zbiorem rozmytym $D \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ o funkcji przynależności $\eta \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$ określonej za pomocą tożsamości

$$\eta(v) = \eta\left(\frac{1}{1+r}\right) = \rho(r). \tag{2.34}$$

Zatem dla PV danej liczbą rozmytą możemy policzyć rozmyty czynnik dyskontujący D . Korzystając ze wzoru (2.34) oraz z postaci funkcji przynależności do oczekiwanych stóp zwrotu z instrumentów o wartościach bieżących danych kolejno jako trójkątna, trapezoidalna

oraz dyskretna trójkątna bądź trapezoidalna liczba rozmyta, możemy teraz wyznaczyć postaci oczekiwanych czynników dyskontujących.

I tak, jeżeli $PV_1 = T(\check{C}_{min}; \check{C}; \check{C}_{max})$, to zestawiając razem (2.19) i (2.34) otrzymujemy

$$\eta_{D_1}(v) = \begin{cases} \frac{\check{C} \cdot v - \bar{v} \cdot \check{C}_{min}}{\check{C} \cdot \bar{v} - \bar{v} \cdot \check{C}_{min}} & \text{dla } \bar{v} \cdot \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} \leq v < \bar{v}, \\ 1 & \text{dla } v = \bar{v}, \\ \frac{\check{C} \cdot v - \bar{v} \cdot \check{C}_{max}}{\check{C} \cdot \bar{v} - \bar{v} \cdot \check{C}_{max}} & \text{dla } \bar{v} < v \leq \bar{v} \cdot \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}}, \\ 0 & \text{dla } \bar{v} \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} < v, \quad v < \bar{v} \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}}, \end{cases} \quad (2.35)$$

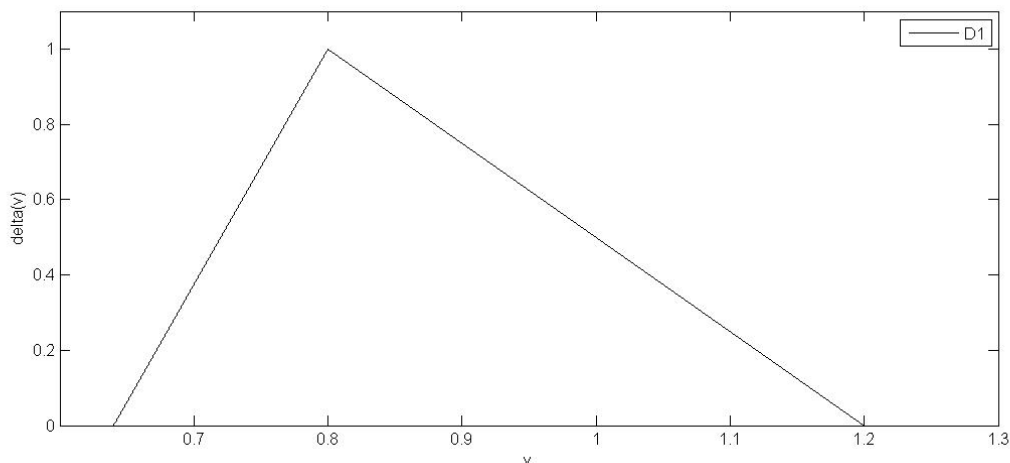
gdzie \bar{v} jest czynnikiem dyskontującym wyznaczonym za pomocą oczekiwanej stopy zwrotu \bar{r} . Łatwo zauważyć, że wyznaczony powyżej oczekiwany czynnik dyskonta jest rozmytą liczbą trójkątną $D_1 = T\left(\bar{v} \cdot \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}}; \bar{v}; \bar{v} \cdot \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}}\right)$.

Przykład 2.17

Jeżeli proste stopy zwrotu mają rozkład normalny $N(0,25; 0,02)$, to dla instrumentu finansowego o wartości bieżącej $PV_1 = T(80; 100; 150)$ funkcja przynależności oczekiwanego czynnika dyskontującego D_1 jest równa

$$\eta_{D_1}(v) = \begin{cases} \frac{6,25 \cdot v - 4}{0,16} & \text{dla } 0,64 \leq v < 0,8, \\ 1 & \text{dla } v = 0,8, \\ \frac{3 - 2,5 \cdot v}{-0,4} & \text{dla } 0,8 < v \leq 1,2, \\ 0 & \text{dla } 1,2 < v, \quad v < 0,64. \end{cases}$$

Wykres powyższej funkcji przynależności został przedstawiony na Rysunku 2.9.



Rys. 2.9 Wykres funkcji przynależności oczekiwanego czynnika dyskontującego dla instrumentu finansowego o $PV_1 = T(80; 100; 150)$ przy założeniu, że prosta stopa zwrotu (2.14) ma rozkład $N(0,25; 0,02)$

□

Powtórzmy teraz powyższe rozumowanie dla przypadku instrumentu o $PV_2 = Tr(\check{C}_{min}; \check{C}_*; \check{C}^*; \check{C}_{max})$. Zestawiając razem (2.20) i (2.34) otrzymujemy

$$\eta_{D_2}(v) = \begin{cases} \frac{\check{C} \cdot v - \check{C}_{min} \cdot \bar{v}}{\check{C}_* \cdot \bar{v} - \check{C}_{min} \cdot \bar{v}} & \text{dla } \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} \cdot \bar{v} \leq v \leq \frac{\check{C}_*}{\check{C}} \cdot \bar{v}, \\ 1 & \text{dla } \frac{\check{C}_*}{\check{C}} \cdot \bar{v} < v < \frac{\check{C}^*}{\check{C}} \cdot \bar{v}, \\ \frac{\check{C} \cdot v - \check{C}_{max} \cdot \bar{v}}{\check{C}^* \cdot \bar{v} - \check{C}_{max} \cdot \bar{v}} & \text{dla } \frac{\check{C}^*}{\check{C}} \cdot \bar{v} < v \leq \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} \cdot \bar{v}, \\ 0 & \text{dla } \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} \bar{v} < v, \quad v < \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} \bar{v}, \end{cases} \quad (2.36)$$

gdzie \bar{v} jest czynnikiem dyskontującym wyznaczonym za pomocą oczekiwanej stopy zwrotu \bar{r} . Łatwo zauważyć, że wyznaczony powyżej oczekiwany czynnik dyskonta jest rozmytą liczbą

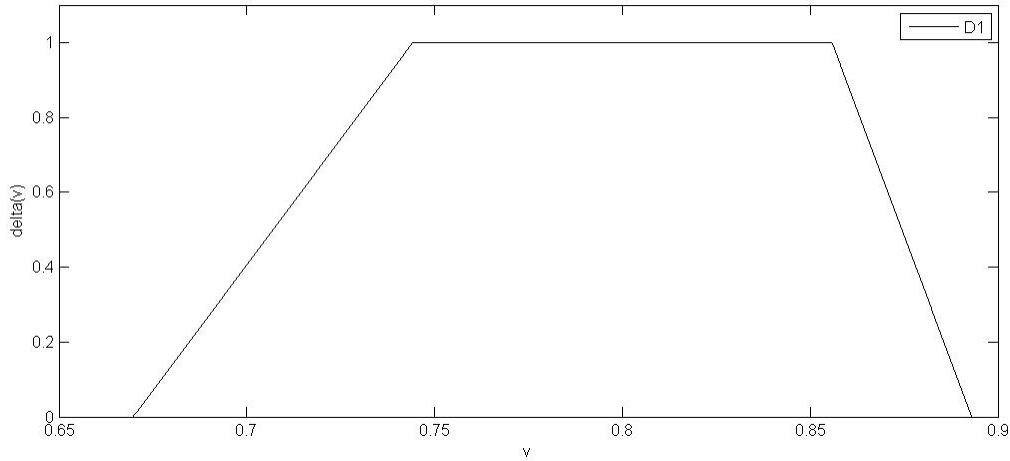
$$\text{trapezoidalną } D_2 = Tr\left(\frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} \cdot \bar{v}; \frac{\check{C}_*}{\check{C}} \cdot \bar{v}; \frac{\check{C}^*}{\check{C}} \cdot \bar{v}; \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} \cdot \bar{v}\right).$$

Przykład 2.18

Jeżeli proste stopy zwrotu z instrumentu mają rozkład normalny z parametrami $N(0,25; 0,02)$, wtedy funkcja przynależności oczekiwanego czynnika dyskontującego D_2 z instrumentu o wartości bieżącej $PV_2 = Tr(90; 100; 115; 120)$ ma postać

$$\eta_{D_2}(v) = \begin{cases} 13,43 \cdot v - 9 & \text{dla } 0,67 \leq v \leq 0,74, \\ 1 & \text{dla } 0,74 < v < 0,86, \\ 24 - 26,88 \cdot v & \text{dla } 0,86 < v \leq 0,89, \\ 0 & \text{dla } 0,89 < v, v < 0,67. \end{cases}$$

Funkcja ta została zaprezentowana na Rysunku 2.10.



Rys. 2.10 Wykres funkcji przynależności oczekiwanego czynnika dyskontującego z instrumentu o $PV_2 = Tr(90; 100; 115; 120)$ przy założeniu, że prosta stopa zwrotu (2.14) ma rozkład $N(0,25; 0,02)$

□

Siatka dyskretyzacyjna rozmytego czynnika dyskontującego D obliczonego przy pomocy oczekiwanej rozmytej stopy zwrotu R jest opisana jest wtedy wzorem

$$\begin{aligned} Nod(D, \check{C}, \bar{v}) &= \left\{ v_i: v_i = \frac{1}{1+r_i}; r_i \in Nod(R; \check{C}; \bar{r}) \right\} \\ &= \left\{ v_i: v_i = \frac{i}{100 \cdot \check{C} \cdot (1+\bar{r})}; i \in \mathbb{N} \right\}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Oczekiwany czynnik dyskontujący D_3 z instrumentu o PV modelowanej dyskretną trapezoidalną liczbą rozmytą $PV_3 = DTr(\check{C}_{min}; \check{C}_*; \check{C}^*; \check{C}_{max})$ dany jest funkcją przynależności

$$\eta_{D_3}(v) = \begin{cases} \frac{\check{C} \cdot v - \check{C}_{min} \cdot \bar{v}}{\check{C}_* \cdot \bar{v} - \check{C}_{min} \cdot \bar{v}} & \text{dla } \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} \cdot \bar{v} \leq v \leq \frac{\check{C}_*}{\check{C}} \cdot \bar{v}, \\ 1 & \text{dla } \frac{\check{C}_*}{\check{C}} \cdot \bar{v} < v < \frac{\check{C}^*}{\check{C}} \cdot \bar{v}, \\ \frac{\check{C} \cdot v - \check{C}_{max} \cdot \bar{v}}{\check{C}^* \cdot \bar{v} - \check{C}_{max} \cdot \bar{v}} & \text{dla } \frac{\check{C}^*}{\check{C}} \cdot \bar{v} < v \leq \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} \cdot \bar{v}, \\ 0 & \text{dla } \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} \bar{v} < v, \quad v < \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} \bar{v} \end{cases} \quad (2.38)$$

z nośnikami

$$S(D_3) = \left\{ v_i: v_i = \frac{i}{100 \cdot \check{C} \cdot (1+\bar{r})}; 100 \cdot \check{C}_{min} < i < 100 \cdot \check{C}_{min}, i \in \mathbb{N} \right\} \subset Nod(D, \check{C}, \bar{v}),$$

gdzie \bar{v} jest czynnikiem dyskontującym wyznaczonym za pomocą oczekiwanej stopy zwrotu \bar{r} . Łatwo zauważyć, że wyznaczony powyżej oczekiwany czynnik dyskonta jest dyskretną rozmytą liczbą trapezoidalną $D_3 = DTr\left(\frac{\check{c}_{min}}{\check{c}} \cdot \bar{v}; \frac{\check{c}^*}{\check{c}} \cdot \bar{v}; \frac{\check{c}^*}{\check{c}} \cdot \bar{v}; \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}} \cdot \bar{v}\right)$.

Podobnie, oczekiwany czynnik dyskontujący D_4 z instrumentu o $PV_4 = DT(\check{c}_{min}; \check{c}; \check{c}_{max})$ określony jest funkcją przynależności

$$\eta_{D_4}(v) = \begin{cases} \frac{\check{c} \cdot v - \bar{v} \cdot \check{c}_{min}}{\check{c} \cdot \bar{v} - \bar{v} \cdot \check{c}_{min}} & \text{dla } \bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{min}}{\check{c}} \leq v < \bar{v}, \\ 1 & \text{dla } v = \bar{v}, \\ \frac{\check{c} \cdot v - \bar{v} \cdot \check{c}_{max}}{\check{c} \cdot \bar{v} - \bar{v} \cdot \check{c}_{max}} & \text{dla } \bar{v} < v \leq \bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}}, \\ 0 & \text{dla } \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}} \cdot \bar{v} < v, \quad v < \frac{\check{c}_{min}}{\check{c}} \cdot \bar{v} \end{cases} \quad (2.39)$$

z $\mathbb{S}(D_4) = \left\{v_i: v_i = \frac{i}{100 \cdot \check{c} \cdot (1 + \bar{r})}; 100 \cdot \check{c}_{min} < i < 100 \cdot \check{c}_{max}, i \in \mathbb{N}\right\} \subset Nod(D, \check{c}, \bar{v})$. Łatwo zauważyć, że powyższy oczekiwany czynnik dyskonta jest dyskretną rozmytą liczbą trójkątną $D_4 = DT\left(\bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{min}}{\check{c}}; \bar{v}; \bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}}\right)$.

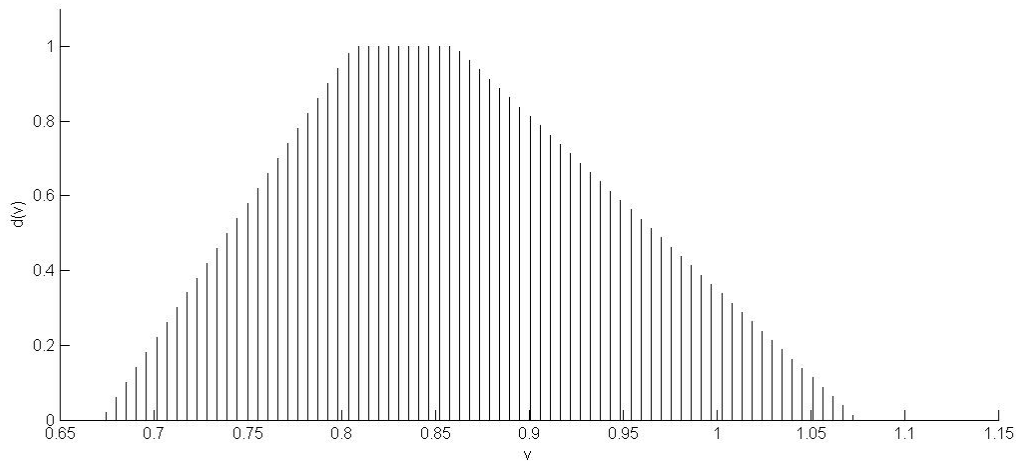
Wyznamy funkcję przynależności oczekiwanego czynnika dyskontującego dla instrumentów finansowych danych dyskretnymi liczbami rozmytymi.

Przykład 2.19

Jeżeli proste stopy zwrotu z instrumentu mają rozkład normalny z parametrami $N(0,2; 0,6)$, wtedy funkcja przynależności oczekiwanego czynnika dyskontującego D_3 z instrumentu o wartości bieżącej $PV_3 = DTr(25; 30; 35; 40)$ określona jest wzorem

$$\eta_{D_3}(v) = \begin{cases} 7,44v - 5 & \text{dla } 0,67 \leq v \leq 0,81, \\ 1 & \text{dla } 0,81 < v < 0,86, \\ 5 - 4,65v & \text{dla } 0,86 < v \leq 1,08, \\ 0 & \text{dla } 1,08 < v, \quad v < 0,67. \end{cases}$$

Rysunek 2.11 przedstawia wykres powyższej funkcji przynależności.



Rys. 2.11 Wykres funkcji przynależności oczekiwanego czynnika dyskontującego z instrumentu o $PV_3 = DTr(25; 30; 35; 40)$, przy założeniu, że prosta stopa zwrotu (2.14) ma rozkład $N(0,2; 0,6)$

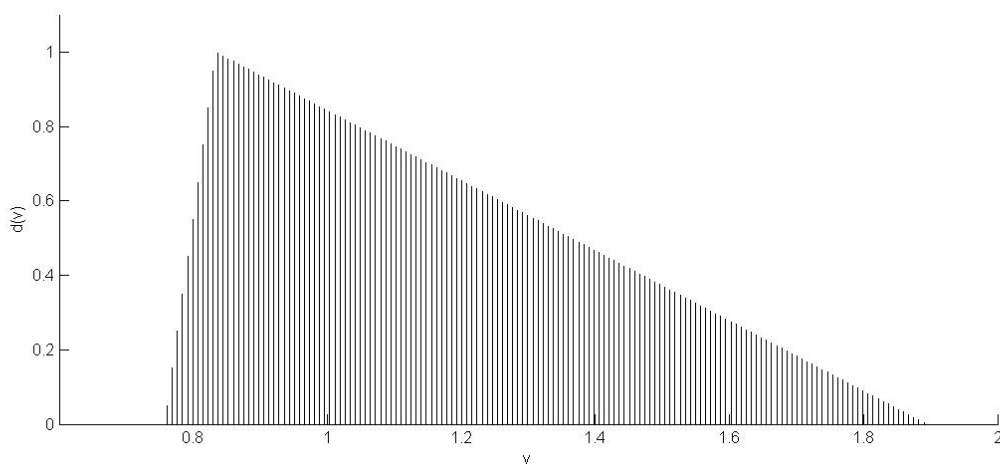
□

Przykład 2.20

Jeżeli proste stopy zwrotu z instrumentu mają rozkład normalny z parametrami $N(0,2; 0,6)$, wtedy funkcja przynależności oczekiwanego czynnika dyskontującego D_4 z instrumentu o wartości bieżącej $PV_4 = DT(20; 22; 50)$ określona jest wzorem

$$\eta_{D_4}(v) = \begin{cases} 13,2v - 5 & \text{dla } 0,76 \leq v < 0,83, \\ 1 & \text{dla } v = 0,83, \\ 1,79 - 0,94v & \text{dla } 0,83 < v \leq 1,89, \\ 0 & \text{dla } 1,89 < v, \quad v < 0,76. \end{cases}$$

Wykres η_{D_4} został przedstawiony na Rysunku 2.12.



Rys. 2.12 Wykres funkcji przynależności oczekiwanego czynnika dyskontującego z instrumentu o $PV_4 = DT(20; 22; 50)$, przy założeniu, że prosta stopa zwrotu (2.14) ma rozkład $N(0,2; 0,6)$

□

2.6 Miary energii i entropii dla rozmytego czynnika dyskontującego

Miary energii i entropii dla dowolnych rozmytych oczekiwanych czynników dyskontujących z instrumentów obliczamy za pomocą wzorów (1.28), (1.29) i (1.31). Narzędziem pomiaru wieloznaczności rozmytego dyskonta $D \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ jest miara energii

$$d(D) = \int_{v \in \mathbb{S}(D)} \eta(v) dv \quad \text{lub} \quad d(D) = \sum_{v \in \mathbb{S}(D)} \eta(v). \quad (2.40)$$

Natomiast narzędziem pomiaru nieostrości rozmytego dyskonta $D \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ jest miara entropii

$$e(D) = \frac{m(D \cap D^c)}{m(D \cup D^c)}, \quad (2.41)$$

gdzie D^c jest dopełnieniem zbioru D .

Ze względu na fakt, że czynnik dyskontujący z instrumentu danego odpowiednio trójkątną, trapezoidalną lub dyskretną liczbą rozmytą przyjmuje taką samą formę jak jego PV , korzystając ze wzorów (1.32)-(1.37) możemy obliczyć miary energii i entropii oczekiwanych czynników dyskontujących. I tak, dla czynnika dyskontującego będącego w omawianym przypadku trójkątną liczbą rozmytą $D_1 = T\left(\bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{min}}{\check{c}}; \bar{v}; \bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}}\right)$ miara energii obliczana jest za pomocą⁵

$$d(D_1) = \frac{\bar{v}}{2 \cdot \check{c}} \cdot (\check{c}_{max} - \check{c}_{min}). \quad (2.42)$$

Przykład 2.21

Jeżeli proste stopy zwrotu mają rozkład normalny $N(0,25; 0,02)$, to dla oczekiwanego czynnika dyskontującego D_1 z instrumentu o $PV_1 = T(80; 100; 150)$ miara energii jest równa

$$d(D_1) = \frac{0,8}{2 \cdot 100} \cdot (150 - 80) = 0,28.$$

□

Dla czynnika dyskontującego będącego trapezoidalną liczbą rozmytą $D_2 = Tr\left(\frac{\check{c}_{min}}{\check{c}} \cdot \bar{v}; \frac{\check{c}_*}{\check{c}} \cdot \bar{v}; \frac{\check{c}^*}{\check{c}} \cdot \bar{v}; \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}} \cdot \bar{v}\right)$ miara energii wynosi⁶

⁵ Patrz Dodatek A, Wyprowadzenie 5

⁶ Patrz Dodatek A, Wyprowadzenie 7

$$d(D_2) = \frac{\bar{v}}{2 \cdot \check{c}} \cdot (\check{c}^* + \check{c}_{max} - \check{c}_{min} - \check{c}_*). \quad (2.43)$$

Przykład 2.22

Jeżeli proste stopy zwrotu mają rozkład normalny $N(0,25; 0,02)$, to dla oczekiwanego czynnika dyskontującego D_2 z instrumentu o $PV_2 = Tr(90; 100; 115; 120)$ miara energii jest równa

$$\begin{aligned} d(D_2) &= d\left(Tr\left(\frac{90}{107,5} \cdot 0,8; \frac{100}{107,5} \cdot 0,8; \frac{115}{107,5} \cdot 0,8; \frac{120}{107,5} \cdot 0,8\right)\right) \\ &= \frac{0,8}{2 \cdot 107,5} \cdot (115 + 120 - 90 - 100) = 0,1674. \end{aligned}$$

□

Dla oczekiwanego czynnika dyskonta $D_3 = DTr\left(\frac{\check{c}_{min}}{\check{c}} \cdot \bar{v}; \frac{\check{c}_*}{\check{c}} \cdot \bar{v}; \frac{\check{c}^*}{\check{c}} \cdot \bar{v}; \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}} \cdot \bar{v}\right)$ z instrumentu o $PV_3 = DTr(\check{c}_{min}; \check{c}_*; \check{c}^*; \check{c}_{max})$ miara energii jest postaci

$$d(D_3) = \sum_{v \in \mathbb{S}(D_3)} \eta_{D_3}(v). \quad (2.44)$$

Przykład 2.23

Jeżeli proste stopy zwrotu mają rozkład normalny $N(0,25; 0,02)$, to dla oczekiwanego czynnika dyskontującego D_3 z instrumentu o $PV_3 = DTr(25; 30; 32; 40)$ miara energii wynosi

$$d(D_3) = 850.$$

□

Dla oczekiwanego czynnika dyskontującego $D_4 = DT\left(\bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{min}}{\check{c}}; \bar{v}; \bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}}\right)$ obliczonego z instrumentu o $PV_4 = DT(\check{c}_{min}; \check{c}; \check{c}_{max})$, zgodnie ze wzorem (1.34) miara energii przyjmuje postać

$$d(D_4) = \sum_{v \in \mathbb{S}(D_4)} \eta_{D_4}(v). \quad (2.45)$$

Przykład 2.24

Jeżeli proste stopy zwrotu mają rozkład normalny $N(0,25; 0,02)$, to dla oczekiwanego czynnika dyskontującego D_4 z instrumentu o $PV_4 = DT(20; 22; 50)$ miara energii wynosi

$$d(D_4) = 1500.$$

□

Przejdźmy teraz do miary entropii czynnika dyskontującego. Dla czynnika dyskontującego będącego trójkątną liczbą rozmytą $D_1 = T\left(\bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{min}}{\check{c}}; \bar{v}; \bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}}\right)$ miara entropii wyraża się wzorem⁷

$$e(D_1) = \frac{1}{3}. \quad (2.46)$$

Przykład 2.25

Jeżeli proste stopy zwrotu mają rozkład normalny $N(0,25; 0,2)$, to dla oczekiwanego czynnika dyskontującego D_1 z przykładowego instrumentu o $PV_1 = T(80; 100; 150)$ entropia wynosi

$$e(D_1) = \frac{1}{3}.$$

□

W przypadku czynnika dyskontującego $D_2 = Tr\left(\frac{\check{c}_{min}}{\check{c}} \cdot \bar{v}; \frac{\check{c}_*}{\check{c}} \cdot \bar{v}; \frac{\check{c}^*}{\check{c}} \cdot \bar{v}; \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}} \cdot \bar{v}\right)$, miara ta jest równa⁸

$$e(D_2) = \frac{\check{c}_* - \check{c}_{min} + \check{c}_{max} - \check{c}^*}{-\check{c}_* - 3 \cdot \check{c}_{min} + 3 \cdot \check{c}_{max} + \check{c}^*}. \quad (2.47)$$

Przykład 2.26

Jeżeli proste stopy zwrotu mają rozkład normalny $N(0,25; 0,2)$, to dla oczekiwanego czynnika dyskontującego D_2 z instrumentu o $PV_2 = Tr(90; 100; 115; 120)$ mamy

$$e(D_2) = \frac{\frac{100}{107,5} \cdot 0,8 - \frac{90}{107,5} \cdot 0,8 + \frac{120}{107,5} \cdot 0,8 - \frac{115}{107,5} \cdot 0,8}{-\frac{100}{107,5} \cdot 0,8 - 3 \cdot \frac{90}{107,5} \cdot 0,8 + 3 \cdot \frac{120}{107,5} \cdot 0,8 + \frac{115}{107,5} \cdot 0,8} = \frac{1}{7}.$$

□

Miara entropii dla rozmytego czynnika dyskontującego o parametrach $D_3 = DTr\left(\frac{\check{c}_{min}}{\check{c}} \cdot \bar{v}; \frac{\check{c}_*}{\check{c}} \cdot \bar{v}; \frac{\check{c}^*}{\check{c}} \cdot \bar{v}; \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}} \cdot \bar{v}\right)$ policzonego dla instrumentu o wartości bieżącej $PV_3 = DTr(\check{c}_{min}; \check{c}_*; \check{c}^*; \check{c}_{max})$, wyraża się wzorem

⁷ Patrz Dodatek A, Wyprowadzenie 6

⁸ Patrz Dodatek A, Wyprowadzenie 8

$$e(D_3) = \frac{\sum_{v \in \mathbb{S}(D_3)} \min\{\eta_{D_3}(v); 1 - \eta_{D_3}(v)\}}{\sum_{v \in \mathbb{S}(D_3)} \max\{\eta_{D_3}(v); 1 - \eta_{D_3}(v)\}}. \quad (2.48)$$

Na koniec, miara entropii dla czynnika dyskontującego $D_4 = DT\left(\bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{min}}{\check{c}}; \bar{v}; \bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}}\right)$ z instrumentu o wartości bieżącej $PV_4 = DT(\check{c}_{min}; \check{c}_*; \check{c}_{max})$ dana jest przez

$$e(D_4) = \frac{\sum_{v \in \mathbb{S}(D_4)} \min\{\eta_{D_4}(v); 1 - \eta_{D_4}(v)\}}{\sum_{v \in \mathbb{S}(D_4)} \max\{\eta_{D_4}(v); 1 - \eta_{D_4}(v)\}} = \frac{1}{3}. \quad (2.49)$$

Przykład 2.27

Jeżeli proste stopy zwrotu mają rozkład normalny $N(0,2; 0,6)$, to dla oczekiwanego czynnika dyskontującego D_3 z instrumentu o $PV_3 = DTr(25; 30; 32; 40)$ entropia wynosi

$$e(D_3) = 0,2766.$$

□

Przykład 2.28

Jeżeli proste stopy zwrotu mają rozkład normalny $N(0,2; 0,6)$, to dla oczekiwanego czynnika dyskontującego D_4 z instrumentu o $PV_4 = DT(20; 22; 50)$ mamy

$$e(D_4) = \frac{1}{3}.$$

□

2.7. Wnioski

Głównym problemem w przedstawionych powyżej rozważaniach jest fakt, że stopa zwrotu z instrumentu o wartości bieżącej modelowanej trapezoidalną liczbą rozmytą (lub którymś z jej podprzypadków), nie jest niestety trapezoidalną liczbą rozmytą. Znacznie utrudnia to obliczanie miar energii i entropii. Z drugiej strony, wyliczony na podstawie rozmytej stopy zwrotu rozmyty czynnik dyskontujący dla instrumentu o wartości bieżącej danej w każdej z rozważanej postaci, jest trapezoidalną liczbą rozmytą (lub też odpowiednim jej podprzypadkiem).

Zastąpienie rozważań nad stopą zwrotu z instrumentu o rozmytej wartości bieżącej przez badania nad czynnikiem dyskontującym powoduje znaczne ułatwienie obliczania miar wieloznaczności i nieostrości obarczających ten instrument. Podejście to zachowuje walor

informacyjny, jaki niesie ze sobą obliczona stopa zwrotu a także znacznie ułatwia obliczanie miar energii i entropii we wszystkich rozważanych przypadkach.

Formalna prostota uzyskanych opisów czynnika dyskonta zachęca do podjęcia próby jego zastosowania jako narzędzia analizy portfelowej. Kryterium maksymalizacji oczekiwanej stopy zwrotu zostanie wtedy zastąpione przez kryterium minimalizacji oczekiwanego czynnika dyskonta. W przypadku nierozmytych wartości obu tych parametrów są to kryteria równoważne. Wobec braku znajomości efektywnych miar energii i entropii dla dyskretnych trapezoidalnych i trójkątnych liczb rozmytych, nie jest możliwe konstruowanie zadań portfelowych dla portfeli o wartościach bieżących składników danych w tej postaci.

3. Portfel dwuskładnikowy z wartością bieżącą daną trójkątną liczbą rozmytą - studium przypadku

W niniejszym rozdziale omówiony zostanie przypadek portfela dwuskładnikowego, złożonego z instrumentów o wartości bieżącej danej trójkątną liczbą rozmytą. Podrozdziały zawierają kolejno opis modelu, w tym charakterystykę stopy zwrotu i czynnika dyskontującego z portfela, dowody zależności pomiędzy miarami ryzyka, zadanie maksymalizacji zysku i minimalizacji ryzyka jak również przykłady zastosowania modelu.

3.1 Stopa zwrotu z portfela dwuskładnikowego

Poprzez portfel będziemy rozumieć dowolny, skończenie elementowy zbiór instrumentów finansowych. Każdy z tych instrumentów jest charakteryzowany przez oszacowaną wartość bieżącą i przewidywaną wartość przyszłą.

Rozważmy przypadek portfela dwuskładnikowego π złożonego z instrumentów finansowych A_1 oraz A_2 . Wartość bieżąca instrumentu A_i jest dana jako trójkątna liczba rozmyta $PV^i = T(\check{C}_{min}^i; \check{C}^i; \check{C}_{max}^i)$, $i = 1, 2$. Zgodnie ze wzorem (1.18), wartość bieżąca tak określonego portfela jest opisana jako trójkątna liczba rozmyta

$$\begin{aligned} PV^\pi &= PV^1 + PV^2 = T(\check{C}_{min}^1 + \check{C}_{min}^2; \check{C}^1 + \check{C}^2; \check{C}_{max}^1 + \check{C}_{max}^2) \\ &= T(\check{C}_{min}^\pi; \check{C}^\pi; \check{C}_{max}^\pi). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Wartość przyszła instrumentu A_i modelowana jest jako zmienna losowa \tilde{V}_t^i . Za Markowitzem [1952] zakładamy, że dwuwymiarowa zmienna losowa odpowiadająca prostej stopie zwrotu z każdego z instrumentów $(\tilde{r}_t^1; \tilde{r}_t^2)$ ma dwuwymiarowy rozkład normalny $N((\bar{r}_1; \bar{r}_2)^T, \Sigma)$, gdzie macierz kowariancji przyjmuje postać

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & cov_{12} \\ cov_{21} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Każdemu instrumentowi A_i przypisujemy wtedy jego FV określona za pomocą zależności

$$\tilde{V}_t^i(\omega) = \check{C}^i \cdot (1 + \tilde{r}_t^i(\omega)). \quad (3.3)$$

Udział p_i instrumentu A_i w portfelu π jest określony przez

$$p_i = \frac{\check{C}^i}{\check{C}^\pi}. \quad (3.4)$$

Wartość przyszła portfela π wtedy wynosi

$$\begin{aligned} \tilde{V}_t(\omega) &= \tilde{V}_t^1(\omega) + \tilde{V}_t^2(\omega) = \check{C}^1 \cdot (1 + \tilde{r}_t^1(\omega)) + \check{C}^2 \cdot (1 + \tilde{r}_t^2(\omega)) \\ &= \check{C}^\pi \cdot (1 + \tilde{r}_t(\omega)), \end{aligned} \quad (3.5)$$

gdzie

$$\tilde{r}_t(\omega) = p_1 \cdot \tilde{r}_t^1(\omega) + p_2 \cdot \tilde{r}_t^2(\omega) \quad (3.6)$$

jest stopą zwrotu z portfela π . Oczekiwana stopa zwrotu z portfela jest zatem równa

$$\bar{r} = p_1 \cdot \bar{r}_1 + p_2 \cdot \bar{r}_2. \quad (3.7)$$

Funkcja przynależności stopy zwrotu z portfela ma postać:

$$\rho(r | \check{C}_{min}^\pi; \check{C}^\pi; \check{C}_{max}^\pi) = \begin{cases} \frac{\frac{\check{C}^\pi \cdot (1 + \bar{r})}{1 + r} - \check{C}_{min}^\pi}{\check{C}^\pi - \check{C}_{min}^\pi} & \text{dla } \frac{\check{C}_{min}^\pi}{\check{C}^\pi} \leq \frac{1 + \bar{r}}{1 + r} < 1, \\ 1 & \text{dla } \frac{1 + \bar{r}}{1 + r} = 1, \\ \frac{\frac{\check{C}^\pi \cdot (1 + \bar{r})}{1 + r} - \check{C}_{max}^\pi}{\check{C}^\pi - \check{C}_{max}^\pi} & \text{dla } 1 < \frac{1 + \bar{r}}{1 + r} \leq \frac{\check{C}_{max}^\pi}{\check{C}^\pi} \\ 0 & \text{dla } \frac{1 + \bar{r}}{1 + r} > \frac{\check{C}_{max}^\pi}{\check{C}^\pi}, \quad \frac{1 + \bar{r}}{1 + r} < \frac{\check{C}_{min}^\pi}{\check{C}^\pi}. \end{cases} \quad (3.8)$$

Podstawiając zatem funkcję przynależności (3.8) do wzoru (2.25) otrzymujemy że energia stopy zwrotu z portfela π jest wtedy równa

$$d(R^\pi) = \frac{(1 + \bar{r}) \cdot \check{C}^\pi}{\check{C}^\pi - \check{C}_{max}^\pi} \cdot \ln \frac{\check{C}_{max}^\pi}{\check{C}^\pi} + \frac{(1 + \bar{r}) \cdot \check{C}^\pi}{\check{C}^\pi - \check{C}_{min}^\pi} \cdot \ln \frac{\check{C}^\pi}{\check{C}_{min}^\pi}. \quad (3.9)$$

Natomiast zgodnie z (2.29), entropia stopy zwrotu z portfela przyjmuje postać

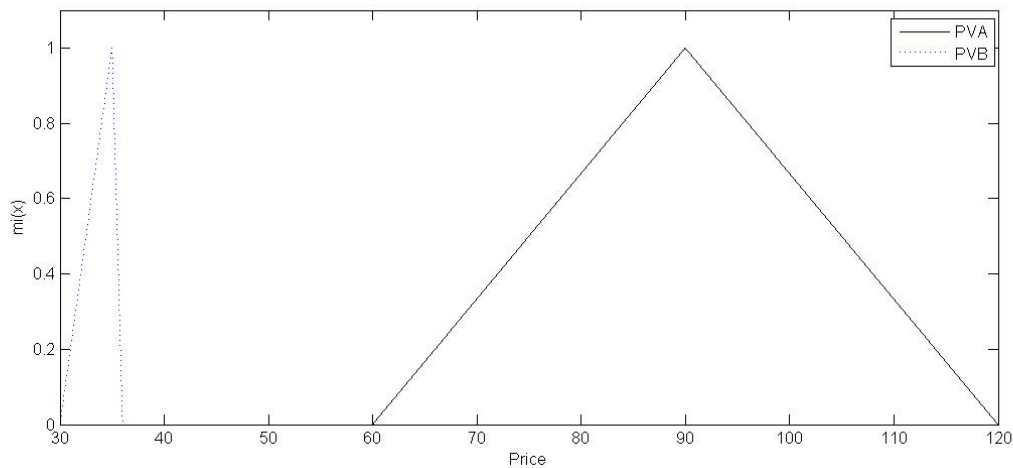
$$\begin{aligned}
e(R^\pi) = & \left[\frac{1}{\check{C}^\pi - \check{C}_{max}^\pi} \cdot \left(\ln \frac{4 \cdot \check{C}^\pi \cdot \check{C}_{max}^\pi}{(\check{C}^\pi + \check{C}_{max}^\pi)^2} + \frac{\check{C}_{max}^\pi}{\check{C}^\pi} - 1 \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{\check{C}^\pi - \check{C}_{min}^\pi} \cdot \left(\ln \frac{(\check{C}^\pi + \check{C}_{min}^\pi)^2}{4 \cdot \check{C}^\pi \cdot \check{C}_{min}^\pi} - \frac{\check{C}_{min}^\pi}{\check{C}^\pi} + 1 \right) \right] \\
& \cdot \left[\check{C}_{max}^\pi - \check{C}_{min}^\pi - \frac{1}{\check{C}^\pi - \check{C}_{max}^\pi} \cdot \left(\ln \frac{4 \cdot \check{C}^\pi \cdot \check{C}_{max}^\pi}{(\check{C}^\pi + \check{C}_{max}^\pi)^2} + \frac{\check{C}_{max}^\pi}{\check{C}^\pi} - 1 \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{\check{C}^\pi - \check{C}_{min}^\pi} \cdot \left(\ln \frac{(\check{C}^\pi + \check{C}_{min}^\pi)^2}{4 \cdot \check{C}^\pi \cdot \check{C}_{min}^\pi} - \frac{\check{C}_{min}^\pi}{\check{C}^\pi} + 1 \right) \right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Miara niepewności stopy zwrotu z portfela jest wariancja liczona wzorem

$$\sigma^2 = p_1^2 \cdot \sigma_1^2 + p_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot cov_{12}. \tag{3.11}$$

Przykład 3.1

Założmy, że dany jest instrument A_1 z wartością bieżącą PV^1 określoną trójkątną liczbą rozmytą $T(60; 90; 120)$ oraz instrument A_2 z wartością bieżącą PV^2 równą $T(30; 35; 36)$. Wykresy funkcji przynależności tych liczb zostały przedstawione na rysunku 3.1.



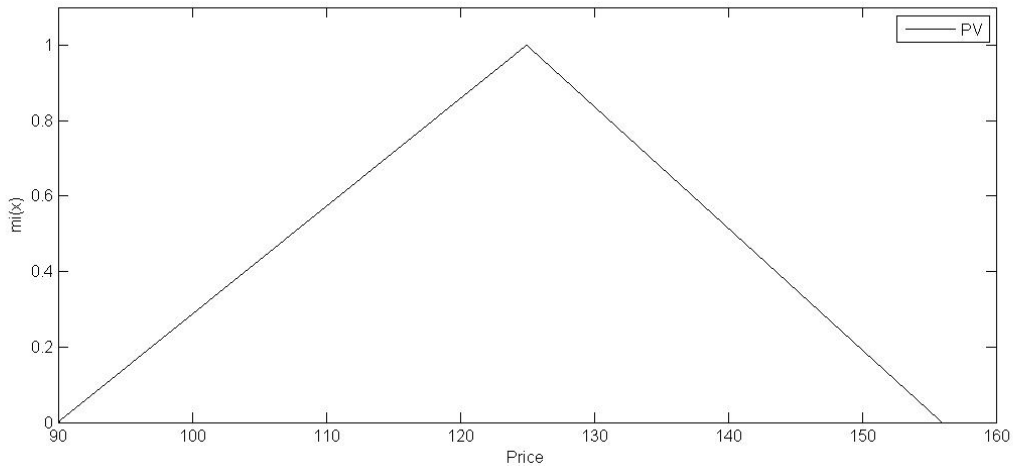
Rys. 3.1 Wykres funkcji przynależności dla proponowanych wartości bieżących instrumentów A_1 oraz A_2

Tworzymy portfel złożony z instrumentów A_1 oraz A_2 . Na podstawie ceny rynkowej instrumentów wyliczamy ich udziały w portfelu

$$p_1 = \frac{\check{C}^1}{\check{C}^\pi} = \frac{90}{125}, \quad p_2 = \frac{\check{C}^2}{\check{C}^\pi} = \frac{35}{125}.$$

Wartość bieżąca portfela złożonego z obu tych instrumentów, przedstawiona na Rysunku 3.2, wynosi

$$PV^\pi = T(60 + 30; 90 + 35; 120 + 36) = T(90; 125; 156).$$

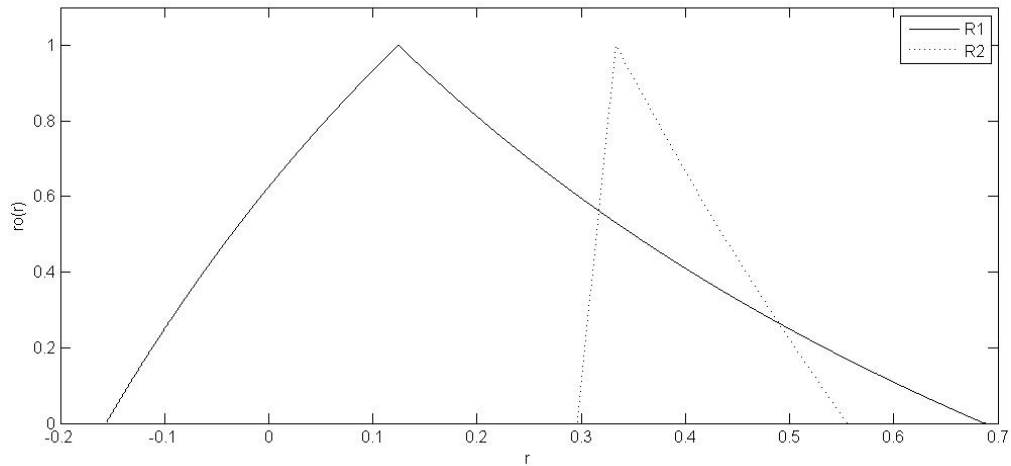


Rys. 3.2 Wykres funkcji przynależności PV portfela złożonego z instrumentów A_1 oraz A_2

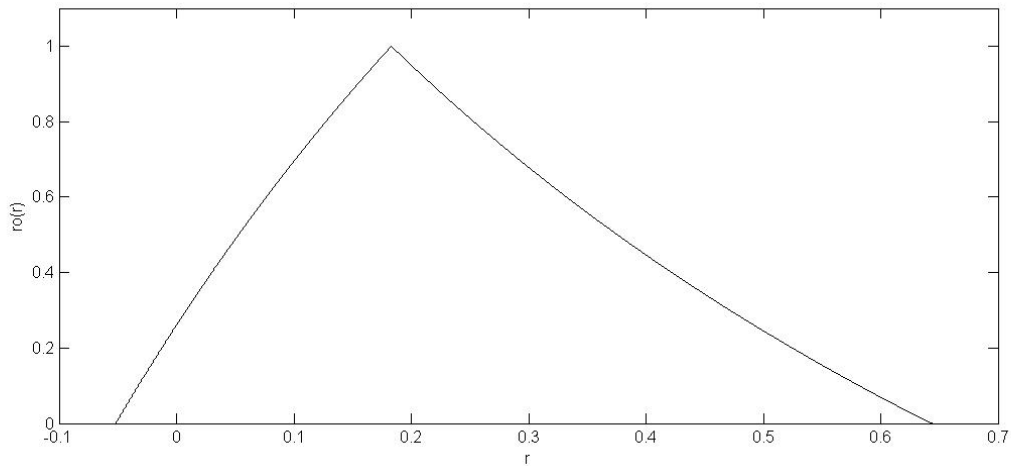
Założmy również, że dana jest dwuwymiarowa zmienna losowa $(\tilde{r}_t^1; \tilde{r}_t^2)$ o rozkładzie łącznym $N\left(\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{3}\right)^T; \Sigma\right)$, gdzie Σ to macierz kowariancji tej zmiennej

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0,090 & -0,003 \\ -0,003 & 0,100 \end{pmatrix}.$$

Dla podanych instrumentów i zbudowanego z nich portfela, korzystając z (2.19) i (3.8) wyznaczamy oczekiwane stopy zwrotu. Są one liczbami rozmytymi R^1, R^2, R^π określonymi przez swoje funkcje przynależności i zostały pokazane na Rysunkach 3.3 oraz 3.4.



Rys. 3.3 Wykres funkcji przynależności dla oczekiwanych zwrotów z instrumentów A_1 oraz A_2



Rys. 3.4 Wykres funkcji przynależności dla zwrotu z portfela

Korzystając z (2.25) wyznaczamy teraz miary energii dla oczekiwanego zwrotu z każdego z instrumentów osobno oraz z portfela.

$$\begin{aligned}
 d(R^1) &= 0,0442, \\
 d(R^2) &= 0,0310, \\
 d(R^\pi) &= 0,0513.
 \end{aligned}
 \tag{3.12}$$

Kolejno, korzystając z (2.29) otrzymujemy miary entropii dla oczekiwanego zwrotu z każdego z instrumentów oraz z portfela

$$\begin{aligned}
 e(R^1) &= 0,0549, \\
 e(R^2) &= 0,0440, \\
 e(R^\pi) &= 0,0628.
 \end{aligned}
 \tag{3.13}$$

Zgodnie ze wzorem (3.11) wariancja dla składników oraz portfela jest równa odpowiednio

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= 0,0900, \\ \sigma_2^2 &= 0,1000, \\ \sigma^2 &= 0,0545.\end{aligned}\tag{3.14}$$

Stąd dla rozważanego przypadku mamy:

$$\begin{aligned}d(R^\pi) &> d(R^1) > d(R^2), \\ e(R^\pi) &> e(R^1) > e(R^2), \\ \sigma_2^2 &> \sigma_1^2 > \sigma^2.\end{aligned}\tag{3.15}$$

□

W omawianym przykładzie liczbowym miary energii i entropii oczekiwanej stopy zwrotu z portfela są większe niż analogiczne miary wyznaczone dla poszczególnych składników portfela. Oznacza to, że dywersyfikacja portfela może zwiększyć ryzyko wieloznaczności i nieostrości mierzone energią i entropią oczekiwanej stopy zwrotu, jak również może zmniejszyć ryzyko niepewności mierzone wariancją.

3.2 Czynniki dyskontujący portfela dwuskładnikowego

Rozważmy ponownie portfel dwuskładnikowy π złożony z instrumentów finansowych A_1 oraz A_2 . Wartość bieżąca instrumentu A_i jest dana jako trójkątna liczba rozmyta $PV^i = T(\check{C}^i_{min}; \check{C}^i; \check{C}^i_{max}), i = 1, 2$ z funkcją przynależności (2.1). Zestawiając razem (2.19) i (2.34) otrzymujemy dla każdego instrumentu czynnik dyskontujący D wyznaczony na podstawie rozmytej oczekiwanej stopy zwrotu R , z funkcją przynależności η_{D_i} wyrażoną wzorem

$$\eta_{D_i}(v) = \begin{cases} \frac{\check{C}^i \cdot v - \bar{v}^i \cdot \check{C}^i_{min}}{\check{C}^i \cdot \bar{v}^i - \bar{v}^i \cdot \check{C}^i_{min}} & \text{dla } \bar{v}^i \cdot \frac{\check{C}^i_{min}}{\check{C}^i} \leq v < \bar{v}^i, \\ 1 & \text{dla } v = \bar{v}^i, \\ \frac{\check{C}^i \cdot v - \bar{v}^i \cdot \check{C}^i_{max}}{\check{C}^i \cdot \bar{v}^i - \bar{v}^i \cdot \check{C}^i_{max}} & \text{dla } \bar{v}^i < v \leq \bar{v}^i \cdot \frac{\check{C}^i_{max}}{\check{C}^i}, \\ 0 & \text{dla } \bar{v}^i \cdot \frac{\check{C}^i_{max}}{\check{C}^i} < v, v < \bar{v}^i \cdot \frac{\check{C}^i_{min}}{\check{C}^i}. \end{cases}\tag{3.16}$$

gdzie \bar{v}^i jest czynnikiem dyskontującym wyznaczonym za pomocą oczekiwanej stopy zwrotu $\bar{r}^i, i = 1, 2$. Tak wyznaczony oczekiwany czynnik dyskonta jest dla każdego z instrumentów rozmytą liczbą trójkątną $D_1 = T\left(\bar{v}^i \cdot \frac{\check{c}_{min}^i}{\check{c}^i}; \bar{v}^i; \bar{v}^i \cdot \frac{\check{c}_{max}^i}{\check{c}^i}\right)$.

W [Piasecki, Siwek 2017] pokazano, że czynnik dyskontowy \bar{v} wyznaczony przez oczekiwaną prostą stopę zwrotu \bar{r} spełnia warunek

$$\frac{1}{\bar{v}} = \frac{p_1}{\bar{v}_1} + \frac{p_2}{\bar{v}_2}. \quad (3.17)$$

Dodatkowo pokazano też, że

$$D^\pi = \left(\frac{p_1}{\bar{v}_1} + \frac{p_2}{\bar{v}_2}\right)^{-1} \odot \left(\frac{p_1}{\bar{v}_1} \odot D^1 + \frac{p_2}{\bar{v}_2} \odot D^2\right), \quad (3.18)$$

to znaczy, że oczekiwany czynnik dyskontujący z portfela jest kombinacją liniową czynników dyskontujących swoich instrumentów składowych. Marę energii $d(D^\pi) \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ możemy określić w sposób następujący

$$d(D^\pi) = \left(\frac{p_1}{\bar{v}_1} + \frac{p_2}{\bar{v}_2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{p_1}{\bar{v}_1} \cdot d(D^1) + \frac{p_2}{\bar{v}_2} \cdot d(D^2)\right). \quad (3.19)$$

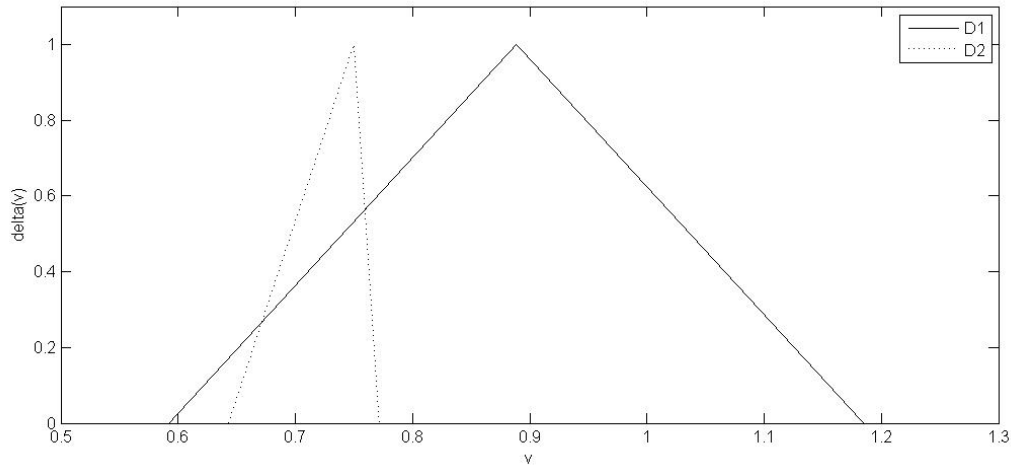
Z tego powodu miara energii oczekiwanego czynnika dyskontującego portfela π jest kombinacją liniową tej miary obliczonej dla składników A_i portfela. Wagi przypisane poszczególnym składnikom są wprost proporcjonalne do ich udziału p_i w portfelu i odwrotnie proporcjonalne do ich oczekiwanego czynnika dyskontującego \bar{v}_i . Oznacza to, że dążąc do minimalizacji ryzyka wieloznaczności portfela powinniśmy przede wszystkim minimalizować ryzyko wieloznaczności tych jego składników, które charakteryzują się najwyższymi oczekiwanymi stopami zwrotu. Wynika to z faktu, że zgodnie z zasadami analizy portfelowej, wartości udziałów p_i są określane *post factum*, po zebraniu wszystkich dostępnych informacji na temat składników portfela.

Korzystając z (2.46), miara entropii oczekiwanego czynnika dyskontującego portfela π jest równa tej mierze obliczonej dla każdego ze składników A_i portfela, tzn. $1/3$.

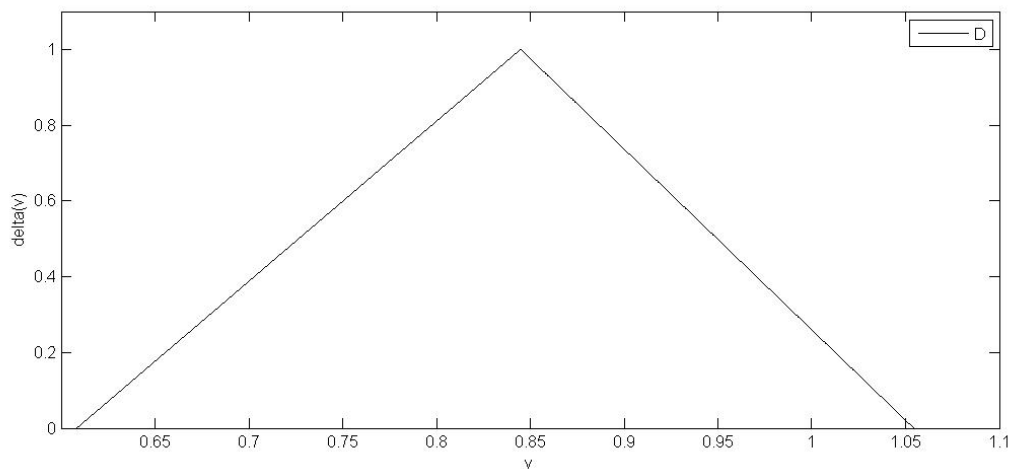
Przykład 3.2

Założmy, podobnie jak w przykładzie 3.1, że dany jest instrument A_1 z wartością bieżącą określoną trójkątną liczbą rozmytą $T(60; 90; 120)$ oraz instrument A_2 z wartością bieżącą

równą $T(30; 35; 36)$. Dla instrumentów i zbudowanego portfela, korzystając z (3.16) oraz (3.17), wyznaczamy oczekiwane czynniki dyskontujące. Zbiory rozmyte odpowiadające oczekiwany stopom zwrotu z poszczególnych instrumentów oraz oczekiwany czynnikom dyskontującym przedstawione zostały na rysunkach 3.5 oraz 3.6.



Rys. 3.5 Wykresy funkcji przynależności dla oczekiwanych czynników dyskontujących instrumentów



Rys. 3.6 Wykresy funkcji przynależności dla oczekiwanego czynnika dyskontującego z portfela

Korzystając z (2.42) wyznaczamy miary energii dla oczekiwanego czynnika dyskontującego każdego z instrumentów osobno oraz portfela

$$\begin{aligned} d(D^1) &= 0,2963, \\ d(D^2) &= 0,0643, \\ d(D^\pi) &= 0,2231. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Miary entropii dla oczekiwanego czynnika dyskontującego każdego z instrumentów oraz dla portfela są stałe i wynoszą $1/3$. Mamy zatem, że dla przypadku czynnika dyskontującego

$$\begin{aligned}
d(D^1) &> d(D) > d(D^2), \\
e(D^1) &= e(D^\pi) = e(D^2), \\
\sigma_2^2 &> \sigma_1^2 > \sigma^2.
\end{aligned}
\tag{3.21}$$

W przytoczonym przykładzie miara energii dla portfela jest wartością pośrednią pomiędzy miarami energii dla instrumentów a entropia jest wielkością stałą.

□

Z zależności (3.19) wynika, że przy tworzeniu portfela uśrednia się ryzyko wieloznaczności mierzone energią czynnika dyskontującego. Z drugiej strony, zależność (2.46) sugeruje, że ryzyko nieostrości nie ulega w tym przypadku zmianie. Wskazuje to na fakt, że zarządzanie portfelem za pomocą czynnika dyskontowego może spowodować zmniejszenie ryzyka nieprecyzyjności.

3.3 Składanie portfela dwuskładnikowego

W [Fang Yong i inni, 2008], [Huang, 2007 a, b], [Haifeng i inni, 2012] zaproponowano stworzenia portfeli instrumentów finansowych umożliwiające modelowanie ryzyka nieprecyzyjności obarczającej zwrot z portfela. Wprowadzenie nieprecyzyjności w rozważanych portfelach miało na celu zastąpienie narzędzi probabilistycznych w modelowaniu niepewności. Składanie tego typu portfeli skłania do próby rozwiązania zadania minimalizacji ryzyka i maksymalizacji zysku, uwzględniających wartości rozmyte. Pełne kompendium wiedzy na ten temat znajduje się w [Fang, Lai, Wang, 2008], gdzie prócz rozmytych zadań minimalizacji ryzyka znajdują się również rozważania na temat teorii możliwości i rozmytej teorii decyzji.

Rozmyte zadania portfelowe cieszyły się dużą popularnością szczególnie w pierwszej dekadzie XXI wieku. W większości opierają się one na założeniu o rozmytych zwrotach z instrumentów składowych portfela, które to założenie jest następnie wykorzystywane w klasycznym zadaniu maksymalizacji zysku Markowitza [Tsauro, 2012], [Guo i inni, 2012], [Gupta, Mehlawat, Saxena, 2007]. Kolejnym podejściem formułowania zadań portfelowych jest teoria możliwości, stosowana m. in. w [Huang, 2007], [Wang, Zhu, 2002] i [Wu, Liu, 2012]. W pracach tych zakłada się, że zwroty z instrumentów modelowane są jako rozmyte zmienne losowe.

W świetle przytoczonych teorii spróbujemy teraz zbudować zadanie portfelowe, gdzie przy ustalonym poziomie ryzyka nieprecyzyjności obarczającej czynniki dyskontujące składników portfela, dążyć będziemy do minimalizacji jego oczekiwanego czynnika

dyskontującego. Zakładamy doskonałą podzielność instrumentu finansowego oraz brak możliwości krótkiej sprzedaży. Każdy instrument finansowy A_i reprezentowany jest poprzez czynnik dyskontujący $D_i, i = 1, 2$.

Rozmyty oczekiwany czynnik dyskontujący instrumentu modelowany jest za pomocą trójkątnej liczby rozmytej $D_i = T(v_{min}; \bar{v}; v_{max})$ z funkcją przynależności $\eta_{D_i} \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$

$$\eta_{D_i}(x) = \begin{cases} \frac{x - v_{min}}{\bar{v} - v_{min}} & \text{dla } v_{min} \leq x < \bar{v}, \\ 1 & \text{dla } x = \bar{v}, \\ \frac{x - v_{max}}{\bar{v} - v_{max}} & \text{dla } \bar{v} < x \leq v_{max}, \\ 0 & \text{dla } v_{min} < x < v_{max}, \end{cases} \quad (3.22)$$

gdzie

- \bar{v} jest oczekiwanym czynnikiem dyskontującym obliczonym na podstawie oczekiwanej prostej stopy zwrotu z instrumentu,
- $v_{min} \in]0; \bar{v}]$ jest maksymalnym dolnym oszacowaniem czynnika dyskontowego,
- $v_{max} \in [\bar{v}; +\infty[$ jest minimalnym górnym oszacowaniem czynnika dyskontowego.

Znana jest oczekiwana stopa zwrotu z instrumentów A_i oraz macierz kowariancji Σ . Poszukujemy takich udziałów p_i poszczególnych instrumentów w portfelu, aby oczekiwany rozmyty czynnik dyskontujący wyliczony na podstawie (3.18) był jak najmniejszy.

Powyższe rozważania prowadzą do konkluzji, że rozwiązanie zadania minimalizacji czynnika dyskontującego sprowadza się do problemu

$$\left(\frac{p_1}{\bar{v}_1} + \frac{p_2}{\bar{v}_2} \right)^{-1} \odot \left(\frac{p_1}{\bar{v}_1} \odot D^1 + \frac{p_2}{\bar{v}_2} \odot D^2 \right) \rightarrow \min$$

$$\left(\frac{p_1}{\bar{v}_1} + \frac{p_2}{\bar{v}_2} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{p_1}{\bar{v}_1} \cdot d(D^1) + \frac{p_2}{\bar{v}_2} \cdot d(D^2) \right) \leq d_1$$

$$p_1^2 \cdot \sigma_1^2 + p_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot cov_{12} \leq d_2$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$p_1, p_2 \geq 0,$$

gdzie:

$p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+$ – udziały instrumentów w portfelu,

$D_1, D_2 \in \mathbb{R}$ – oczekiwane rozmyte czynniki dyskontujące z instrumentów portfela,

\bar{v}_1, \bar{v}_2 – oczekiwane czynniki dyskontujące,

d_1 – zadany maksymalny poziom miary ryzyka wieloznaczności,

d_2 – zadany maksymalny poziom miary ryzyka niepewności.

Ze względu na fakt, że dla czynnika dyskontującego z instrumentu o wartości bieżącej modelowanej trójkątną liczbą rozmytą entropia jest wartością stałą, niecelowym jest ujmowanie jest w zadaniu minimalizacji ryzyka. Z tego powodu koniecznym może być uogólnienie rozważanej postaci wartości bieżącej na przypadek trapezoidalnej liczby rozmytej.

3.4 Studium przypadku

Przykład 3.3

Przejdźmy teraz do przykładu wykorzystującego dane rzeczywiste. Rozpatrzmy akcje spółek BZWBK i ENEA z okresu pomiędzy 26.10.2015 a 25.11.2016. Instrumentom tym przypisujemy kolejno oznaczenia $A_i, i = 1, 2$. Na podstawie danych historycznych oraz subiektywnej oceny inwestora, nieprecyzyjna wartość bieżąca każdego z tych instrumentów, wyznaczona na dzień 25.11.2016 wynosi

$$T(\check{C}_{min}^1; \check{C}^1; \check{C}_{max}^1) = T(310; 313; 315),$$

$$T(\check{C}_{min}^2; \check{C}^2; \check{C}_{max}^2) = T(10,1; 10,25; 10,5).$$

Na podstawie danych historycznych wyznaczamy dwuwymiarową zmienną losową $(\tilde{r}_t^1; \tilde{r}_t^2)$ o rozkładzie łącznym $N((-0,0046; -0,0031)^T; \Sigma)$, z macierzą kowariancji

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0,0003 & 0,00003 \\ 0,00003 & 0,0006 \end{pmatrix}.$$

Dla podanych instrumentów, korzystając z (3.16) wyznaczamy oczekiwane czynniki dyskontujące.

$$D_1 = T\left(\frac{1}{1 - 0,0046} \cdot \frac{310}{313}; \frac{1}{1 - 0,0046}; \frac{1}{1 - 0,0046} \cdot \frac{315}{313}\right) = T(0,995; 1,005; 1,001),$$

$$D_2 = T\left(\frac{1}{1 - 0,0031} \cdot \frac{10,1}{10,25}; \frac{1}{1 - 0,0031}; \frac{1}{1 - 0,0031} \cdot \frac{10,5}{10,25}\right) = T(0,988; 1,003; 1,013).$$

Korzystając z (2.42) wyznaczamy ich miary energii:

$$d(D^1) = \frac{1,005}{2 \cdot 313} \cdot (315 - 310) = 0,0080,$$

$$d(D^2) = \frac{1,003}{2 \cdot 10,25} \cdot (10,5 - 10,1) = 0,0196.$$

Niech udział instrument A_i w portfelu π będzie równy p_i . Wtedy czynnik dyskontujący portfela $D^\pi \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, zgodnie z (3.18), może zostać obliczony jako

$$\begin{aligned} D^\pi &= \left(\frac{p_1}{1,005} + \frac{p_2}{1,003} \right)^{-1} \\ &\odot \left(\left(\frac{p_1}{1,005} \odot T(0,995; 1,005; 1,001) \right) \oplus \left(\frac{p_2}{1,003} \odot T(0,988; 1,003; 1,013) \right) \right) \\ &= \frac{1,003 \cdot p_1 \odot T(0,995; 1,005; 1,001) \oplus 1,005 \cdot p_2 \odot T(0,988; 1,003; 1,013)}{1,003 \cdot p_1 + 1,005 \cdot p_2} \\ &= \frac{p_1 \odot T(0,998; 1,008; 1,004) \oplus p_2 \odot T(0,993; 1,008; 1,018)}{1,003 \cdot p_1 + 1,005 \cdot p_2}. \end{aligned}$$

Jego miara energii, zgodnie z (3.19), przyjmuje postać

$$\begin{aligned} d(D^\pi) &= \left(\frac{p_1}{1,005} + \frac{p_2}{1,003} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{p_1}{1,005} \cdot 0,0080 + \frac{p_2}{1,003} \cdot 0,0196 \right) \\ &= \frac{0,0080 \cdot p_1 \cdot 1,003 + 0,0196 \cdot p_2 \cdot 1,005}{1,003 \cdot p_1 + 1,005 \cdot p_2} = \frac{0,008 \cdot p_1 + 0,0197 \cdot p_2}{1,003 \cdot p_1 + 1,005 \cdot p_2}. \end{aligned}$$

Zgodnie ze wzorem (3.11) wariancja dla składników oraz portfela jest równa

$$\sigma^2 = p_1^2 \cdot 0,00030 + p_2^2 \cdot 0,00060 + 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot 0,00003$$

Stwórzmy teraz zadanie minimalizacji czynnika dyskontującego portfela

$$\frac{p_1 \odot T(0,998; 1,008; 1,004) \oplus p_2 \odot T(0,993; 1,008; 1,018)}{1,003 \cdot p_1 + 1,005 \cdot p_2} \rightarrow \min$$

$$\frac{0,008 \cdot p_1 + 0,0197 \cdot p_2}{1,003 \cdot p_1 + 1,005 \cdot p_2} \leq d_1$$

$$p_1^2 \cdot 0,0003 + p_2^2 \cdot 0,0006 + 2 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot 0,00003 \leq d_2$$

$$p_1 + p_2 = 1$$

$$p_1, p_2 \geq 0,$$

gdzie:

$p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+$ – szukane udziały instrumentów w portfelu,

$D_1, D_2 \in \mathbb{R}$ – oczekiwane rozmyte czynniki dyskontujące z instrumentów portfela,

d_1 – zadany maksymalny poziom miary ryzyka wieloznaczności,

d_2 – zadany maksymalny poziom miary ryzyka niepewności.

Rozwiązanie powyższego zadania pozwoliłoby znaleźć takie udziały instrumentów w portfelu, które zapewniłyby minimalną wielość czynnika dyskontującego z portfela przy ustalonym poziomie ryzyka niepewności i nieprecyzyjności.

□

3.5 Podsumowanie

Z przeprowadzonych obliczeń wynika, że ryzyko obarczające portfel nie może być traktowane jako zjawisko jednorodne. Przedstawiony przykład numeryczny potwierdza, że dywersyfikacja portfela pozwala na zmniejszenie ryzyka niepewności. Otwartym problemem pozostaje zmniejszenie ryzyka niemożności wskazania jednoznacznej rekomendacji pomiędzy alternatywami. Istotnym problemem jest tutaj wysoce skomplikowana postać analityczna zależności (2.25) i (2.29), określających miary energii i entropii oczekiwanej stopy zwrotu. Podstawową przyczyną tych trudności jest fakt, że oczekiwana stopa zwrotu nie jest trójkątną liczbą rozmytą. Z drugiej strony można dostrzec, że oczekiwany czynnik dyskontujący posiada już tę własność. Stąd, konsekwentne zastąpienie oczekiwanej stopy zwrotu poprzez oczekiwany czynnik dyskontujący pozwala na ujawnienie prostych relacji pomiędzy miarą energii i entropii a budową portfela.

Przeprowadzone badania wskazują na fakt, że istnieją efektywne metody portfelowego zarządzania ryzykiem nieprecyzyjności mającym swoją przyczynę w przybliżonym oszacowaniu *PV* poszczególnych składników portfela przy pomocy trójkątnej liczby rozmytej. W Przykładzie 3.1 pokazano, że stopy zwrotu wyznaczone dla portfela oraz instrumentów z wartościami bieżącymi danymi trójkątnymi liczbami rozmytymi, nie są trójkątnymi liczbami rozmytymi, przez co trudno policzyć dla nich miary energii i entropii.

Przykład 3.2. pokazuje, że sytuacja znacznie upraszcza się, jeżeli zamiast stóp zwrotu rozważane są oczekiwane czynniki dyskontujące. W tym przypadku czynnik dyskontujący dla portfela jest kombinacją liniową czynników dyskontujących składników, entropia jest natomiast wielkością stałą. Tym samym, dla przypadku czynnika dyskontującego wykazano, że dywersyfikacja portfelowa:

- zgodnie z teorią portfelową, może zmniejszyć ryzyko niepewności,
- na podstawie wzoru (3.18), uśrednia ryzyko wieloznaczności,
- z uwagi na postać czynnika dyskontującego i ze wzoru (2.46), nie ma wpływu na ryzyko nieostrości.

Z powyższych rozważań wynika, że możliwe jest utworzenie zadania portfelowego, mającego na celu minimalizację czynnika dyskontującego z portfela, przy zadanym poziomie ryzyka niepewności i nieprecyzyjności. Ze względu na fakt, że miara energii dla czynnika dyskontującego rozważanego w tym rozdziale i będącego trójkątną liczbą rozmytą jest stała, nie uwzględnia się jej w zadaniu minimalizacji czynnika dyskontującego. W Przykładzie 3.3 przedstawiono przykład sformułowania takiego zadania.

Wykonana analiza sugeruje, że w celu zbadania własności portfela obciążonego nieprecyzyjnością wyznaczenia wartości bieżących jego składników, właściwym narzędziem jest rozmyta stopa zwrotu z tego portfela, natomiast jeżeli celem obliczeń jest ustalenie jego struktury, o wiele wygodniejszym narzędziem jest oczekiwany rozmyty czynnik dyskontujący.

4. Portfel wieloskładnikowy z wartością bieżącą daną trójkątną liczbą rozmytą

W tym rozdziale omówiony zostanie przypadek portfela wieloskładnikowego, złożonego z instrumentów o wartości bieżącej danej trójkątną oraz trójkątną dyskretną liczbą rozmytą. Podrozdziały zawierają opis modelu, w tym charakterystykę stopy zwrotu i czynnika dyskontującego z portfela, jak również przykłady zastosowania, zależności pomiędzy miarami ryzyka oraz zadanie maksymalizacji zysku i minimalizacji ryzyka.

4.1. Przypadek wartości bieżącej danej trójkątną liczbą rozmytą

4.1.1. Stopa zwrotu z portfela wieloskładnikowego

Rozważmy przypadek portfela wieloskładnikowego π , złożonego z instrumentów finansowych A_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Wartość bieżąca instrumentu A_i jest modelowana trójkątną liczbą rozmytą $T(\check{C}_{min}^i; \check{C}^i; \check{C}_{max}^i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Wartość bieżąca tak określonego portfela jest również trójkątną liczbą rozmytą o parametrach

$$PV^\pi = T\left(\left(\sum_{i=1}^n \check{C}_{min}^i; \sum_{i=1}^n \check{C}^i; \sum_{i=1}^n \check{C}_{max}^i\right)\right) = T(\check{C}_{min}; \check{C}; \check{C}_{max}). \quad (4.1)$$

Wartość przyszła instrumentu A_i jest zmienną losową \tilde{V}_t^i . Za Markowiczem zakładamy, że n -wymiarowa zmienna losowa odpowiadająca prostej stopie zwrotu z każdego z instrumentów $(\tilde{r}_t^1; \tilde{r}_t^2; \dots; \tilde{r}_t^n)$ ma n -wymiarowy rozkład normalny $N((\bar{r}_1; \bar{r}_2; \dots; \bar{r}_n)^T; \mathbf{\Sigma})$, gdzie macierz kowariancji przyjmuje postać

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \dots & cov_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cov_{n1} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Każdemu instrumentowi A_i przypisujemy wtedy jego wartość przyszłą

$$\tilde{V}_t^i(\omega) = \check{C}^i \cdot (1 + \tilde{r}_t^i(\omega)). \quad (4.3)$$

Udział p_i instrumentu A_i w portfelu π jest określony przez zależność

$$p_i = \frac{\check{C}^i}{\check{C}}. \quad (4.4)$$

gdzie $\check{C} = \sum_{i=1}^n \check{C}^i$. *FV* portfela π wynosi wtedy

$$\tilde{V}_t(\omega) = \sum_{i=1}^n \tilde{V}_t^i(\omega) = \sum_{i=1}^n \check{C}^i \cdot (1 + \tilde{r}_t^i(\omega)) = \check{C} \cdot (1 + \tilde{r}_t(\omega)), \quad (4.5)$$

gdzie

$$\tilde{r}_t^i(\omega) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \tilde{r}_t^i(\omega) \quad (4.6)$$

jest stopą zwrotu z portfela π . Oczekiwana stopa zwrotu z portfela jest wtedy równa

$$\bar{r} = \sum_{i=1}^n p_i \cdot \bar{r}_i. \quad (4.7)$$

Funkcja przynależności stopy zwrotu z portfela ma postać (3.8). Wariancja stopy zwrotu z portfela wynosi

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n p_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n p_i \cdot p_j \cdot cov_{i,j}. \quad (4.8)$$

Przykład 4.1

Załóżmy, że danych jest 5 instrumentów $A_i, i = 1, \dots, 5$ z wartościami bieżącymi określonymi trójkątnymi liczbami rozmytymi

$$T(\check{C}_{min}^1; \check{C}^1; \check{C}_{max}^1) = T(69,48; 73,56; 82,34),$$

$$T(\check{C}_{min}^2; \check{C}^2; \check{C}_{max}^2) = T(3,44; 18,87; 43,87),$$

$$T(\check{C}_{min}^3; \check{C}^3; \check{C}_{max}^3) = T(18,69; 48,48; 79,52),$$

$$T(\check{C}_{min}^4; \check{C}^4; \check{C}_{max}^4) = T(64,63; 69,39; 70,94),$$

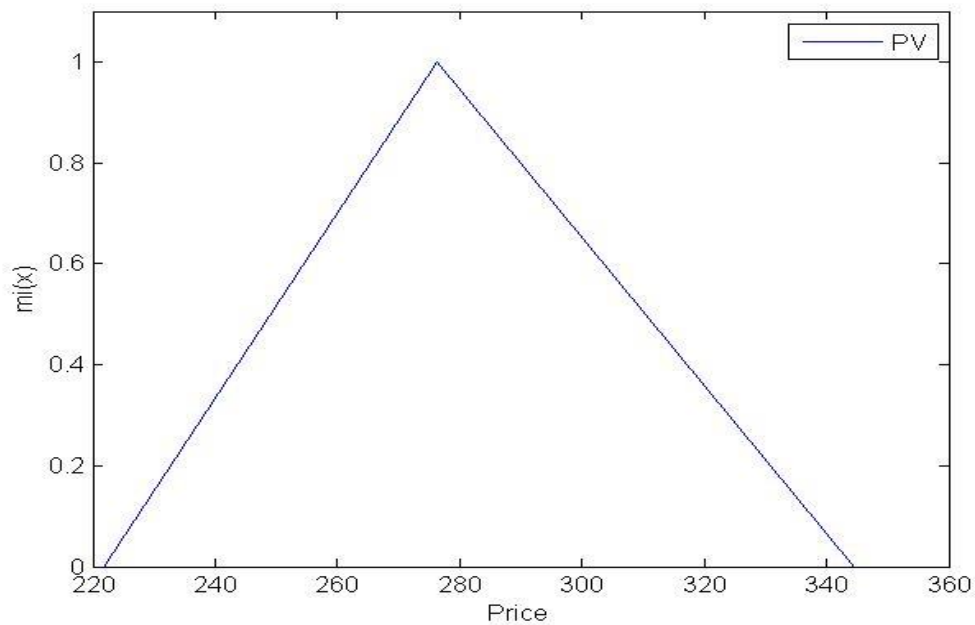
$$T(\check{C}_{min}^5; \check{C}^5; \check{C}_{max}^5) = T(65,51; 65,90; 67,97).$$

Tworzymy portfel złożony z instrumentów A_i o udziałach $p_i, i = 1, 2, \dots, 5$, które wyznaczamy na podstawie ceny rynkowej instrumentów, tzn.

$$\begin{aligned}
p_1 &= 0,2663, \\
p_2 &= 0,0683, \\
p_3 &= 0,1755, \\
p_4 &= 0,2512, \\
p_5 &= 0,2386.
\end{aligned}$$

Stąd wartość bieżąca portfela złożonego z tych instrumentów, przedstawiona na Rysunku 4.1 wynosi

$$PV = T \left(\sum_{i=1}^n \check{C}_{min}^i; \sum_{i=1}^n \check{C}^i; \sum_{i=1}^n \check{C}_{max}^i \right) = T(221,75; 276,2; 344,64).$$



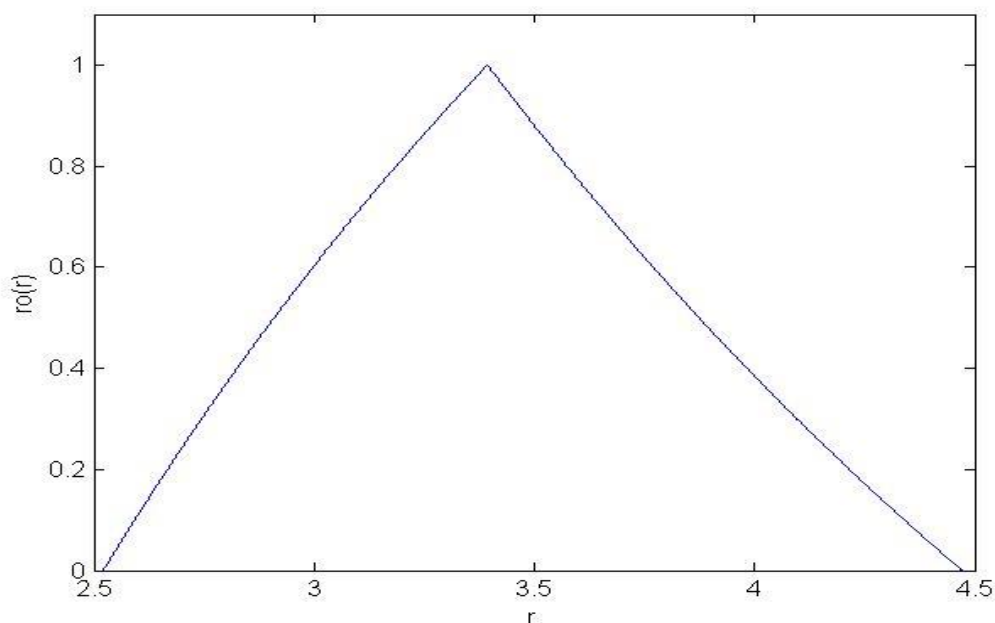
Rys. 4.1 Wykres funkcji przynależności PV portfela złożonego z instrumentów A_i

Założmy dodatkowo, że dana jest 5-wymiarowa zmienna losowa $(\tilde{r}_t^1; \tilde{r}_t^2; \dots; \tilde{r}_t^5)$ o rozkładzie łącznym $N((0,8147; 0,9058; 0,1270; 0,9134; 0,6324)^T; \Sigma)$. Macierz kowariancji tej zmiennej ma postać

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0,4711 & -0,2000 & -0,0250 & -0,1800 & -0,1300 \\ -0,2000 & 0,0596 & -0,0500 & -0,2158 & -0,4600 \\ -0,0250 & -0,0500 & 0,6820 & 0,4334 & -0,6000 \\ -0,1800 & -0,2158 & 0,4334 & 0,0424 & 0,4500 \\ -0,1300 & -0,4600 & -0,6000 & 0,4500 & 0,0724 \end{pmatrix}.$$

Z (4.8) wariancja oczekiwanej stopy zwrotu z portfela przyjmuje wartość $\sigma^2 = 0,0107$.

Dla podanych instrumentów i zbudowanego z nich portfela możemy teraz wyznaczyć oczekiwane stopy zwrotu. Są one liczbami rozmytymi określonymi przez swoje funkcje przynależności. Funkcja przynależności do oczekiwanej rozmytej stopy zwrotu z portfela została przedstawiona na Rysunku 4.2.



Rys. 4.2 Wykres funkcji przynależności dla oczekiwanego zwrotu z portfela

Z wykresów funkcji przynależności łatwo można odczytać, że oczekiwane stopy zwrotu tak z poszczególnych składników jak i z całego portfela nie są trójkątnymi liczbami rozmytymi. Z tego powodu warto zamiast nich rozważyć oczekiwane czynniki dyskontujące.

Miary energii, entropii i wariancji dla wyznaczonych oczekiwanych rozmytych stóp zwrotu z instrumentów oraz portfela zostały przedstawione w Tabeli 4.1.

Tabela 4.1 Miary energii, entropii i wariancji dla stóp zwrotu z portfela π oraz jego składników

Instrument	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	π
Energia	0,1527	2,7535	0,8771	0,0898	0,0300	0,3706
Entropia	0,000044	0,00122	0,00015	0,000054	0,000056	0,000003
Wariancja	0,4711	0,0596	0,6820	0,0424	0,0724	0,0107

Otrzymano następujące zależności:

$$d(R_5) < d(R_4) < d(R_1) < d(R^\pi) < d(R_3) < d(R_2),$$

$$e(R^\pi) < e(R_4) < e(R_5) < e(R_1) < e(R_3) < e(R_2),$$

$$\sigma^2 < \sigma_4^2 < \sigma_2^2 < \sigma_5^2 < \sigma_1^2 < \sigma_3^2.$$

Miara energii oczekiwanej stopy zwrotu z portfela jest wartością pośrednią w stosunku do składników portfela. Miary entropii i wariancji są najmniejsze w przypadku portfela.

□

4.1.2. Czynniki dyskontujący portfela wieloskładnikowego

Funkcja $\eta_i \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$, określona dla instrumentu $A_i, i = 1, 2, \dots, n$ o wartości bieżącej danej trójkątną liczbą rozmytą $T(\check{C}_{min}^i; \check{C}^i; \check{C}_{max}^i)$, opisana wzorem (3.16) jest funkcją przynależności czynnika dyskonta $D_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, wyznaczonego za pomocą oczekiwanej stopy zwrotu $R_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Dla czynnika dyskontującego z instrumentu miary energii i entropii dane są wzorami (2.42) i (2.46).

Portfelowi π przypisujemy oczekiwany czynnik dyskontowy $D^\pi \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ określony za pomocą zależności (2.34). Łatwo sprawdzić, że oczekiwany czynnik dyskontujący \bar{v} wyznaczony przez oczekiwaną stopę zwrotu \bar{r} spełnia warunek

$$\frac{1}{\bar{v}} = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\bar{v}_i}. \quad (4.9)$$

Stąd czynnik dyskontujący portfela przyjmuje ostatecznie postać

$$D^\pi = \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\bar{v}_i} \right)^{-1} \odot \left(\bigoplus_{i=1}^n \frac{p_i}{\bar{v}_i} \odot D_i \right) \quad (4.10)$$

Dzięki temu miarę energii $D^\pi \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ możemy określić w sposób następujący

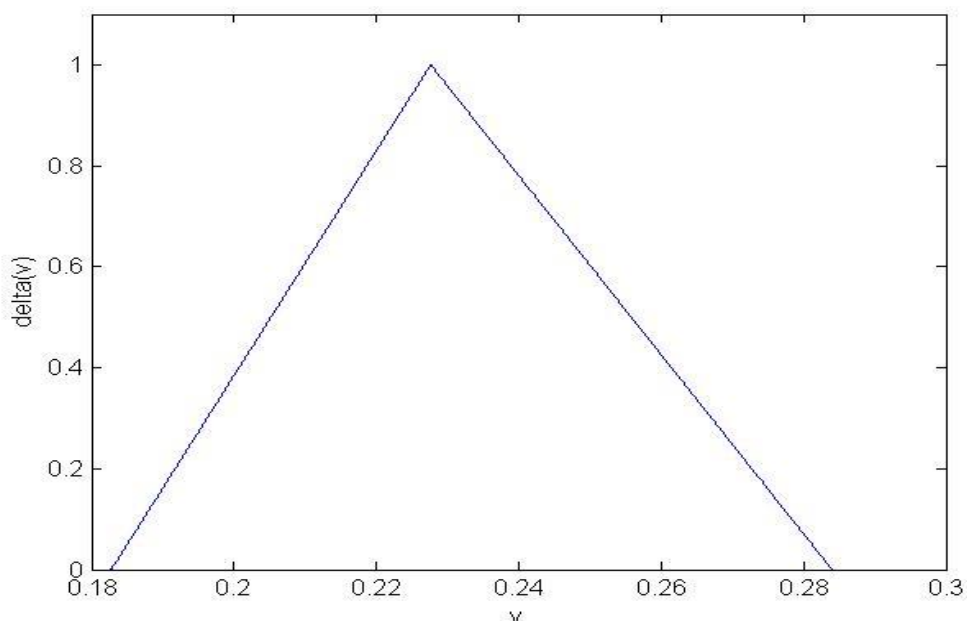
$$d(D^\pi) = \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\bar{v}_i} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\bar{v}_i} \cdot d(D_i) \right). \quad (4.11)$$

Zatem miara energii oczekiwanego czynnika dyskontującego portfela π jest średnią ważoną miar energii obliczonych dla składników A_i tego portfela. Wagi przypisane poszczególnym składnikom są wprost proporcjonalne do ich udziału p_i w portfelu i odwrotnie proporcjonalne do ich czynnika dyskontującego \bar{v}_i .

Ponieważ dla każdego ze składników portfela miara entropii jest stała i równa $1/3$, zatem ze wzoru (2.46), miara entropii dla portfela również wynosi $1/3$.

Przykład 4.2

Dla instrumentów opisanych w Przykładzie 4.1 i zbudowanego z nich portfela możemy, korzystając z (2.35) i (4.10), wyznaczyć oczekiwane czynniki dyskontujące. Zbiór rozmyty odpowiadający oczekiwanemu czynnikowi dyskontującemu został przedstawiony na Rysunku 4.3.



Rys. 4.3 Wykres funkcji przynależności dla oczekiwanego czynnika dyskontującego z portfela

Miary energii, entropii i wariancji dla wyznaczonych oczekiwanych rozmytych czynników dyskontujących z instrumentów oraz portfela zostały przedstawione w Tabeli 4.2.

Tabela 4.2 Miary energii, entropii dla czynników dyskontujących z portfela π oraz jego składników

Instrument	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	π
Energia	0,0128	0,0384	0,0977	0,0060	0,0027	0,0205
Entropia	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3

Tym samym, dla przypadku czynnika dyskontującego mamy

$$d(D_5) < d(D_4) < d(D_1) < d(D^\pi) < d(D_2) < d(D_3), \quad (4.12)$$

$$e(D^\pi) = e(D_i) = \frac{1}{3}.$$

Miara energii dla portfela jest wartością pośrednią pomiędzy miarami energii dla poszczególnych instrumentów, co sugeruje już sama postać wzoru (4.11). Miara entropii

oczekiwanego czynnika dyskonta portfela π i jego składników A_i jest stała i równa $1/3$. Wariancja jest najmniejsza w przypadku zbudowanego portfela. \square

4.1.3. Składanie portfela wieloskładnikowego

Rozważmy zadanie portfelowe, gdzie przy ustalonym poziomie ryzyka nieprecyzyjności obarczającej czynniki dyskontujące składników A_i , minimalizujemy oczekiwany czynnik dyskontujący portfela. Zakładamy doskonałą podzielność instrumentu finansowego oraz brak możliwości krótkiej sprzedaży. Każdy instrument finansowy A_i reprezentowany jest poprzez czynnik dyskontujący $D_i, i = 1, 2, \dots, n$, modelowany za pomocą trójkątnej liczby rozmytej $D_i = T(\bar{v}_{min}; \bar{v}; \bar{v}_{max})$ z funkcją przynależności (3.1), gdzie:

- \bar{v}_{min} – maksymalne dolne oszacowanie czynnika dyskontującego,
- \bar{v} – oczekiwany czynnik dyskontujący, obliczony na podstawie oczekiwanej prostej stopy zwrotu \bar{r} ,
- \bar{v}_{max} – minimalne dolne oszacowanie czynnika dyskontującego.

Znana jest oczekiwana stopa zwrotu z instrumentów A_i oraz macierz kowariancji Σ . Poszukujemy takich udziałów p_i poszczególnych instrumentów w portfelu, aby oczekiwany rozmyty czynnik dyskontujący wyliczony na podstawie (4.10) był jak najmniejszy. Zagadnienie minimalizacji czynnika dyskontującego sprowadza się wtedy do rozwiązania zadania

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\bar{v}_i} \right)^{-1} \odot \left(\bigoplus_{i=1}^n \frac{p_i}{\bar{v}_i} \odot D_i \right) \rightarrow \min \\ & \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\bar{v}_i} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\bar{v}_i} \cdot d(D_i) \right) \leq d_1 \\ & \sum_{i=1}^n p_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n p_i \cdot p_j \cdot cov_{i,j} \leq d_2 \\ & \sum_{i=1}^n p_i = 1 \\ & p_1, p_2, \dots, p_n \geq 0 \end{aligned}$$

gdzie:

$p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^+$ – udziały instrumentów w portfelu,

$D_1, D_2, \dots, D_n \in \mathbb{R}$ – oczekiwane rozmyte czynniki dyskontujące z instrumentów,

$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ – oczekiwane czynniki dyskontujące,

d_1 – zadany maksymalny poziom miary ryzyka wieloznaczności,

d_2 – zadany maksymalny poziom miary ryzyka niepewności.

Dla czynnika dyskontującego z instrumentu o wartości bieżącej modelowanej trójkątną liczbą rozmytą entropia jest wartością stałą, zatem nie uwzględniamy jej w zadaniu minimalizacji ryzyka.

4.1.4. Studium przypadku

Przykład 4.3

Przejdźmy teraz do przykładu wykorzystującego dane rzeczywiste. Rozpatrzmy akcje spółek BZWBK, ENEA, KGHM i ORANGE z okresu pomiędzy 26.10.2015 a 25.11.2016. Instrumentom tym przypisujemy kolejno oznaczenia $A_i, i = 1, \dots, 4$. Na podstawie danych historycznych oraz subiektywnej oceny inwestora, nieprecyzyjna wartość bieżąca każdego z tych instrumentów, wyznaczona na dzień 25.11.2016 wynosi

$$T(\check{C}_{min}^1; \check{C}^1; \check{C}_{max}^1) = T(310; 313; 315),$$

$$T(\check{C}_{min}^2; \check{C}^2; \check{C}_{max}^2) = T(10,1; 10,25; 10,5),$$

$$T(\check{C}_{min}^3; \check{C}^3; \check{C}_{max}^3) = T(70,5; 72; 76),$$

$$T(\check{C}_{min}^4; \check{C}^4; \check{C}_{max}^4) = T(5,5; 5,6; 5,7).$$

Na podstawie danych historycznych obliczona została n -wymiarowa zmienna losowa $(\tilde{r}_t^1; \tilde{r}_t^2; \tilde{r}_t^3; \tilde{r}_t^4)$, o rozkładzie łącznym $N((-0,0046; -0,0031; 0,0109; -0,0034)^T; \Sigma)$.

Macierz kowariancji tej zmiennej ma postać

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0,000255 & 0,000029 & 0,000048 & 0,000004 \\ 0,000029 & 0,000603 & 0,000336 & 0,000061 \\ 0,000048 & 0,000336 & 0,000969 & 0,000141 \\ 0,000004 & 0,000061 & 0,000141 & 0,000210 \end{pmatrix}.$$

Z (4.8) wariancja oczekiwanej stopy zwrotu z portfela jest równa $\sigma^2 = 0,000207$.

Dla podanych instrumentów wyznaczamy oczekiwane czynniki dyskontujące.

$$D_1 = T\left(\frac{1}{1-0,0046} \cdot \frac{310}{313}; \frac{1}{1-0,0046}; \frac{1}{1-0,0046} \cdot \frac{315}{313}\right) = T(0,995; 1,005; 1,001),$$

$$D_2 = T\left(\frac{1}{1-0,0031} \cdot \frac{10,1}{10,25}; \frac{1}{1-0,0031}; \frac{1}{1-0,0031} \cdot \frac{10,5}{10,25}\right) = T(0,988; 1,003; 1,013),$$

$$D_3 = T\left(\frac{1}{1+0,0109} \cdot \frac{70,5}{72}; \frac{1}{1+0,0109}; \frac{1}{1+0,0109} \cdot \frac{76}{72}\right) = T(0,997; 0,989; 1,022),$$

$$D_4 = T\left(\frac{1}{1-0,0034} \cdot \frac{5,5}{5,6}; \frac{1}{1-0,0034}; \frac{1}{1-0,0034} \cdot \frac{5,7}{5,6}\right) = T(0,985; 1,003; 1,021).$$

Wyznamy miary energii dla oczekiwanego czynnika dyskontującego każdego z instrumentów

$$\begin{aligned} d(D_1) &= 0,0063, \\ d(D_2) &= 0,0005, \\ d(D_3) &= 0,0068, \\ d(D_4) &= 0,0003. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Niech udział instrument A_i w portfelu π będzie równy p_i . Wtedy czynnik dyskontujący portfela $D^\pi \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, zgodnie z (3.18), może zostać obliczony jako

$$\begin{aligned} D^\pi &= \left(\frac{p_1}{1,005} + \frac{p_2}{1,003} + \frac{p_3}{0,989} + \frac{p_4}{1,003}\right)^{-1} \\ &\odot \left(\left(\frac{p_1}{1,005} \odot T(0,995; 1,005; 1,001)\right) \oplus \left(\frac{p_2}{1,003} \odot T(0,988; 1,003; 1,013)\right)\right. \\ &\left. \oplus \left(\frac{p_3}{0,989} \odot T(0,997; 0,989; 1,022)\right) \oplus \left(\frac{p_4}{1,003} \odot T(0,985; 1,003; 1,021)\right)\right) \end{aligned}$$

Jego miara energii przyjmuje postać

$$\begin{aligned} d(D^\pi) &= \left(\frac{p_1}{1,005} + \frac{p_2}{1,003} + \frac{p_3}{0,989} + \frac{p_4}{1,003}\right)^{-1} \\ &\cdot \left(\frac{p_1}{1,005} \cdot 0,0063 + \frac{p_2}{1,003} \cdot 0,0005 + \frac{p_3}{0,989} \cdot 0,0068 + \frac{p_4}{1,003} \cdot 0,0003\right). \end{aligned}$$

Dla powyższych danych zbudujemy teraz zadanie portfelowe, gdzie oczekiwany czynnik dyskontujący będzie minimalizowany przy ustalonym maksymalnym poziomie ryzyka

niepewności i nieprecyzyjności, wyrażonych wariacją prostych stop zwrotu i energią oczekiwanego czynnika dyskontującego

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{p_1}{1,005} + \frac{p_2}{1,003} + \frac{p_3}{0,989} + \frac{p_4}{1,003} \right)^{-1} \\
 & \odot \left(\left(\frac{p_1}{1,005} \odot T(0,995; 1,005; 1,001) \right) \oplus \left(\frac{p_2}{1,003} \odot T(0,988; 1,003; 1,013) \right) \right. \\
 & \left. \oplus \left(\frac{p_3}{0,989} \odot T(0,997; 0,989; 1,022) \right) \oplus \left(\frac{p_4}{1,003} \odot T(0,985; 1,003; 1,021) \right) \right) \rightarrow \min \\
 & \left(\frac{p_1}{1,0046} + \frac{p_2}{1,0031} + \frac{p_3}{0,9892} + \frac{p_4}{1,0034} \right)^{-1} \\
 & \cdot \left(\frac{0,0063 \cdot p_1}{1,0046} + \frac{0,0005 \cdot p_2}{1,0031} + \frac{0,0068 \cdot p_3}{0,9892} + \frac{0,0003 \cdot p_4}{1,0034} \right) \leq d_1 \\
 & \sum_{i=1}^4 p_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=i+1}^4 p_i \cdot p_j \cdot cov_{i,j} \leq d_2 \\
 & \sum_{i=1}^4 p_i = 1 \\
 & p_1, p_2, \dots, p_4 \geq 0
 \end{aligned}$$

gdzie:

$p_1, p_2, \dots, p_4 \in \mathbb{R}^+$ – udziały instrumentów w portfelu,

d_1 – zadany maksymalny poziom miary ryzyka wieloznaczności,

d_2 – zadany maksymalny poziom miary ryzyka niepewności.

Sformułowane zadanie minimalizacji czynnika dyskontującego pozwala na określenie struktury portfela o zadanym poziomie ryzyka niepewności i nieprecyzyjności.

□

4.2. Przypadek wartości bieżącej danej trójkątną dyskretną liczbą rozmytą

4.2.1. Stopa zwrotu z portfela wieloskładnikowego

Rozważmy przypadek wieloskładnikowego portfela π , złożonego z instrumentów finansowych $A_i, i = 1, 2, \dots, n$ o wartościach bieżących PV_i , danych trójkątnymi dyskretnymi liczbami rozmytymi, reprezentowanymi przez funkcje przynależności $\mu_i: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$. Wtedy wartość bieżąca portfela złożonego z tych instrumentów ma postać

$$PV = DT(\check{C}_{min}; \check{C}; \check{C}_{max}) = DT\left(\left(\sum_{i=1}^n \check{C}_{min}^i; \sum_{i=1}^n \check{C}^i; \sum_{i=1}^n \check{C}_{max}^i\right)\right), \quad (4.14)$$

z funkcją przynależności $\mu: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ daną wzorem (2.5) oraz nośnikiem

$$\mathbb{S}(PV) = \{0,01i: 100 \cdot \check{C}_{min} < i < 100 \cdot \check{C}_{max}, i \in \mathbb{N}\} \subset Nod(PV). \quad (4.15)$$

Tak zdefiniowana wartość bieżąca portfela spełnia założenia trójkątnej dyskretnej liczby rozmytej.

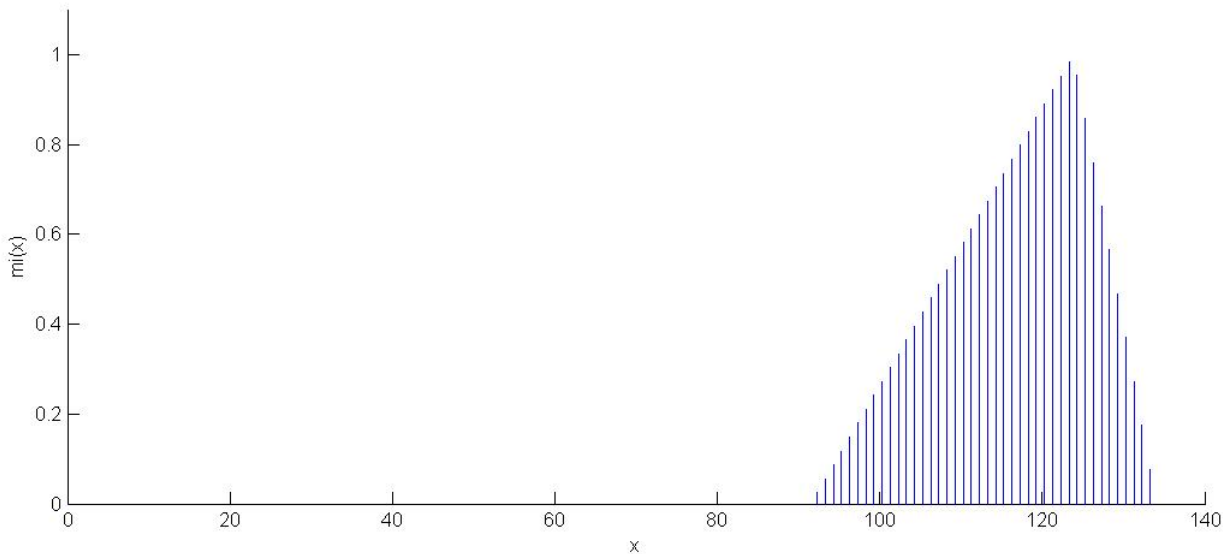
Zakładamy, że dla każdego instrumentu $A_i (i = 1, 2, \dots, n)$ znamy rozkład prawdopodobieństwa prostej stopy zwrotu $\tilde{r}_t^i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ wyznaczonej za pomocą (2.14) dla PV_i równej cenie rynkowej \check{C}_i . Identycznie jak Markowitz zakładamy, że n -wymiarowa zmienna losowa $(\tilde{r}_t^1; \tilde{r}_t^2; \dots; \tilde{r}_t^n)^T$ ma łączny rozkład normalny $N((\bar{r}_1; \bar{r}_2; \dots; \bar{r}_n)^T; \Sigma)$. Zgodnie z zasadą rozszerzenia Zadeha, prosta stopa zwrotu wyznaczona dla tak oszacowanej PV jest rozmytym zbiorem probabilistycznym reprezentowanym przez swą funkcję przynależności $\tilde{\rho} \in [0; 1]^{\mathbb{R} \times \Omega}$, $i = 1, 2, \dots, n$ daną wzorem (2.23).

Przykład 4.4

W programie Matlab przeprowadzono symulacje zachowania portfela w przypadku instrumentów składowych $A_i, n = 4$, których wartości bieżące są trójkątnymi dyskretnymi liczbami rozmytymi o parametrach

$$\begin{aligned} PV_1 &= DT(11,11; 19,57; 24,51), \\ PV_2 &= DT(26,22; 46,28; 49,88), \\ PV_3 &= DT(11,74; 14,84; 15,07), \\ PV_4 &= DT(42,41; 43,13; 44,61). \end{aligned}$$

Wykres funkcji przynależności do wartości bieżącej portfela zbudowanego z instrumentów A_i został przedstawione na Rysunku 4.4.

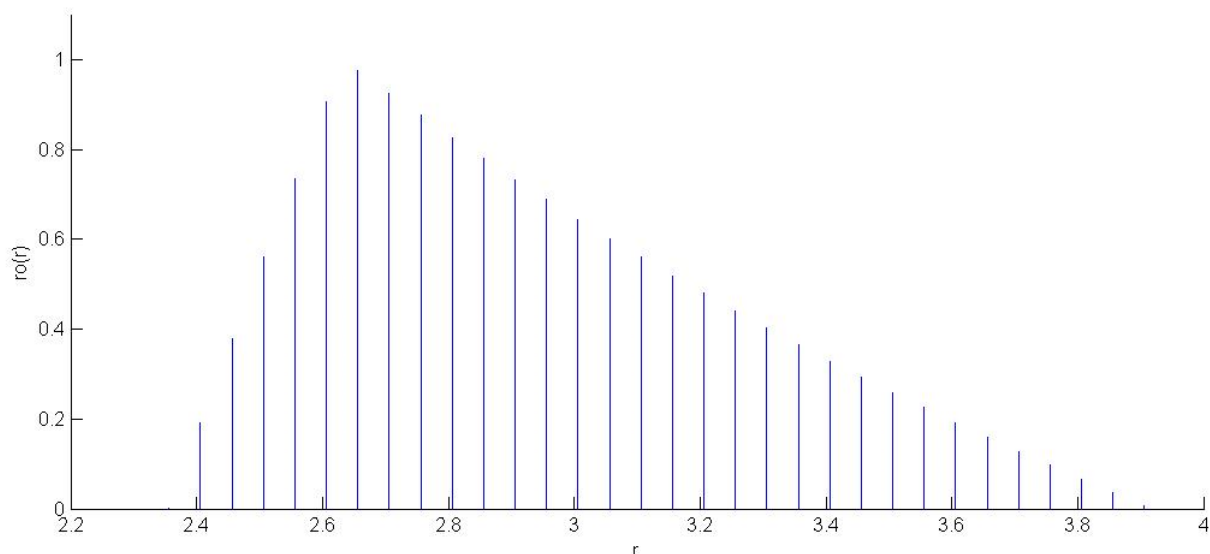


Rys. 4.4 Wykres funkcji przynależności PV portfela złożonego z instrumentów A_i

Założmy dodatkowo, że dana jest 4-wymiarowa zmienna losowa $(\tilde{r}_t^1; \tilde{r}_t^2; \tilde{r}_t^3; \tilde{r}_t^4)$ o rozkładzie łącznym $N((0,8116; 0,5328; 0,3507; 0,9390)^T; \Sigma)$. Macierz kowariancji tej zmiennej ma postać

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0,8759 & 0,3945 & -0,8502 & 0,0173 \\ 0,3945 & 0,5502 & 0,9859 & 0,7350 \\ -0,8501 & 0,9859 & 0,6225 & 0,4919 \\ 0,0173 & 0,7350 & 0,4919 & 0,5870 \end{pmatrix}.$$

Dla podanych instrumentów i zbudowanego z nich portfela wyznaczamy oczekiwane stopy zwrotu. Są one dyskretnymi liczbami rozmytymi i zostały przedstawione na Rysunku 4.5.



Rys. 4.5 Wykres funkcji przynależności do zwrotu z portfela

Miary energii, entropii i wariancji dla wyznaczonych oczekiwanych rozmytych stóp zwrotu z instrumentów oraz portfela zostały przedstawione w Tabeli 4.3.

Tabela 4.3 Miary energii, entropii i wariancji dla stóp zwrotu z portfela π oraz jego składników

Instrument	A_1	A_2	A_3	A_4	π
Energia	75,7131	53,3128	17,4497	4,6455	72,0312
Entropia	0,3227	0,2175	0,0572	0,0132	0,3270
Wariancja	0,8759	0,5502	0,6225	0,5870	0,5160

Otrzymano następujące wnioski:

$$d(R_4) < d(R_3) < d(R_2) < d(R^\pi) < d(R_1),$$

$$e(R_4) < e(R_3) < e(R_2) < e(R_1) < e(R^\pi),$$

$$\sigma^2 < \sigma_2^2 < \sigma_4^2 < \sigma_3^2 < \sigma_1^2,$$

Wartości wariancji zachowały się w sposób przewidywany przez zasadę dywersyfikacji ryzyka. Miara energii stopy zwrotu z portfela jest wartością pośrednią w stosunku do miar energii stóp zwrotu z jego składników. Natomiast miara entropii stopy zwrotu jest największa w przypadku zbudowanego portfela.

Wzrost miary energii oznacza wzrost ryzyka wieloznaczności oczekiwanej stopy zwrotu, czyli wzrost ryzyka uwzględnienia takiej stopy zwrotu, która nie jest najlepszą z

możliwych. Natomiast spadek miary entropii oznacza spadek ryzyka nieostrości, a więc zmniejszenie się ryzyka wyboru takiej stopy procentowej, która jest niekorzystna dla inwestora.

□

4.2.2. Czynniki dyskontujący z portfela wieloskładnikowego

Funkcja $\eta_i \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$ określona za pomocą tożsamości (2.34) jest funkcją przynależności czynnika dyskontującego $D_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ wyznaczonego za pomocą oczekiwanej stopy zwrotu $R_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ przy $PV_i = DT(\check{C}_{min}^i, \check{C}^i, \check{C}_{max}^i)$. Czynniki dyskonta $D^\pi \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ dla portfela wyznaczony za pomocą oczekiwanej stopy zwrotu $R \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ jest określony przez

$$D^\pi = \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\bar{v}_i} \right)^{-1} \odot \left(\bigoplus_{i=1}^n \frac{p_i}{\bar{v}_i} \odot D_i \right), \quad (4.16)$$

z funkcją przynależności (2.39) oraz nośnikiem

$$\mathbb{S}(D^\pi) = \left\{ v: v = \frac{i}{100 \cdot \check{c} \cdot (1 + \bar{r})}; 100 \cdot \check{C}_{min} < i < 100 \cdot \check{C}_{max}, i \in \mathbb{N} \right\} \subset \text{Nod}(D, \check{C}, \bar{v}) \quad (4.17)$$

Łatwo zauważyć, że zbiór wyznaczony powyżej jest również trójkątną dyskretną liczbą rozmytą. Ryzyko wieloznaczności obarczające oczekiwany czynnik dyskonta portfela $D^\pi \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ oceniać będziemy za pomocą miary energii. Zgodnie z (2.39) oraz (4.16), miara ta jest równa

$$d(D^\pi) = \sum_{v \in \mathbb{S}(D^\pi)} \eta_{D^\pi}(v). \quad (4.18)$$

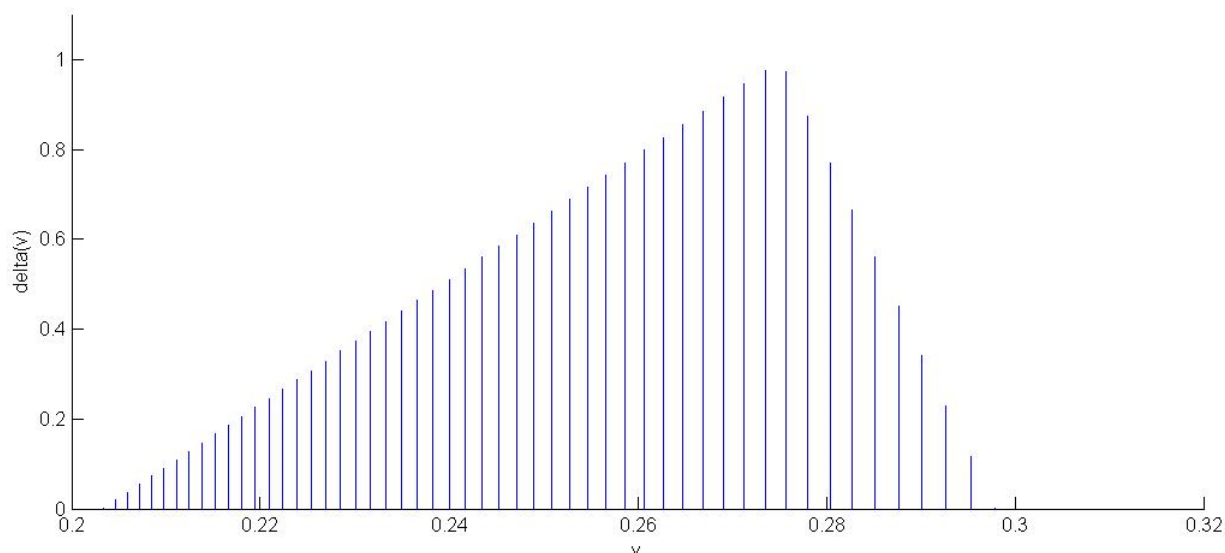
Ryzyko nieostrości czynnika dyskontującego z portfela oceniać będziemy za pomocą miary entropii

$$e(D^\pi) = \frac{\sum_{v \in \mathbb{S}(D^\pi)} \min\{\eta_{D^\pi}(v); 1 - \eta_{D^\pi}(v)\}}{\sum_{v \in \mathbb{S}(D^\pi)} \max\{\eta_{D^\pi}(v); 1 - \eta_{D^\pi}(v)\}}. \quad (4.19)$$

Jak wspomniano w rozdziale 2, postaci miar energii i entropii dla portfela wieloskładnikowego w przypadku wartości bieżącej modelowanej trójkątną liczbą rozmytą nie pozwalają na efektywne konstruowanie zadania portfelowego uwzględniającego ryzyko nieprecyzyjności.

Przykład 4.5

Wyliczmy oczekiwane czynniki dyskontujące dla instrumentów oraz portfela podanych w Przykładzie 4.4. Zbiór rozmyty odpowiadający oczekiwanemu czynnikowi dyskontującemu z portfela został przedstawiony na Rysunku 4.6.



Rys. 4.6 Wykres funkcji przynależności dla oczekiwanego czynnika dyskontującego z portfela

Miary energii, entropii i wariancji obliczone za pomocą (2.45), (2.46), (4.18) i (4.19) dla wyznaczonych oczekiwanych rozmytych czynników dyskontujących z instrumentów oraz portfela zostały przedstawione w Tabeli 4.4.

Tabela 4.4 Miary energii, entropii dla czynników dyskontujących z portfela π oraz jego składników

Instrument	A_1	A_2	A_3	A_4	π
Energia	670	1183	166,5	110	572,25
Entropia	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3

Tym samym, dla przypadku czynnika dyskontującego mamy

$$d(D_4) < d(D_3) < d(D^\pi) < d(D_1) < d(D_2), \quad (4.20)$$

$$e(D^\pi) = e(D_i) = \frac{1}{3}.$$

Z otrzymanych zależności widzimy, że miara energii dla portfela jest wartością pośrednią pomiędzy miarami energii dla instrumentów, co wynika bezpośrednio ze wzoru (4.20). Entropia jest wielkością stałą dla rozważanego czynnika dyskontującego, będącego trójkątną dyskretną

liczbą rozmytą. Wariancja, jako miara niepewności, zgodnie z powszechnie przyjętą teorią jest mniejsza w przypadku złożonego portfela.

□

4.3. Podsumowanie

W przypadku portfela wieloskładnikowego, niezależnie od tego, czy wartość bieżąca jego składników była modelowana trójkątną czy trójkątną dyskretną liczbą rozmytą, otrzymaliśmy następujące wnioski:

- zgodnie z teorią portfelową, dywersyfikacja portfela zmniejsza ryzyko niepewności wyrażone wariancją,
- wprost ze wzorów (4.11) i (4.20) ryzyko wieloznaczności wyrażone energią czynnika dyskontującego jest kombinacją liniową tej miary obliczonej dla składników portfela, tym samym dywersyfikacja portfelowa powoduje jego uśrednienie,
- ryzyko nieostrości wyrażone entropią czynnika dyskontującego, jako wielkość stała dla trójkątnej liczby rozmytej, jest niewrażliwe na dywersyfikację portfelową.

Przykłady 1 i 4 pokazały, że dywersyfikacja portfelowa nie musi zmniejszać ryzyka nieprecyzyjności stopy procentowej wyrażonego wariancją. Przykład 2 wskazuje na to, że w przypadku ciągłym wartości bieżącej danej trójkątną liczbą rozmytą, energia czynnika dyskontującego z portfela jest kombinacją liniową tej wielkości wyliczonej dla poszczególnych jego składników. Z tego powodu możliwe było stworzenie zadania portfelowego, którego sposób budowania przedstawiony został w Przykładzie 3. Ze względu na postać miary energii, w przypadku dyskretnym nie jest możliwe sformułowanie takiego zadania.

Ze względu na to, że miara energii czynnika dyskontującego jest stała w przypadku wartości bieżącej modelowanej trójkątną liczbą rozmytą, informacja którą ze sobą niesie nie jest uwzględniana w zadaniu minimalizacji ryzyka. Aby uwzględnić ryzyko nieostrości mierzone entropią celowym jest uogólnienie przypadku *PV* danej trójkątną liczbą rozmytą, na przypadek trapezoidalnej liczby rozmytej. Rozważaniom na ten temat poświęcony zostanie następny rozdział.

5. Portfel wieloskładnikowy z wartością bieżącą daną trapezoidalną liczbą rozmytą

W tym rozdziale omówiony zostanie przypadek portfela wieloskładnikowego, złożonego z instrumentów o wartości bieżącej danej trapezoidalną oraz trapezoidalną dyskretną liczbą rozmytą. Podrozdziały zawierają opis modelu, w tym charakterystykę czynnika dyskontującego z portfela, zależności pomiędzy miarami ryzyka oraz zadanie portfelowe.

5.1. Przypadek wartości bieżącej danej trapezoidalną liczbą rozmytą

5.1.1. Stopa zwrotu z portfela wieloskładnikowego

Rozważmy przypadek portfela wieloskładnikowego π , złożonego z instrumentów finansowych $A_i, i = 1, 2, \dots, n$. Wartość bieżąca instrumentu A_i jest określona jako trapezoidalna liczba rozmyta $Tr(\check{C}_{min}^i; \check{C}^{*i}; \check{C}_*^i; \check{C}_{max}^i), i = 1, 2, \dots, n$ z ceną rynkową $\check{C}^i \in [\check{C}^{*i}; \check{C}_*^i]$, i funkcją przynależności (2.2). Wartość bieżąca tak określonego portfela jest trapezoidalną liczbą rozmytą

$$PV^\pi = Tr\left(\left(\sum_{i=1}^n \check{C}_{min}^i; \sum_{i=1}^n \check{C}^{*i}; \sum_{i=1}^n \check{C}_*^i; \sum_{i=1}^n \check{C}_{max}^i\right)\right) = Tr(\check{C}_{min}; \check{C}^*; \check{C}_*; \check{C}_{max}). \quad (5.1)$$

Zakładamy, że n -wymiarowa zmienna losowa odpowiadająca prostej stopie zwrotu z instrumentów $(\tilde{r}_t^1; \tilde{r}_t^2; \dots; \tilde{r}_t^n)$ ma n -wymiarowy rozkład normalny $N((\bar{r}_1; \bar{r}_2; \dots; \bar{r}_n)^T; \mathbf{\Sigma})$, z macierzą kowariancji

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \cdots & cov_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cov_{n1} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Każdemu instrumentowi A_i przypisujemy jego wartość przyszłą

$$\tilde{V}_t^i(\omega) = \check{C}^i \cdot (1 + \tilde{r}_t^i(\omega)). \quad (5.3)$$

Udział p_i instrumentu A_i w portfelu π wynosi

$$p_i = \frac{\check{C}^i}{\check{C}}, \quad (5.4)$$

gdzie $\check{C} = \sum_{i=1}^n \check{C}^i$. *FV* portfela π wynosi wtedy

$$\tilde{V}_t(\omega) = \sum_{i=1}^n \check{C}^i \cdot (1 + \tilde{r}_t^i(\omega)) = \check{C} \cdot (1 + \tilde{r}_t(\omega)), \quad (5.5)$$

gdzie $\tilde{r}_t^i(\omega)$ dane są wzorem (4.6). Oczekiwana stopa zwrotu z portfela jest wtedy wyliczana z zależności (4.7). Funkcja przynależności stopy zwrotu z portfela ma postać

$$\rho(r | \check{C}_{min}^\pi; \check{C}^{*\pi}; \check{C}^\pi; \check{C}_{max}^\pi) = \begin{cases} \frac{\check{C}^\pi(1+\bar{r}) - \check{C}_{min}^\pi}{\check{C}^\pi - \check{C}_{min}^\pi} & \text{dla } \frac{\check{C}_{min}^\pi}{\check{C}^\pi} \leq \frac{1+\bar{r}}{1+r} < \frac{\check{C}^{*\pi}}{\check{C}^\pi}, \\ 1 & \text{dla } \frac{\check{C}^{*\pi}}{\check{C}^\pi} \leq \frac{1+\bar{r}}{1+r} \leq \frac{\check{C}^{*\pi}}{\check{C}^\pi}, \\ \frac{\check{C}^\pi(1+\bar{r}) - \check{C}_{max}^\pi}{\check{C}^\pi - \check{C}_{max}^\pi} & \text{dla } \frac{\check{C}^{*\pi}}{\check{C}^\pi} < \frac{1+\bar{r}}{1+r} \leq \frac{\check{C}_{max}^\pi}{\check{C}^\pi}, \\ 0 & \text{dla } \frac{1+\bar{r}}{1+r} > \frac{\check{C}_{max}^\pi}{\check{C}^\pi}, \quad \frac{1+\bar{r}}{1+r} < \frac{\check{C}_{min}^\pi}{\check{C}^\pi}, \end{cases} \quad (5.6)$$

a jej wariancja jest obliczana, podobnie jak w poprzednim rozdziale, z (4.8).

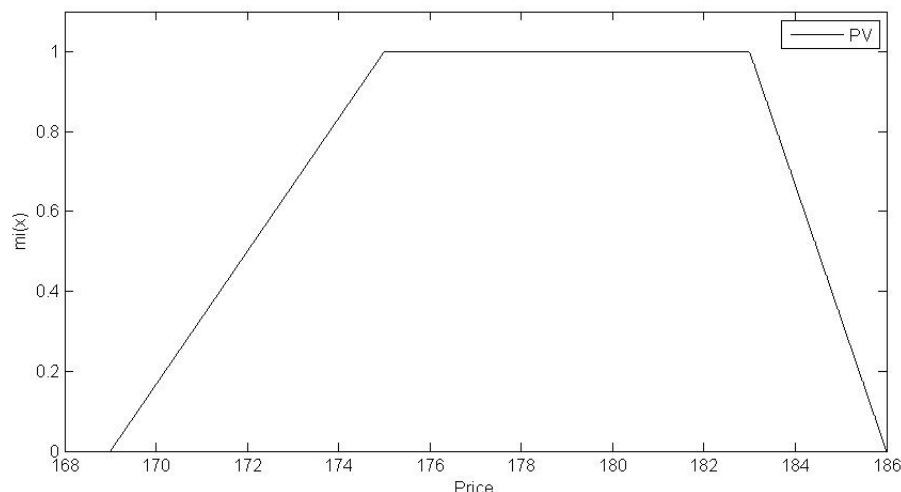
Przykład 5.1

Załóżmy, dany jest instrument A_1 z wartością bieżącą określoną trapezoidalną liczbą rozmytą $Tr(101; 105; 106; 108)$ oraz instrument A_2 z wartością bieżącą równą $Tr(68; 70; 77; 78)$. Tworzymy portfel złożony z instrumentów A_1 oraz A_2 . Na podstawie ceny rynkowej instrumentów wyliczamy ich udziały w portfelu

$$p_1 = \frac{1055}{1790}, \quad p_2 = \frac{735}{1790}.$$

Wartość bieżąca portfela złożonego z obu tych instrumentów, przedstawiona na Rysunku 5.1 wynosi

$$PV = T(101 + 68; 105 + 70; 106 + 77; 108 + 78) = T(169; 175; 183; 186).$$



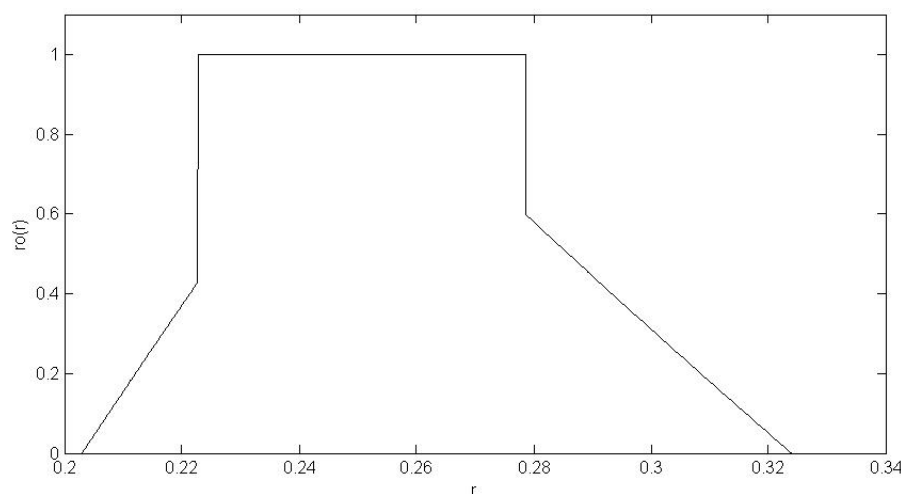
Rys. 5.1 Wykres funkcji przynależności PV portfela złożonego z instrumentów A_1 oraz A_2

Założmy również, że dana jest dwuwymiarowa zmienna losowa $(\tilde{r}_t^1; \tilde{r}_t^2)$ o rozkładzie łącznym $N\left(\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)^T; \Sigma\right)$. Macierz kowariancji tej zmiennej ma postać

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0,5 & -0,1 \\ -0,1 & 0,64 \end{pmatrix}.$$

Z (3.11) wariancja oczekiwanej stopy zwrotu z portfela przyjmuje wartość $\sigma^2 = 0,2864$.

Dla podanych instrumentów i zbudowanego z nich portfela wyznaczamy oczekiwane stopy zwrotu. Są one liczbami rozmytymi R_1, R_2, R , nie są to jednak trapezoidalne liczby rozmyte. Funkcja przynależności do oczekiwanej stopy zwrotu z portfela została przedstawiona na Rysunku 5.2.



Rys. 5.2 Wykres funkcji przynależności dla zwrotu z portfela

Miary energii, entropii i wariancji dla wyznaczonych oczekiwanych rozmytych stóp zwrotu z instrumentów oraz portfela zostały przedstawione w Tabeli 5.1.

Tabela 5.1 Miary energii, entropii i wariancji dla stóp zwrotu z portfela π oraz jego składników

Instrument	A_1	A_2	π
Energia	0,00036	0,00159	0,00039
Entropia	0,2310	0,4727	0,1554
Wariancja	0,5	0,64	0,2864

Otrzymujemy następujące zależności:

$$\begin{aligned} d(R^1) &< d(R^\pi) < d(R^2), \\ e(R^\pi) &< e(R^1) < e(R^2), \\ \sigma^2 &< \sigma_1^2 < \sigma_2^2. \end{aligned}$$

Z wykresów funkcji przynależności łatwo można odczytać, że oczekiwane stopy zwrotu tak z poszczególnych składników jak i z całego portfela nie są trapezoidalnymi liczbami rozmytymi. Miara energii oczekiwanej stopy zwrotu z portfela jest wartością pośrednią w stosunku do składników portfela. Miary entropii i wariancji są najmniejsze w przypadku portfela.

□

5.1.2. Czynniki dyskontujący portfela wieloskładnikowego

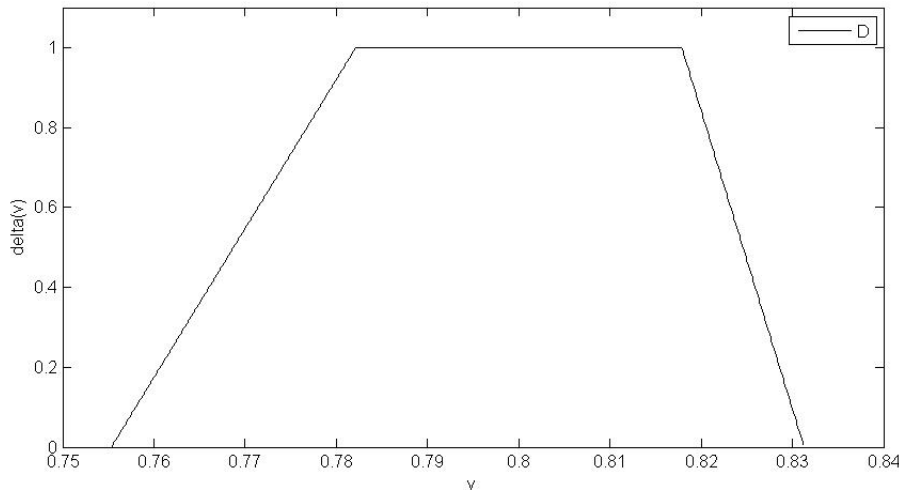
Funkcja $\eta_i \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$, określona dla instrumentu $A_i, i = 1, 2, \dots, n$ o wartości bieżącej danej trapezoidalną liczbą rozmytą $Tr(\check{C}_{min}^i; \check{C}^{*i}; \check{C}_*^i; \check{C}_{max}^i)$, opisana wzorem (2.36) jest funkcją przynależności czynnika dyskontującego $D_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, wyznaczonego za pomocą oczekiwanej stopy zwrotu $R_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. Miary jego energii i entropii dane są wzorami (2.43) i (2.47).

Portfelowi π przypisujemy oczekiwany czynnik dyskontujący $D^\pi \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ określony za pomocą zależności (2.34). Mamy, że oczekiwany czynnik dyskontowy \bar{v} wyznaczony przez oczekiwaną stopę zwrotu \bar{r} spełnia warunek (4.9). Stąd czynnik dyskontujący portfela przyjmuje ostatecznie postać (4.10), a jego miarę energii możemy wyliczyć z (4.11). Zgodnie ze wzorem (2.47), miara entropii dla portfela wynosi

$$e(D^\pi) = \frac{\check{C}_*^\pi - \check{C}_{min}^\pi + \check{C}_{max}^\pi - \check{C}^{\pi*}}{-\check{C}_* - 3 \cdot \check{C}_{min} + 3 \cdot \check{C}_{max} + \check{C}^*}. \quad (5.7)$$

Przykład 5.2

Dla instrumentów opisanych w Przykładzie 5.1 i zbudowanego portfela możemy, korzystając z (2.36) i (4.10), wyznaczyć oczekiwane czynniki dyskontujące. Wykres funkcji przynależności do czynnika dyskontującego z portfela został przedstawiony na Rysunku 5.3.



Rys. 5.3 Wykres funkcji przynależności dla oczekiwanego czynnika dyskontującego z portfela

Miary energii, entropii i wariancji dla wyznaczonych oczekiwanych rozmytych czynników dyskontujących z instrumentów oraz portfela zostały przedstawione w Tabeli 5.2.

Tabela 5.2 Miary energii, entropii dla czynników dyskontujących z portfela π oraz jego składników

Instrument	A_1	A_2	π
Energia	0,0303	0,0925	0,0873
Entropia	0,2727	0,0810	0,1525

Tym samym, dla przypadku czynnika dyskontującego mamy

$$d(D_1) < d(D) < d(D_2),$$

$$e(D_2) < e(D) < e(D_1).$$

Miara energii dla portfela jest wartością pośrednią pomiędzy miarami energii dla poszczególnych instrumentów, co sugeruje już sama postać wzoru (4.11). Miara entropii oczekiwanego czynnika dyskonta portfela π i jego składników A_i wykazała podobną zależność. □

5.1.3. Składanie portfela wieloskładnikowego

Rozważmy zadanie minimalizacji czynnika dyskontującego dla portfela złożonego z instrumentów finansowych o wartości bieżącej danej trapezoidalną liczbą rozmytą. Zakładamy doskonałą podzielność instrumentu finansowego oraz brak możliwości krótkiej sprzedaży. Każdy instrument finansowy A_i reprezentowany poprzez oczekiwany rozmyty czynnik dyskontujący $D_i, i = 1, 2, \dots, n$, modelowany jest za pomocą trapezoidalnej liczby rozmytej $D_i = Tr(\bar{v}_{min}; \bar{v}_*; \bar{v}^*; \bar{v}_{max})$ z funkcją przynależności (2.36), gdzie:

- $\bar{v}_{min} \in]0; \bar{v}]$ – maksymalne dolne oszacowanie czynnika dyskontującego,
- $\bar{v}_{max} \in [\bar{v}; +\infty[$ – minimalne dolne oszacowanie czynnika dyskontującego,
- $\bar{v}_* \in [\bar{v}_{min}; \bar{v}]$ – minimalne górne oszacowanie czynnika dyskontującego zauważalnie mniejsze od obserwowanej wartości \bar{v} ,
- $\bar{v}^* \in [\bar{v}; \bar{v}_{max}]$ – maksymalne dolne oszacowanie czynnika dyskontującego zauważalnie większe od obserwowanej wartości \bar{v} .

Znana jest oczekiwana stopa zwrotu z instrumentów A_i oraz macierz kowariancji Σ . Poszukujemy takich udziałów p_i poszczególnych instrumentów w portfelu, aby oczekiwany rozmyty czynnik dyskontujący portfela był jak najmniejszy. Przy ustalonym maksymalnym poziomie ryzyka niepewności oraz nieprecyzyjności wyrażonym miarą energii i entropii czynnika dyskontującego, zadanie to sprowadza się wtedy do

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\bar{v}_i} \right)^{-1} \odot \left(\bigoplus_{i=1}^n \frac{p_i}{\bar{v}_i} \odot D_i \right) \rightarrow \min$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\bar{v}_i} \right)^{-1} \odot \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\bar{v}_i} \odot d(D_i) \right) \leq d_1$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\bar{v}_i} \right)^{-1} \odot \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\bar{v}_i} \odot e(D_i) \right) \leq d_2$$

$$\sum_{i=1}^n p_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n p_i \cdot p_j \cdot cov_{i,j} \leq d_3$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

$$p_1, p_2, \dots, p_n \geq 0$$

gdzie:

$p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^+$ – udziały instrumentów w portfelu,

$D_1, D_2, \dots, D_n \in \mathbb{R}$ – oczekiwane rozmyte czynniki dyskontujące z instrumentów,

$\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n$ – oczekiwane czynniki dyskontujące,

d_1 – zadany maksymalny poziom miary ryzyka wieloznaczności,

d_2 – zadany maksymalny poziom miary ryzyka nieostrości,

d_3 – zadany maksymalny poziom miary ryzyka niepewności.

5.1.4. Studium przypadku

Przykład 5.3

Przejdźmy teraz do przykładu wykorzystującego dane rzeczywiste. Rozpatrzmy akcje spółek BZWBK, ENEA z okresu pomiędzy 26.10.2015 a 25.11.2016. Instrumentom tym przypisujemy kolejno oznaczenia $A_i, i = 1, 2$. Na podstawie danych historycznych oraz subiektywnej oceny inwestora, nieprecyzyjna wartość bieżąca każdego z tych instrumentów, wyznaczona na dzień 25.11.2016 wynosi

$$Tr(\check{C}_{min}^1; \check{C}^{*1}; \check{C}_*^1; \check{C}_{max}^1) = Tr(310; 312; 314; 315),$$

$$Tr(\check{C}_{min}^2; \check{C}^{*2}; \check{C}_*^2; \check{C}_{max}^2) = Tr(10,1; 10,2; 10,3; 10,5).$$

Na podstawie danych historycznych wyznaczamy dwuwymiarową zmienną losową $(\tilde{r}_t^1; \tilde{r}_t^2)$ o rozkładzie łącznym $N((-0,0046; -0,0031)^T; \Sigma)$, z macierzą kowariancji

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0,0003 & 0,00003 \\ 0,00003 & 0,0006 \end{pmatrix}.$$

Z (3.11) wariancja oczekiwanej stopy zwrotu z portfela przyjmuje wartość $\sigma^2 = 0,00002$.

Dla podanych instrumentów wyznaczamy oczekiwane czynniki dyskontujące.

$$D_1 = Tr\left(\frac{1}{1 - 0,0046} \cdot \frac{310}{313}; \frac{1}{1 - 0,0046} \cdot \frac{312}{313}; \frac{1}{1 - 0,0046} \cdot \frac{314}{313}; \frac{1}{1 - 0,0046} \cdot \frac{315}{313}\right)$$

$$= Tr(0,995; 1,001; 1,010; 1,011),$$

$$D_2 = Tr\left(\frac{1}{1 - 0,0031} \cdot \frac{10,1}{10,25}; \frac{1}{1 - 0,0031} \cdot \frac{10,2}{10,25}; \frac{1}{1 - 0,0031} \cdot \frac{10,3}{10,25}; \frac{1}{1 - 0,0031} \cdot \frac{10,5}{10,25}\right)$$

$$= Tr(0,988; 0,998; 1,008; 1,013).$$

Wyznaczamy ich miary energii i entropii:

$$d(D_1) = 0,0112,$$

$$d(D_2) = 0,0245,$$

$$e(D_1) = 0,1764,$$

$$e(D_2) = 0,2308.$$

Niech udział instrument A_i w portfelu π będzie równy p_i . Wtedy czynnik dyskontujący portfela $D^\pi \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, zgodnie z (3.18), może zostać obliczony jako

$$\begin{aligned} D^\pi &= \left(\frac{p_1}{1,005} + \frac{p_2}{1,003} \right)^{-1} \odot \\ &\left(\left(\frac{p_1}{1,005} \odot Tr(0,995; 1,001; 1,010; 1,011) \right) \oplus \left(\frac{p_2}{1,003} \odot Tr(0,988; 0,998; 1,008; 1,013) \right) \right) \\ &= \frac{1,003 \cdot p_1 \odot Tr(0,995; 1,001; 1,010; 1,011) \oplus 1,005 \cdot p_2 \odot Tr(0,988; 0,998; 1,008; 1,013)}{1,003 \cdot p_1 + 1,005 \cdot p_2} \\ &= \frac{p_1 \odot Tr(0,998; 1,004; 1,013; 1,014) \oplus p_2 \odot Tr(0,993; 1,003; 1,013; 1,018)}{1,003 \cdot p_1 + 1,005 \cdot p_2}. \end{aligned}$$

Jego miara energii przyjmuje postać

$$\begin{aligned} d(D^\pi) &= \left(\frac{p_1}{1,005} + \frac{p_2}{1,003} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{p_1}{1,005} \cdot 0,0112 + \frac{p_2}{1,003} \cdot 0,0246 \right) \\ &= \frac{0,0112 \cdot p_1 \cdot 1,003 + 0,0246 \cdot p_2 \cdot 1,005}{1,003 \cdot p_1 + 1,005 \cdot p_2} = \frac{0,0112 \cdot p_1 + 0,0247 \cdot p_2}{1,003 \cdot p_1 + 1,005 \cdot p_2}. \end{aligned}$$

Natomiast miara entropii

$$\begin{aligned} e(D^\pi) &= \left(\frac{p_1}{1,005} + \frac{p_2}{1,003} \right)^{-1} \cdot \left(\frac{p_1}{1,005} \cdot 0,1764 + \frac{p_2}{1,003} \cdot 0,2308 \right) \\ &= \frac{0,1764 \cdot p_1 \cdot 1,003 + 0,2308 \cdot p_2 \cdot 1,005}{1,003 \cdot p_1 + 1,005 \cdot p_2} = \frac{0,1769 \cdot p_1 + 0,2319 \cdot p_2}{1,003 \cdot p_1 + 1,005 \cdot p_2}. \end{aligned}$$

Zadanie portfelowe sprowadza się wtedy do

$$\frac{p_1 \odot Tr(0,998; 1,004; 1,013; 1,014) \oplus p_2 \odot Tr(0,993; 1,003; 1,013; 1,018)}{1,003 \cdot p_1 + 1,005 \cdot p_2} \rightarrow \min$$

$$\frac{0,0112 \cdot p_1 + 0,0247 \cdot p_1}{1,003 \cdot p_1 + 1,005 \cdot p_2} \leq d_1$$

$$\frac{0,1769 \cdot p_1 + 0,2319 \cdot p_1}{1,003 \cdot p_1 + 1,005 \cdot p_2} \leq d_2$$

$$\sum_{i=1}^n p_i^2 \cdot \sigma_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n p_i \cdot p_j \cdot cov_{i,j} \leq d_3$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1$$

$$p_1, p_2, \dots, p_n \geq 0$$

gdzie:

$p_1, p_2, \dots, p_n \in \mathbb{R}^+$ – udziały instrumentów w portfelu,

d_1 – zadany maksymalny poziom miary ryzyka wieloznaczności,

d_2 – zadany maksymalny poziom miary ryzyka nieostrości,

d_3 – zadany maksymalny poziom miary ryzyka niepewności.

□

5.2. Przypadek wartości bieżącej danej trapezoidalną dyskretną liczbą rozmytą

5.2.1. Stopa zwrotu z portfela wieloskładnikowego

Zastąpmy teraz wartości bieżące PV_i instrumentów $A_i, i = 1, 2, \dots, n$ portfela π trapezoidalnymi dyskretnymi liczbami rozmytymi z funkcjami przynależności $\mu_i: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$.

Wtedy wartość bieżąca portfela ma postać

$$PV = DTr(\check{C}_{min}; \check{C}_*; \check{C}^*; \check{C}_{max}) = DTr(\sum_{i=1}^n \check{C}_{min}^i; \sum_{i=1}^n \check{C}^{*i}; \sum_{i=1}^n \check{C}^i; \sum_{i=1}^n \check{C}_{max}^i), \quad (5.8)$$

z funkcją przynależności $\mu: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ daną wzorem (2.38) oraz nośnikiem

$$\mathbb{S}(PV) = \{0,01 \cdot i : 100 \cdot \check{C}_{min} < i < 100 \cdot \check{C}_{max}, i \in \mathbb{N}\} \subset Nod(PV). \quad (5.9)$$

Zakładamy, że dla każdego instrumentu A_i ($i = 1, 2, \dots, n$) znamy rozkład prawdopodobieństwa prostej stopy zwrotu $\tilde{r}_t^i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ wyznaczonej za pomocą (2.14) dla PV_i równej cenie rynkowej \check{C}_i . Podobnie jak wcześniej, n -wymiarowa zmienna losowa $(\tilde{r}_t^1; \tilde{r}_t^2; \dots; \tilde{r}_t^n)^T$ ma łączny rozkład normalny $N((\bar{r}_1; \bar{r}_2; \dots; \bar{r}_n)^T; \Sigma)$. Stopa zwrotu wyznaczona dla tak oszacowanej PV jest rozmytym zbiorem probabilistycznym reprezentowanym przez funkcję przynależności $\tilde{\rho} \in [0; 1]^{\mathbb{R} \times \Omega}$, $i = 1, 2, \dots, n$ daną wzorem (2.22).

Przykład 5.4

W programie Matlab przeprowadzono symulacje zachowania portfela w przypadku $n = 4$ instrumentów składowych, których wartości bieżące dane są przy pomocy trapezoidalnych dyskretnych liczb rozmytych

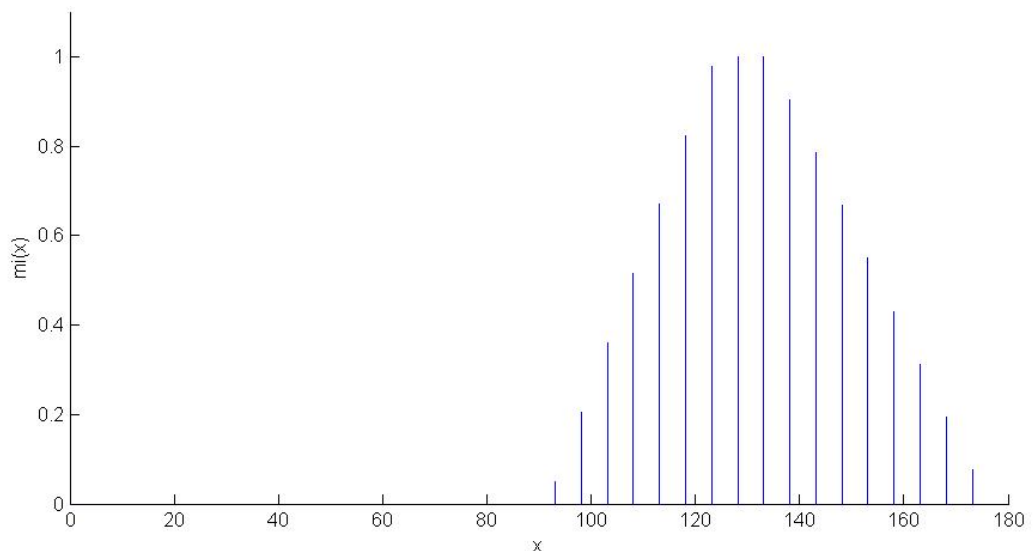
$$PV_1 = DTr(11,11; 19,57; 24,51; 43,89),$$

$$PV_2 = DTr(26,22; 46,28; 49,88; 59,49),$$

$$PV_3 = DTr(11,74; 14,84; 15,07; 22,17),$$

$$PV_4 = DTr(42,41; 43,13; 44,61; 50,78).$$

Wykres funkcji przynależności do wartości bieżącej portfela został przedstawiony na Rysunku 5.4.

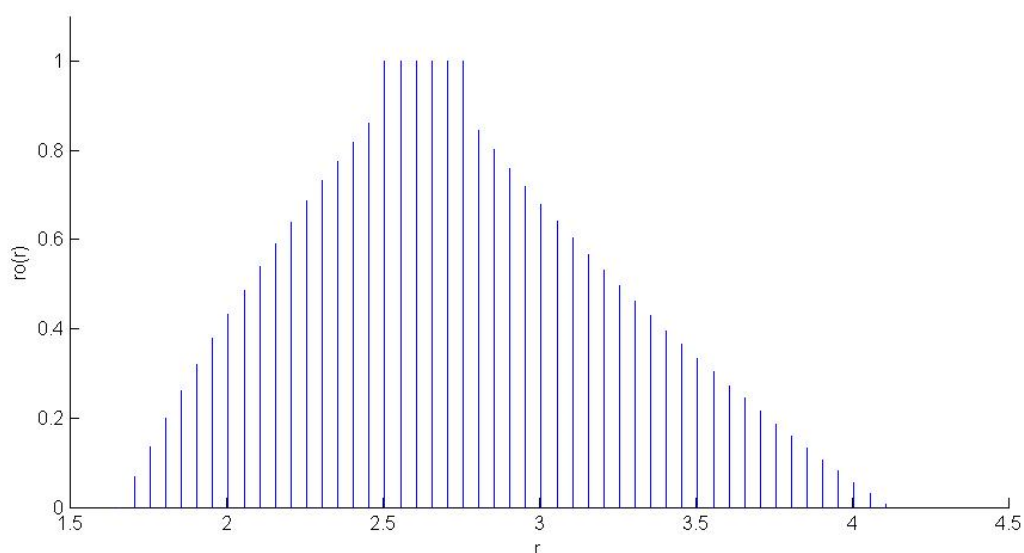


Rys. 5.4 Wykres funkcji przynależności PV portfela złożonego z instrumentów A_i

Proste stopy zwrotu z instrumentów składowych modelowane są 4-wymiarową zmienną losową $(\tilde{r}_t^1; \tilde{r}_t^2; \tilde{r}_t^3; \tilde{r}_t^4)$ o rozkładzie łącznym $N((0,8116; 0,5328; 0,3507; 0,9390)^T; \Sigma)$. Macierz kowariancji tej zmiennej ma postać

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0,8759 & 0,3945 & 0,8502 & 0,0173 \\ 0,3945 & 0,5502 & 0,9859 & 0,7350 \\ 0,8501 & 0,9859 & 0,6225 & 0,4919 \\ 0,0173 & 0,7350 & 0,4919 & 0,5870 \end{pmatrix}.$$

Dla podanych instrumentów i zbudowanego z nich portfela wyznaczamy oczekiwane stopy zwrotu. Są one dyskretnymi liczbami rozmytymi. Funkcja przynależności do oczekiwanej stopy zwrotu z portfela została przedstawiona na Rysunku 5.5.



Rys. 5.5 Wykres funkcji przynależności dla zwrotu z portfela

Miary energii, entropii i wariancji dla wyznaczonych oczekiwanych rozmytych stóp zwrotu z instrumentów oraz portfela zostały przedstawione w Tabeli 5.3.

Tabela 5.3 Miary energii, entropii i wariancji dla stóp zwrotu z portfela π oraz jego składników

Instrument	A_1	A_2	A_3	A_4	π
Energia	147,17	73,62	42,83	20,24	134,80
Entropia	0,2568	0,1519	0,0785	0,0252	0,2786
Wariancja	0,8759	0,5502	0,6225	0,5870	0,5750

Otrzymano następujące zależności:

$$\begin{aligned}
d(R^4) &< d(R^2) < d(R^3) < d(R^\pi) < d(R^1), \\
d(R^4) &< d(R^2) < d(R^3) < d(R^1) < d(R^\pi), \\
\sigma_2^2 &< \sigma^2 < \sigma_4^2 < \sigma_3^2 < \sigma_1^2.
\end{aligned}$$

Miara niepewności zachowała się w sposób przewidywany przez zasadę dywersyfikacji. Miara energii dla portfela jest wielkością pośrednią w stosunku do tej samej miary wyliczonej dla poszczególnych składników portfela. Miara entropii jest największa w przypadku portfela. \square

5.2.2. Czynniki dyskontujący z portfela wieloskładnikowego

Funkcja $\eta_i \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$ określona za pomocą tożsamości (2.38) jest funkcją przynależności czynnika dyskontującego $D_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ wyznaczonego za pomocą oczekiwanej stopy zwrotu $R_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ przy $PV_i = DTr(\check{C}_{min}^i; \check{C}^{*i}; \check{C}_*^i; \check{C}_{max}^i)$. Czynniki dyskontujący $D^\pi \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ dla portfela wyznaczonego za pomocą oczekiwanej stopy zwrotu $R \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ jest określony przez

$$D^\pi = \left(\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\bar{v}_i} \right)^{-1} \odot \left(\bigoplus_{i=1}^n \frac{p_i}{\bar{v}_i} \odot D_i \right), \quad (5.10)$$

z nośnikiem

$$\mathbb{S}(D^\pi) = \left\{ v: v = \frac{i}{100 \cdot \check{C} \cdot (1+\bar{r})}; 100 \cdot \check{C}_{min} < i < 100 \cdot \check{C}_{max}, i \in \mathbb{N} \right\} \subset Nod(D, \check{C}, \bar{v}) \quad (5.11)$$

Łatwo zauważyć, że zbiór wyznaczony powyżej jest również trapezoidalną dyskretną liczbą rozmytą. Ryzyko wieloznaczności obarczające oczekiwany czynnik dyskontujący portfela $D^\pi \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ oceniać będziemy za pomocą miary energii. Zgodnie z (2.38), (2.48) oraz (5.4), miara ta jest równa

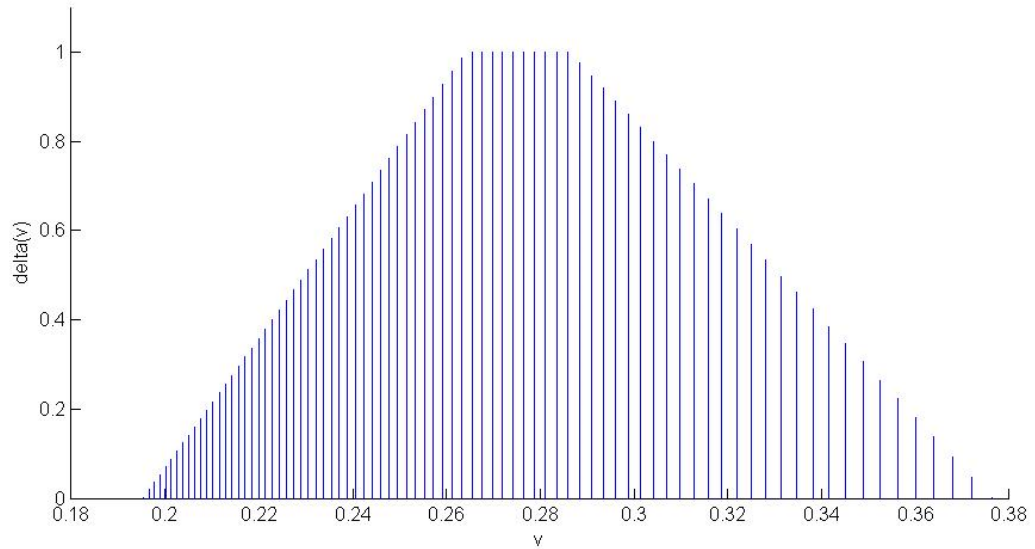
$$d(D^\pi) = \sum_{v \in \mathbb{S}(D^\pi)} \eta_{D^\pi}(v). \quad (5.12)$$

Ryzyko nieostrości czynnika dyskontującego oceniać będziemy za pomocą miary entropii

$$e(D^\pi) = \frac{\sum_{v \in \mathbb{S}(D^\pi)} \min\{\eta_{D^\pi}(v); 1 - \eta_{D^\pi}(v)\}}{\sum_{v \in \mathbb{S}(D^\pi)} \max\{\eta_{D^\pi}(v); 1 - \eta_{D^\pi}(v)\}}. \quad (5.13)$$

Przykład 5.5

Zbiór rozmyty odpowiadający oczekiwanemu czynnikowi dyskontującemu z portfela wprowadzonego w przykładzie 5.4 został przedstawiony na rysunku 5.6.



Rys. 5.6 Wykres funkcji przynależności dla oczekiwanego czynnika dyskontującego z portfela

Miary energii, entropii i wariancji dla wyznaczonych oczekiwanych rozmytych czynników dyskontujących z instrumentów oraz portfela zostały przedstawione w Tabeli 5.4.

Tabela 5.4 Miary energii, entropii dla czynników dyskontujących z portfela π oraz jego składników

Instrument	A_1	A_2	A_3	A_4	π
Energia	1886	1843,5	533	492,5	572,25
Entropia	0,2696	0,2869	0,3236	0,2591	0,3181

Tym samym, dla przypadku czynnika dyskontującego mamy

$$d(D_4) < d(D_3) < d(D^\pi) < d(D_2) < d(D_1),$$

$$e(D_4) < e(D_1) < e(D_2) < e(D^\pi) < e(D_3).$$

Z otrzymanych zależności widzimy, że miara energii dla portfela jest wartością pośrednią pomiędzy miarami energii dla instrumentów. Entropia dla przypadku pokazanego w przykładzie posiada podobną własność. Niestety, ze względu na własności miar energii i entropii dla przypadku dyskretnego, nie jest możliwe zbudowanie efektywnego zadania portfelowego.

□

5.3. Podsumowanie

W przypadku portfela wieloskładnikowego, z wartością bieżącą modelowaną trapezoidalną liczbą rozmytą, zarówno dla przypadku ciągłego jak i dyskretnego, otrzymaliśmy następujące wnioski:

- zgodnie z teorią portfelową, dywersyfikacja portfela zmniejsza ryzyko niepewności wyrażone wariancją,
- dla przypadku trapezoidalnych liczb rozmytych, energia i entropia stopy zwrotu z portfela nie musi być minimalizowana przez jego dywersyfikację, co pokazane jest w przykładach 5.1 oraz 5.3,
- w przypadku *PV* danej trapezoidalną liczbą rozmytą (ciągłą), ryzyko nieprecyzyjności wyrażone energią i entropią czynnika dyskontującego jest kombinacją liniową tej miary obliczonej dla składników portfela, tym samym dywersyfikacja portfelowa powoduje jego uśrednienie,
- możliwe jest sformułowanie zadania portfelowego polegającego na minimalizacji czynnika dyskontującego z portfela przy ustalonym poziomie ryzyka niepewności i nieprecyzyjności w przypadku ciągłym trapezoidalnej liczby rozmytej,
- konstrukcja efektywnego zadania portfelowego nie jest możliwa w przypadku dyskretnym, ze względu na postaci miary energii,
- z przytoczonych przykładów wynika, że dywersyfikacja portfela może zwiększyć ryzyko nieostrości wyrażone entropią czynnika dyskontującego.

6. Zebranie i podsumowanie badań

6.1 Wnioski ogólne

Celem nadrzędnym niniejszej rozprawy był opis zależności pomiędzy ryzykiem niepewności i nieprecyzyjności obarczającymi portfel i składające się na niego aktywa. Cel ten został osiągnięty poprzez wyprowadzenie miar energii i entropii oczekiwanych rozmytych stóp zwrotu a następnie oczekiwanych rozmytych czynników dyskontujących z portfela. Zależności pomiędzy wspomnianymi rodzajami ryzyka oraz konstrukcją portfela zostały zbadane dla portfeli o wartościach bieżących danych trójkątnymi i trapezoidalnymi liczbami rozmytymi, w przypadku ciągłym i dyskretnym.

Podczas przeprowadzonej analizy zostały osiągnięte następujące cele szczegółowe. W rozdziale 3 przeanalizowano zależności pomiędzy miarami energii i entropii oczekiwanych rozmytych stóp zwrotu z portfela dwuskładnikowego o PV danej trójkątną liczbą rozmytą. Ze względu na skomplikowaną postać tej miary dla przypadku stóp zwrotu, skupiono się na opisie czynnika dyskontującego, niosącego tę samą informację o ryzyku nieprecyzyjności. Dla zbudowanego portfela skonstruowano zadanie portfelowe, nieuwzględniające jednak ryzyka nieostrości, ze względu na fakt, że było ono wielkością stałą. W rozdziale 4 powtórzono rozumowanie z rozdziału 3 dla przypadku wieloskładnikowego, otrzymując podobne wnioski.

W rozdziale 5 uogólniono postać wartości bieżącej składników portfela wieloskładnikowego na przypadek trapezoidalnej liczby rozmytej. W tej sytuacji miara nieostrości czynnika dyskontującego nie była już wartością stałą, co pozwoliło na uwzględnienie jej w budowie zadania portfelowego dla przypadku ciągłego. Ponownie otrzymano również wniosek, że dywersyfikacja portfelowa nie zmniejsza ryzyka wieloznaczności.

Udowodniona została postawiona hipoteza, że tworzenie portfela aktywów finansowych nie zmniejsza ryzyka nieprecyzyjności. Wniosek ten jest szczególnie wyraźny w przytoczonych przykładach, gdzie widać, że pomimo minimalizowania wariancji poprzez tworzenie portfela, energia zarówno stopy zwrotu jak i czynnika dyskontującego z portfela nie jest wcale minimalizowana.

Hipoteza pomocnicza mówiąca, że podczas tworzenia portfela uwzględniającego nieprecyzyjność obniżenie ryzyka niepewności nie obniża ryzyka nieprecyzyjności została potwierdzona szczegółowo dla czynnika dyskontującego. Wykazano, że w przypadku ciągłym wartości bieżącej modelowanej trójkątną i trapezoidalną liczbą rozmytą, energia czynnika dyskontującego z portfela jest kombinacją liniową tej miary wyliczonej dla poszczególnych składników i jako taka nie jest minimalizowana poprzez konstrukcję portfela.

Druga hipoteza pomocnicza, mówiąca, że możliwe jest sformułowanie zadania portfelowego dla portfela uwzględniającego nieprecyzyjność została potwierdzona w przypadku ciągłym dla trójkątnej i trapezoidalnej liczby rozmytej. Zadania takie zostały sformułowane w rozdziałach 3, 4 oraz 5. Z drugiej strony, hipoteza nie została potwierdzona dla przypadku dyskretnego, ze względu na postaci miary energii i entropii czynnika dyskontującego.

Ponadto trzymano następujące wnioski szczegółowe:

- dywersyfikacja portfela może zmniejszyć ryzyko niepewności wyrażone wariancją,
- ryzyko wieloznaczności wyrażone energią czynnika dyskontującego w przypadku trójkątnej i trapezoidalnej liczby rozmytej jest kombinacją liniową tej wielkości wyliczonej dla składników portfela. Umożliwia to zbudowanie zadania portfelowego minimalizacji czynnika dyskontującego przy zadanym poziomie ryzyka niepewności i nieprecyzyjności,
- ryzyko nieostrości wyrażone energią czynnika dyskontującego nie jest zmniejszane poprzez dywersyfikację portfela. Co więcej, w wypadku *PV* danej trójkątną liczbą rozmytą jest ono niewrażliwe na konstrukcję portfela i przez to nieuwzględniane w zadaniu portfelowym,
- miary energii w przypadku wartości bieżącej danej dyskretną trójkątną i dyskretną trapezoidalną liczbą rozmytą nie pozwalają na stworzenie efektywnego zadania portfelowego.

Badania przeprowadzone w poprzednich rozdziałach wykazały, że niewłaściwym jest traktowanie ryzyka portfela jako własności jednorodnej. Celowym natomiast wydaje się jego rozważanie jego trojakiemu charakteru. Argumentem potwierdzającym tę sugestię są odmienne zachowania ryzyka niepewności, nieostrości i wieloznaczności na konstrukcję portfela, rozważone w pracy. Powodem nieusuwalności nawet części ryzyka nieostrości i wieloznaczności w portfelu wieloskładnikowym z badanymi wartościami bieżącymi jest

niezależność wyznaczania miar energii i entropii zwrotu z portfela od ilości instrumentów w portfelu. Z tego powodu, nawet przy przejściu do granicy, gdy $n \rightarrow \infty$ ryzyka nie ulegną zmniejszeniu.

Za **wkład własny** autorka uznaje:

- a) budowę modelu nieprecyzyjnej stopy zwrotu dla przypadku portfela dwu i wieloskładnikowego z nieprecyzyjną wartością bieżącą daną trójkątną liczbą rozmytą,
- b) budowę modelu nieprecyzyjnej stopy zwrotu dla przypadku portfela dwu i wieloskładnikowego z nieprecyzyjną wartością bieżącą daną trapezoidalną liczbą rozmytą,
- c) budowę modelu nieprecyzyjnej stopy zwrotu dla przypadku portfela dwu i wieloskładnikowego z nieprecyzyjną wartością bieżącą daną dyskretną liczbą rozmytą,
- d) budowę modelu oczekiwanego rozmytego czynnika dyskonta dla przypadku portfela dwu i wieloskładnikowego z nieprecyzyjną wartością bieżącą daną trójkątną liczbą rozmytą,
- e) budowę modelu oczekiwanego rozmytego czynnika dyskonta dla przypadku portfela dwu i wieloskładnikowego z nieprecyzyjną wartością bieżącą daną trapezoidalną liczbą rozmytą,
- f) budowę modelu oczekiwanego rozmytego czynnika dyskonta dla przypadku portfela dwu i wieloskładnikowego z nieprecyzyjną wartością bieżącą daną dyskretną liczbą rozmytą,
- g) stworzenie zadań minimalizacji oczekiwanego rozmytego czynnika dyskonta dla przypadków d) i e),
- h) zebranie, ujednolicenie, interpretacje oraz odniesienie do praktyki pojęć związanych z tematem pojawiających się w literaturze,
- i) określenie relacji pomiędzy budową portfela i postacią ryzyka niepewności, wieloznaczności oraz nieostrości dla każdego z rozważanych modeli.

6.2 Kierunki dalszych badań

Problem uwzględniania ryzyka nieprecyzyjności w wyznaczaniu zwrotów z instrumentów finansowych jest problemem otwartym i posiadającym szerokie zastosowanie w praktyce biznesowej. Modele uwzględniające nieprecyzyjność, biorące pod uwagę zarówno aspekty behawioralne podejmowanych przez inwestora decyzji jak i realizm czasu ich podejmowania oraz ograniczenia sprzętowe pozwalają na coraz bliższe modelowanie rzeczywistych sytuacji występujących na rynku. Tym samym coraz lepsze dopasowanie

modelu, jego realizm oraz możliwości łatwego zastosowania w praktyce otwierają drogę do dalszych badań w dziedzinie przedstawionej w omawianej pracy.

Jako jeden z możliwych kierunków dalszych badań może być rezygnacja z założenia o rozkładzie normalnym wartości przyszłej i stóp zwrotu. Konieczne może być również uwzględnienie kosztów transakcji, których wysokość wpływa zazwyczaj na wartość bieżącą instrumentów podawaną przez inwestora. Wartościową może być również próba powtórzenia rozumowania dla logarytmicznych stóp zwrotu z instrumentów.

Ponieważ rozbudowywana teoria stanowi uniwersalne narzędzie w obszarze obliczeń portfelowych, możliwe jest zastosowanie jej jako narzędzia dodatkowego w istniejących systemach wspomagania decyzji. Proponowane rozumowanie zawiera w sobie przypadek precyzyjny, nie odrzuca więc tym samym istniejących rozwiązań w dziedzinie teorii portfela. Jego celem jest wspomaganie inwestora w przypadku, kiedy pomimo stosowania racjonalnych przesłanek, podejmowane decyzje nie przynoszą satysfakcjonujących rezultatów lub w przypadku, gdy istniejące narzędzia nie podają jednoznacznej bądź zadowalającej rekomendacji.

Interesującą może być próba stworzenia systemu eksperckiego uwzględniającego nieprecyzyjność wyznaczania wartości bieżącej oraz związanych z nią zwrotów z portfela instrumentów finansowych. System taki, dostosowany do indywidualnych potrzeb inwestora (a tym samym uwzględniający aspekty behawioralne) oraz biorący pod uwagę opóźnienia decyzyjne czy szybkość przetwarzania informacji, byłby w stanie w bardziej dokładny sposób przełożyć doświadczenie oraz intencje inwestora na konkretne działania inwestycyjne.

6.3 Zakończenie

W pracy przeprowadzona została analiza skutków występowania nieprecyzyjności wyznaczania wartości bieżącej, powodującej powstawanie ryzyka nieprecyzyjności obarczającego decyzje inwestorskie. W wyniku badań oraz na podstawie przykładów teoretycznych i praktycznych możemy zauważyć, że zjawisko nieprecyzyjności ma realny wpływ na decyzje inwestorskie, które pomimo swojej subiektywności nie zaprzeczają założeniu o racjonalizmie inwestora.

Niezależnie od wariantu liczby rozmytej modelującej wartość bieżącą, niemożliwym jest minimalizowanie za pomocą dywersyfikacji portfelowej ryzyka nieprecyzyjności w postaci ryzyka wywołanego wieloznacznością i nieostrością informacji. Ryzyko to jest zjawiskiem osobnym względem ryzyka niepewności, które może być zmniejszone przy użyciu istniejących narzędzi zarządzania portfelem.

Wyniki pracy sugerują, że przeprowadzona analiza i stworzony aparat teoretyczny mogą być praktycznym narzędziem wsparcia decyzji inwestorskich, szczególnie w przypadku, kiedy istniejące narzędzia nie podają jednoznacznego rozwiązania lub też w sytuacjach szczególnie narażonych na istnienie nieprecyzyjności obarczającej wykorzystywane informacje. Przedstawiona teoria może być również krokiem do rozwinięcia szerszych i bardziej precyzyjnych narzędzi wsparcia decyzyjnego, otwiera też szerokie możliwości modyfikacji i dopasowania do indywidualnych potrzeb inwestora.

Bibliografia

- [1] Baerecke T., Bouchon-Meunier B., Detyniecki M., 2011, *Fuzzy present value*, Computational Intelligence for Financial Engineering and Economics, 2011 IEEE Symposium, Paris, pp. 1-6.
- [2] Biswas P., Pramanik S., 2011, *Fuzzy approach to replacement problem with value of money changes with time*, "International Journal of Computer Applications", vol. 30, No. 10.
- [3] Buckley I.J., 1987, *The fuzzy mathematics of finance*, Fuzzy Sets and Systems, vol. 21.
- [4] Calzi M.L., 1990, *Towards a general setting for the fuzzy mathematics of finance*, Fuzzy Sets and Systems, vol. 35.
- [5] Caplan B., 2001, *Probability, common sense, and realism: a reply to Hulsmann and Block*, The Quarterly Journal of Austrian Economics, vol. 4, No. 2.
- [6] Carlson C., Fuller R., 1998, *On fuzzy rate of return*, Turku Centre for Computer Science, TUCS Technical Raport No 211, ISBN 952-12-0310-3.
- [7] Casasnovas J., Torrens J., 2003, *An axiomatic approach to fuzzy cardinalities of finite fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems, vol. 133.
- [8] Czerwiński Z., 1960, *Enumerative induction and the theory of games*, Studia logica, vol. 10.
- [9] Czogała E. Gottwald S., Pedrycz W., 1982, *Contribution to application of energy measure of fuzzy sets*, Fuzzy Sets and Systems, vol. 8, North-Holland Publishing Company.
- [10] De Luca A., Termini S., 1972, *A definition of nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy set theory*, Information and control, vol. 20.
- [11] De Luca A., Termini S., 1979, *Energy and entropy measures of fuzzy sets*, Advances in Fuzzy Set Theory and Applications, North-Holland, Amsterdam.
- [12] Duan L., Stahler P., 2011, *A portfolio selection model using fuzzy returns*, "Fuzzy Optimisation & Decision Making, vol. 10.
- [13] Dubois D., Prade H., 1980, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Mathematics in Science and Engineering, vol. 144.
- [14] Dubois D., Prade H., 2012, *Gradualness, uncertainty and bipolarity: Making sense of fuzzy sets*, Fuzzy Sets and system", vol. 192.
- [15] Dumitrescu D., 1993, *Fuzzy measures and the entropy of fuzzy partitions*, Journal of mathematical analysis and applications, vol. 176.
- [16] Fang Y., Lai K.K., Wang S., 2008, *Portfolio Optimization. Theory and Methods*, Lectures in Economics and Mathematical Systems, vol. 609, Springer, Berlin – Heidelberg.
- [17] Greenhut J.G., Norman G., Temponi C., T, 1995, *Towards a fuzzy theory of oligopolistic competition*, IEEE Proceedings of ISUMA-NAFIPS, College Park, IEEE.
- [18] Guixiang Wang, Cheng Lin Wen, 2007, *A new fuzzy arithmetic for discrete fuzzy numbers*, Fourth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery.
- [19] Guo H., Sun B., Karimi H.R., Ge Y., Jin W., 2012, *Fuzzy investment portfolio selection models based on interval analysis approach*, Mathematical problems in engineering, vol. 2012.

- [20] Guo S., Yu L., Li X., Kar S., 2016, *Fuzzy multi-period portfolio selection with different investments horizons*, European Journal of Operational Research, vol. 254.
- [21] Gupta P., Mehlawat M.L., Inuguchi M., Chandra S., 2014, *Fuzzy Portfolio Optimization*, Advances in Hybrid Multi-Criteria Methodologies. Studies in Fuzziness and Soft Computing, Springer, Berlin – Heidelberg.
- [22] Gupta P., Mittal G., Mehlawat M.K., 2013, *Multiobjective expected value model for portfolio selection in fuzzy environment*, Optim Lett, vol. 7.
- [23] Gupta P., Mittal G., Saxena A., 2008, *Asset portfolio optimization using fuzzy mathematical programming*, Information Sciences, vol. 178.
- [24] Gutierrez I., 1989, *Fuzzy numbers and Net Present Value*, Scandinavian Journal of Management, vol. 5(2).
- [25] Haifeng G., Bai Qing S., Hamid R. K., Yuanjing Ge, Weiquan J., 2012, *Fuzzy Investment Portfolio Selection Models Based on Interval Analysis Approach*, Mathematical Problems in Engineering, vol. 2012, DOI: 10.1155/2012/628295
- [26] Hao F.F. , Liu Y. K., 2008, *Portfolio Selection Problem in Fuzzy Random Decision Systems*, 3rd International Conference on Innovative Computing Information and Control, Dalian, Liaoning, pp. 271-271, doi: 10.1109/ICICIC.2008.423
- [27] Hasuike T., Katagiri H., Ishii H., 2007, *Portfolio selection problems with random fuzzy variable returns*, 2007 IEEE International Fuzzy Systems Conference, London, pp. 1-6, doi: 10.1109/FUZZY.2007.4295402
- [28] Hiroto K., 1981, *Concepts of probabilistic sets*, Fuzzy Sets and Systems, vol. 5.
- [29] Holcapek M., 2010, *An axiomatic approach to fuzzy measures like set cardinality for finite fuzzy sets*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, IPMU 2010, Part I, CCIS 80.
- [30] Huang X. and Shen W., 2010, *Multi-period mean-variance model with transaction cost for fuzzy portfolio selection*, Seventh International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, Yantai, Shandong, pp. 894-898, doi: 10.1109/FSKD.2010.5569108.
- [31] Huang X., 2007, *Risk curve and fuzzy portfolio selection*, Int. J. Production Economics, vol. 106.
- [32] Huang X., 2007 a, *Two new models for portfolio selection with stochastic returns taking fuzzy information*, European Journal of Operational Research, vol. 180(1).
- [33] Huang X., 2007 b, *Portfolio selection with fuzzy returns*, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, vol. 18.
- [34] Huang X., 2012, *Optimal project selection with random fuzzy parameters*, Computers and mathematics with Applications, vol. 55.
- [35] Jin Peng, Mok H. M. K., Wai-Man Tse, 2005, *Credibility programming approach to fuzzy portfolio selection problems*, International Conference on Machine Learning and Cybernetics, Guangzhou, China, vol. 4, pp. 2523-2528, doi: 10.1109/ICMLC.2005.1527368.
- [36] Junyang Zhao, Zhili Zhang, Chongzhao Han, Zhaofa Zhou, 2015, *Complement information entropy for uncertainty measure in fuzzy rough set and its applications*, Soft Computing, vol. 19.
- [37] Kahraman C., Ruan D., Tolga E., 2002, *Capital budgeting techniques using discounted fuzzy versus probabilistic cash flows*, Information Sciences, vol. 142.

- [38] Klement E.P., 1980, *Characterization of finite fuzzy measures using Markoff-kernels*, Journal Of Mathematical Analysis and Applications, vol. 75.
- [39] Klir G.J., 1993, *Developments In Uncertainty-based Information*, In: Yovits M. (ed.), *Advances in Computers*, vol. 36, Academic Press, San Diego.
- [40] Knight F.H., 1921, *Risk, uncertainty and profit*, "Reprints of economic classics", New York.
- [41] Kosko B., 1990, *Fuzziness vs. probability*, Int. J. General Systems, vol. 17., Gordon and Breach Science Publishers S.A., United Kingdom.
- [42] Krzyśko M., 2000, *Wykłady z teorii prawdopodobieństwa*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne.
- [43] Kuchta D. 2000, *Fuzzy capital budgeting*, Fuzzy Sets and Systems, vol. 111.
- [44] Kuchta D., 2011, *Project scheduling to maximize fuzzy net present value*, Proceedings of the World Congress on engineering, vol. II, WCE 2011, July 6-8, 2011, London, U.K.
- [45] Kuchta D., 2012, *Application of fuzzy numbers to the estimation of an ongoing project's completion time*, Operations Research and Decisions, No. 4, DOI: 10.5277/ordl20405.
- [46] Lesage C., 2001, *Discounted cash-flows analysis. An interactive fuzzy arithmetic approach*. European Journal of Economic and Social Systems, vol. 15(2).
- [47] Li J., Xu J., 2013, *Multi-objective portfolio selection model with fuzzy random returns and a compromise approach-based genetic algorithm*, "Information Sciences", vol. 220.
- [48] Li X., Qin Z., Kar S., 2010, *Mean-Variance-Skewness model for portfolio selections with fuzzy returns*, European Journal of Operational Research, vol. 202, iss. 1.
- [49] Lin P., Watada J., Wu B., 2012, *Portfolio selection model with interval values based on fuzzy probability distribution functions*, International Journal of Innovative Computing Information and Control, vol. 8, No. 8.
- [50] Liu Y. c. and Sun L., *Comparative Research of Portfolio Model Using Fuzzy Theory*, Fourth International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery, Haikou, pp. 106-110, doi: 10.1109/FSKD.2007.223
- [51] Liu Y-J., Zhang W-G., *Fuzzy portfolio optimization model under real constraints*. Insurance: Mathematics and Economics, vol. 53.
- [52] Markowitz H.S.M., 1952, *Portfolio selection*, Journal of Finance, vol. 7, No. 1.
- [53] Mehlawat M.K., 2016, *Credibilistic mean-entropy models for multi-period portfolio selection with multi choice aspiration levels*, Information Sciences, vol. 345.
- [54] Murali V., 2006, *Combinatorics of counting finite fuzzy subsets*, Fuzzy Sets and Systems, vol. 157.
- [55] Nosrtpour M., Nazeri A., Meftahi H., 2012, *Fuzzy net present value for engineering analysis*, Management Science Letters, vol. 2.
- [56] Phani Bushan Rao P., Ravi Shnkar N., 2011, *Ranking fuzzy numbers with a distance method using circumcenter of centroids and index of modality*, Hindawi Publishing Corporation, Advances in Fuzzy Systems, vol. 2011.
- [57] Piasecki K., 2011 a, *Behavioral Present Value*, SSRN Electronic Journal, vol. 01/2011; DOI: 10.2139/ssrn.1729351.
- [58] Piasecki K., 2011 b, *Effectiveness of securities with fuzzy probabilistic return*, Operations Research and Decisions, No. 21(2).

- [59] Piasecki K., 2011 c, *Rozmyte zbiory probabilistyczne, jako narzędzie finansów behawioralnych*, Wyd. UE, Poznań, DOI: 10.13140/2.1.2506.6567.
- [60] Piasecki K., 2014 *On imprecise investment recommendations*, Studies in Logic, Grammar and Rhetoric, No. 37(50). DOI: 10.2478/slrg-2014-0024.
- [61] Piasecki, K., 2016, *Intuicyjne zbiory rozmyte jako narzędzie finansów behawioralnych*, edu-Libri, Kraków, Legionowo.
- [62] Piasecki, K., Siwek, J., 2015, *Behavioural Present Value defined as fuzzy number - a new approach*, Folia Oeconomica Stetinensia, vol. 15(2), s. 27-41.
- [63] Piasecki, K., Siwek, J., 2017, *Portfel dwuskładnikowy z trójkątnymi rozmytymi wartościami bieżącymi – podejście alternatywne*, Przegląd Statystyczny, R. LXIV, ZESZYT 1 – 2017.
- [64] Quin Z., Wen M., Gu C., 2011, *Mean-absolute deviation portfolio selection model with fuzzy returns*, Iranian Journal of Fuzzy Systems, vol. 8, No. 4.
- [65] Saborido R., Ruiz A.B., Bermudez J.D., Vercher E., Luque M., 2016, *Evolutionary multi-objective optimization algorithms for fuzzy portfolio selection*, Applied Soft Computing, vol. 39.
- [66] Sadowski W., 1980, *Forecasting and decision making*, Quantitative Wirtschafts- und Unternehmensforschung, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [67] Sheen J. N., 2004, *Fuzzy economical analysis of cogeneration project*, TENCON 2004. 2004 IEEE Region 10 Conference, vol. 3, pp. 311-314, doi: 10.1109/TENCON.2004.1414769.
- [68] Siwek J., 2015, *Portfel dwuskładnikowy – studium przypadku dla wartości bieżącej danej jako trójkątna liczba rozmyta*, Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Nr 241, st. 140-150.
- [69] Tanaka H., Guo P., Turksen B., 2000, *Portfolio selection based on fuzzy probabilities and possibility distributions*, Fuzzy sets and systems, vol. 111.
- [70] Tsao C., 2012, *Fuzzy net present values for capital investment In an uncertain environment*, Computers & Operations Research, vol. 39.
- [71] Tsao C.-T., 2005, *Assessing the probabilistic fuzzy Net Present Value for a capital, Investment choice using fuzzy arithmetic*, Journal of China Institute of Industrial Engineers, vol. 22(2).
- [72] Tsaur R., 2013, *Fuzzy portfolio model with different investor risk attitudes*, European Journal of Operational Research, vol. 227.
- [73] van Lambalgen M., 1996, *Randomness and foundations of probability: von Mises' axiomatisation of random sequences*, Probability, statistics and game theory, papers in honor of David Blackwell, Institute for Mathematical Statistics.
- [74] Vicente Riera J., Torrens J., 2014, *Aggregation functions on the set of discrete fuzzy numbers defined from a pair of discrete aggregations*, Fuzzy Sets and Systems, vol. 241.
- [75] Vicente Riera J., Torrens J., 2015, *Using discrete fuzzy numbers in the aggregation of incomplete qualitative information*, Fuzzy Sets and Systems, vol. 264.
- [76] von Mises R., 1957, *Probability, statistics and truth*, The Macmillan Company, New York.
- [77] Voxman W., 2001, *Canonical representation of discrete fuzzy numbers*, Fuzzy Sets and Systems, vol. 118.

- [78] Wang G., Qing Zhang and Xianjun Cui, 2008, *The discrete fuzzy numbers on a fixed set with finite support set*, IEEE Conference on Cybernetics and Intelligent Systems, Chengdu, pp. 812-817. doi: 10.1109/ICCIS.2008.4670792
- [79] Wang S., Zhu S., 2002, *On fuzzy portfolio selection problems*, Fuzzy Optimization and Decision Making, vol. 1.
- [80] Ward T.L., 1985, *Discounted fuzzy cash flow analysis*, 1985 Fall Industrial Engineering Conference Proceedings, Berkeley.
- [81] Wenyi Zeng, Qilei Feng, Hong Xing Li, 2006, *Relationship between inclusion measure and entropy of fuzzy sets*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, RSKT 2006, LNAI 4062.
- [82] Wu X-L., Liu Y-K., 2012, *Optimizing fuzzy portfolio selection problems by parametric quadratic programming*, Fuzzy Optimization & Decision Making, vol. 11.
- [83] Yan L., 2009, *Optimal portfolio selection models with uncertain returns*, Modern applied science, vol. 3, No. 8.
- [84] Zadeh L.A., 1965, *Fuzzy sets*, Information and control, vol. 8.
- [85] Zhang X., Zhang W., Xiao W., 2013, *Multi period portfolio optimization under possibility measures*, Economic Modelling, Vol. 35.
- [86] Zhang Y., Li X., H. S. Wong, L. Tan, 2009, *Fuzzy multi-objective portfolio selection model with transaction costs*, IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Jeju Island, pp. 273-278. doi: 10.1109/FUZZY.2009.5277135
- [87] Zhou R., Cai R., Tong G., 2013, *Applications of entropy in finance: A review*, Entropy, vol. 15, DOI:10.3390/e15114909.
- [88] Zimmermann H.J., 1990, *Fuzzy Set Theory and Its Applications, Second, Revised Edition*, Springer Science+Business Media, LLC, New York, ISBN 978-94-015-7951
- [89] Żmigrodzki Piotr, 2017, *Wielki Słownik Języka Polskiego* [online]. Dostęp: http://www.wsjp.pl/index.php?id_hasla=39669&ind=0&w_szukaj=ryzyko [29.01.2017]

Spis rysunków i tabel

Rys. 1.1 Wykres funkcji przynależności przykładowej trójkątnej liczby rozmytej $T(80; 100; 150)$	16
Rys. 1.2 Wykres funkcji przynależności przykładowych trójkątnych liczb rozmytych $T(80; 100; 150)$ i $T(70; 77; 90)$, ich sumy oraz mnożenia przez skalar równy 2.....	17
Rys. 1.3 Wykres funkcji przynależności przykładowej trapezoidalnej liczby rozmytej $Tr(90; 100; 115; 120)$	18
Rys. 1.4 Wykres funkcji przynależności przykładowych trapezoidalnych liczb rozmytych $Tr(90; 100; 115; 120)$ i $Tr(70; 80; 90; 100)$, ich sumy oraz mnożenia przez skalar 1,5.....	19
Rys. 1.5 Wykres funkcji przynależności przykładowej trapezoidalnej dyskretnej liczby rozmytej $DTr(25; 30; 32; 40)$	20
Rys. 1.6 Wykres funkcji przynależności przykładowych trapezoidalnych dyskretnych liczb rozmytych $DTr(25; 30; 32; 40)$ i $DTr(40; 47; 57; 59)$, ich sumy oraz mnożenia przez skalar równy 0,8.....	21
Rys. 1.7 Wykres funkcji przynależności trójkątnej dyskretnej liczby rozmytej $DT(20; 22; 50)$	22
Rys. 1.8 Część wspólna liczb rozmytych $T(80; 100; 150)$ oraz $[T(80; 100; 150)]^c$	25
Rys. 1.9 Suma liczb rozmytych $T(80; 100; 150)$ oraz $[T(80; 100; 150)]^c$	25
Rys. 1.10 Część wspólna liczb rozmytych $Tr(90; 100; 115; 120)$ oraz $[Tr(90; 100; 115; 120)]^c$	26
Rys. 1.11 Suma liczb rozmytych $Tr(90; 100; 115; 120)$ oraz $[Tr(90; 100; 115; 120)]^c$	26
Rys. 2.1 Wykres funkcji przynależności wartości bieżącej określonej za pomocą trójkątnej liczby rozmytej $T(80; 100; 150)$	34
Rys. 2.2 Wykres funkcji przynależności wartości bieżącej określonej za pomocą trapezoidalnej liczby rozmytej $Tr(90; 100; 115; 120)$	34
Rys. 2.3 Wykres funkcji przynależności wartości bieżącej określonej za pomocą trapezoidalnej dyskretnej liczby rozmytej $DTr(25; 30; 32; 40)$	35
Rys. 2.4 Wykres funkcji przynależności wartości bieżącej określonej za pomocą trójkątnej dyskretnej liczby rozmytej $DT(20; 22; 50)$	36
Rys. 2.5 Wykres funkcji przynależności oczekiwanej stopy zwrotu z instrumentu finansowego o $PV_1 =$ $T(80; 100; 150)$ przy założeniu, że prosta stopa zwrotu (2.14) ma rozkład $N(0,25; 0,02)$	41
Rys. 2.6 Wykres funkcji przynależności oczekiwanej stopy zwrotu z instrumentu o $PV_2 = Tr(90; 100; 115; 120)$ i cenie rynkowej $\check{C} = 107,5$, przy założeniu, że prosta stopa zwrotu (2.14) ma rozkład $N(0,25; 0,02)$	42
Rys. 2.7 Wykres funkcji przynależności oczekiwanej stopy zwrotu z instrumentu o $PV_3 = DTr(25; 30; 32; 40)$ i cenie rynkowej $\check{C} = 31$, przy założeniu, że prosta stopa zwrotu (2.14) ma rozkład $N(0,2; 0,6)$	44
Rys. 2.8 Wykres funkcji przynależności oczekiwanej stopy zwrotu z instrumentu o $PV_4 = DT(20; 22; 50)$, przy założeniu, że prosta stopa zwrotu (2.14) ma rozkład $N(0,2; 0,6)$	45
Rys. 2.9 Wykres funkcji przynależności oczekiwanego czynnika dyskontującego dla instrumentu finansowego o $PV_1 = T(80; 100; 150)$ przy założeniu, że prosta stopa zwrotu (2.14) ma rozkład $N(0,25; 0,02)$...	51

Rys. 2.10 Wykres funkcji przynależności czynnika dyskontującego z instrumentu o $PV_2 = Tr(90; 100; 115; 120)$ przy założeniu, że prosta stopa zwrotu (2.14) ma rozkład $N(0,25; 0,02)$	52
Rys. 2.11 Wykres funkcji przynależności czynnika dyskontującego z instrumentu o $PV_3 = DTr(25; 30; 35; 40)$, przy założeniu, że prosta stopa zwrotu (2.14) ma rozkład $N(0,2; 0,6)$	54
Rys. 2.12 Wykres funkcji przynależności oczekiwanego czynnika dyskontującego z instrumentu o $PV_4 = DT(20; 22; 50)$, przy założeniu, że prosta stopa zwrotu (2.14) ma rozkład $N(0,2; 0,6)$	54
Rys. 3.1 Wykres funkcji przynależności dla proponowanych wartości bieżących instrumentów A_1 i A_2	61
Rys. 3.2 Wykres funkcji przynależności PV portfela złożonego z instrumentów A_1 i A_2	62
Rys. 3.3 Wykres funkcji przynależności dla oczekiwanych zwrotów z instrumentów A_1 i A_2	63
Rys. 3.4 Wykres funkcji przynależności dla zwrotu z portfela.....	63
Rys. 3.5 Wykres funkcji przynależności dla oczekiwanych czynników dyskontujących instrumentów.....	66
Rys. 3.6 Wykres funkcji przynależności dla oczekiwanego czynnika dyskontującego z portfela.....	66
Rys. 4.1 Wykres funkcji przynależności PV portfela złożonego z instrumentów A_1 i A_2	75
Rys. 4.2 Wykres funkcji przynależności dla zwrotu z portfela.....	76
Rys. 4.3 Wykres funkcji przynależności dla oczekiwanego czynnika dyskontującego z portfela.....	78
Rys. 4.4 Wykres funkcji przynależności PV portfela złożonego z instrumentów A_1 i A_2	84
Rys. 4.5 Wykres funkcji przynależności dla zwrotu z portfela.....	85
Rys. 4.6 Wykres funkcji przynależności dla oczekiwanego czynnika dyskontującego z portfela.....	87
Rys. 5.1 Wykres funkcji przynależności PV portfela złożonego z instrumentów A_i	91
Rys. 5.2 Wykres funkcji przynależności dla zwrotu z portfela.....	91
Rys. 5.3 Wykres funkcji przynależności dla oczekiwanego czynnika dyskontującego z portfela.....	93
Rys. 5.4 Wykres funkcji przynależności PV portfela złożonego z instrumentów A_i	98
Rys. 5.5 Wykres funkcji przynależności dla zwrotu z portfela.....	99
Rys. 5.6 Wykres funkcji przynależności dla oczekiwanego czynnika dyskontującego z portfela.....	101
Tabela 4.1 Miary energii, entropii i wariancji dla oczekiwanych stóp zwrotu z portfela π oraz jego składników	76
Tabela 4.2 Miary energii, entropii dla czynników dyskontujących z portfela π oraz jego składników.....	78
Tabela 4.3 Miary energii, entropii i wariancji dla oczekiwanych stóp zwrotu z portfela π oraz jego składników	85
Tabela 4.4 Miary energii, entropii dla czynników dyskontujących z portfela π oraz jego składników	87
Tabela 5.1 Miary energii, entropii i wariancji dla oczekiwanych stóp zwrotu z portfela π oraz jego składników	92
Tabela 5.2 Miary energii, entropii dla czynników dyskontujących z portfela π oraz jego składników.....	93
Tabela 5.3 Miary energii, entropii i wariancji dla oczekiwanych stóp zwrotu z portfela π oraz jego składników	99
Tabela 5.4 Miary energii, entropii dla czynników dyskontujących z portfela π oraz jego składników	101

Spis znaków i symboli

\mathbb{R} - zbiór liczb rzeczywistych,

$\mathcal{F}(\mathbb{R})$ – rodzina wszystkich podzbiorów rozmytych na prostej rzeczywistej \mathbb{R} ,

$L \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ – dowolny zbiór rozmyty,

$\mu_L \in [0; 1]^{\mathbb{R}}$ – funkcja przynależności do zbioru rozmytego L ,

$\mathbb{S}(L)$ – nośnik zbioru rozmytego L ,

\oplus – operator sumy dla liczb rozmytych,

$\bigoplus_{i=1}^n L_i$ – operator sumy wielokrotnej dla liczb rozmytych,
 $i = 1$

\otimes – iloczyn skalarny dla liczby rozmytej,

L^c – dopełnienie zbioru L ,

φ_A – predyktor zbioru A ,

\mathbb{P} – przestrzeń wszystkich zdań,

\mathbb{P}_0 – przestrzeń wszystkich zdań logicznych,

\mathbb{P}_1 – przestrzeń wszystkich wyrażeń,

\mathcal{P} – zdanie logiczne,

v – funkcja ewaluacji logicznej,

$\tilde{v}(\mathcal{P})$ – wartość logiczna zdania \mathcal{P} ,

\mathbf{T} – wartość logiczna „prawda”,

\mathbf{F} – wartość logiczna „fałsz”,

\tilde{H} – zbiór Hirota,

$Nod(L)$ – siatka dyskretyzacyjna,

$m(L)$ – miara energii wg definicji Khaliliego,

$e(L)$ – miara energii wg definicji Kosko,

$T(a; b; c)$ – trójkątna liczba rozmyta o parametrach a, b, c ,

$DT(a; b; c)$ – dyskretna trójkątna liczba rozmyta o parametrach a, b, c ,

$Tr(a; b; c; d)$ – trapezoidalna liczba rozmyta o parametrach a, b, c, d ,

$DTr(a; b; c; d)$ – dyskretna trapezoidalna liczba rozmyta o parametrach a, b, c, d ,

r_t – prosta stopa zwrotu wyznaczona na moment t ,

\tilde{r}_t – zmienna losowa odpowiadająca prostej stopie zwrotu,

\bar{r} – średnia wartość prostej stopy zwrotu,

V_0 – wartość początkowa instrumentu,
 V_t – wartość instrumentu w momencie t ,
 \tilde{V}_t – zmienna losowa odpowiadająca wartości przyszłej instrumentu,
 Ω – zbiór zdarzeń elementarnych,
 ω – zdarzenie elementarne,
 σ – odchylenie standardowe prostej stopy zwrotu,
 C_0 – cena początkowa instrumentu,
 \check{C} – cena rynkowa instrumentu,
 \check{C}_{min} – maksymalne dolne oszacowanie ceny rynkowej,
 \check{C}^* – minimalne górne oszacowanie cen zauważalnie mniejszych od obserwowanej ceny rynkowej \check{C} ,
 \check{C}_* – maksymalne dolne oszacowanie cen zauważalnie większych od obserwowanej ceny rynkowej \check{C} ,
 \check{C}_{max} – minimalne górne oszacowanie ceny rynkowej,
 π – portfel,
 $\tilde{\rho}(r; \omega)$ – przynależność zwrotu z instrumentu do zbioru rozmytego,
 $\rho(r)$ – przynależność oczekiwanego zwrotu z instrumentu do zbioru rozmytego,
 v_t – oczekiwany czynnik dyskontujący wyznaczony na moment t ,
 \bar{v} – średni czynnik dyskontujący,
 \bar{v}_{min} – maksymalne dolne oszacowanie czynnika dyskontującego,
 \bar{v}^* – minimalne górne oszacowanie czynników dyskontujących zauważalnie mniejszych od \bar{v} ,
 \bar{v}_* – maksymalne dolne oszacowanie czynników dyskontujących zauważalnie większych od \bar{v} ,
 \bar{v}_{max} – minimalne górne oszacowanie czynnika dyskontującego,
 $\eta(v)$ – funkcja przynależności oczekiwanego czynnika dyskontującego do zbioru rozmytego,
 R_i – zbiór rozmyty odpowiadający oczekiwanemu zwrotowi z instrumentu
 R – zbiór rozmyty odpowiadający oczekiwanemu zwrotowi z portfela,
 D – zbiór rozmyty odpowiadający oczekiwanemu czynnikowi dyskontującemu z portfela,
 $d(D)$ – miara energii oczekiwanego czynnika dyskontującego,
 $e(D)$ – miara entropii oczekiwanego czynnika dyskontującego,
 Σ – macierz kowariancji,
 p_i – udział i -tego instrumentu w portfelu,
 PV – wartość bieżąca,
 FV – wartość przyszła.

DODATEK A

Wyrowadzenie 1

Wyrowadzimy teraz wzór (2.25). Energia dla zwrotu R_1 z instrumentu o

$PV_1 = T(\check{C}_{min}, \check{C}, \check{C}_{max})$ danej trójkątną liczbą rozmytą z funkcją przynależności

$$\rho_{R_1}(r) = \begin{cases} \frac{\check{C} \cdot \frac{1+\bar{r}}{1+r} - \check{C}_{min}}{\check{C} - \check{C}_{min}} & \text{dla } \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} \leq \frac{1+\bar{r}}{1+r} < 1, \\ 1 & \text{dla } \frac{1+\bar{r}}{1+r} = 1, \\ \frac{\check{C} \cdot \frac{1+\bar{r}}{1+r} - \check{C}_{max}}{\check{C} - \check{C}_{max}} & \text{dla } 1 < \frac{1+\bar{r}}{1+r} \leq \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}}, \\ 0 & \text{dla } \frac{1+\bar{r}}{1+r} < \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}}, \quad \frac{1+\bar{r}}{1+r} > \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}}. \end{cases}$$

Mamy:

$$\begin{aligned} d(R_1) &= \int_{r \in \mathbb{S}(R)} \rho(r) dr = \int_{\frac{\check{C} \cdot (1+\bar{r})}{\check{C}_{max}} - 1}^{\bar{r}} \frac{(1+\bar{r})\check{C} - \check{C}_{max}}{\check{C} - \check{C}_{max}} dr + \int_{\bar{r}}^{\frac{\check{C} \cdot (1+\bar{r})}{\check{C}_{min}} - 1} \frac{(1+\bar{r})\check{C} - \check{C}_{min}}{\check{C} - \check{C}_{min}} dr \\ &= \frac{(1+\bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} - \check{C}_{max}} \cdot \int_{\frac{\check{C} \cdot (1+\bar{r})}{\check{C}_{max}} - 1}^{\bar{r}} \frac{1}{1+r} dr - \frac{\check{C}_{max}}{\check{C} - \check{C}_{max}} \int_{\frac{\check{C} \cdot (1+\bar{r})}{\check{C}_{max}} - 1}^{\bar{r}} dr \\ &\quad + \frac{(1+\bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} - \check{C}_{min}} \int_{\bar{r}}^{\frac{\check{C} \cdot (1+\bar{r})}{\check{C}_{min}} - 1} \frac{1}{1+r} dr - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C} - \check{C}_{min}} \int_{\bar{r}}^{\frac{\check{C} \cdot (1+\bar{r})}{\check{C}_{min}} - 1} dr \\ &= \frac{(1+\bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} - \check{C}_{max}} \cdot \left(\ln(1+\bar{r}) - \ln \frac{(1+\bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C}_{max}} \right) - \frac{\check{C}_{max}}{\check{C} - \check{C}_{max}} \cdot \left(1+\bar{r} - \frac{(1+\bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C}_{max}} \right) \\ &\quad + \frac{(1+\bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} - \check{C}_{min}} \cdot \left(\ln \frac{\check{C} \cdot (1+\bar{r})}{\check{C}_{min}} - \ln(1+\bar{r}) \right) - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C} - \check{C}_{min}} \cdot \left(\frac{(1+\bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C}_{min}} - \bar{r} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{(1 + \bar{r})\check{C}}{\check{C} - \check{C}_{max}} \ln \frac{\check{C}_{max}}{\check{c}} + \frac{(1 + \bar{r})\check{C}}{\check{C} - \check{C}_{min}} \ln \frac{\check{c}}{\check{C}_{min}}$$

Zatem

$$d(R_1) = \frac{(1 + \bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} - \check{C}_{max}} \ln \frac{\check{C}_{max}}{\check{c}} + \frac{(1 + \bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} - \check{C}_{min}} \ln \frac{\check{c}}{\check{C}_{min}}$$

Wyprowadzenie 2

Wyprowadzimy teraz wzór (2.29). Entropia dla zwrotu R_1 z instrumentu o

$PV_1 = T(\check{C}_{min}, \check{C}, \check{C}_{max})$ danej trójkątną liczbą rozmytą. Zgodnie ze wzorem (2.28), licznik jest równy

$$\begin{aligned} & \int_{x \in \mathbb{S}(R_1)} \min\{\rho_{R_1}(x), 1 - \rho_{R_1}(x)\} dx = \\ &= \int_{\frac{\check{c} \cdot (1 + \bar{r}) - 1}{\check{C}_{max}}}^{\frac{2 \cdot (1 + \bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} + \check{C}_{max}} - 1} \frac{(1 + \bar{r}) \cdot \check{C} - \check{C}_{max}}{1 + r} dr + \int_{\frac{2 \cdot (1 + \bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} + \check{C}_{max}} - 1}^{\bar{r}} \left(1 - \frac{(1 + \bar{r}) \cdot \check{C} - \check{C}_{max}}{\check{C} - \check{C}_{max}} \right) dr \\ &+ \int_{\bar{r}}^{\frac{2 \cdot (1 + \bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} + \check{C}_{min}} - 1} \left(1 - \frac{(1 + \bar{r}) \cdot \check{C} - \check{C}_{min}}{\check{C} - \check{C}_{min}} \right) dr + \int_{\frac{2 \cdot (1 + \bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} + \check{C}_{min}} - 1}^{\frac{\check{C} \cdot (1 + \bar{r}) - 1}{\check{C}_{min}}} \frac{(1 + \bar{r}) \cdot \check{C} - \check{C}_{min}}{1 + r} dr \\ &= \frac{\check{C} \cdot (1 + \bar{r})}{\check{C} - \check{C}_{max}} \int_{\frac{\check{c} \cdot (1 + \bar{r}) - 1}{\check{C}_{max}}}^{\frac{2 \cdot (1 + \bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} + \check{C}_{max}} - 1} \frac{1}{1 + r} dr - \frac{\check{C}_{max}}{\check{C} - \check{C}_{max}} \int_{\frac{\check{c} \cdot (1 + \bar{r}) - 1}{\check{C}_{max}}}^{\frac{2 \cdot (1 + \bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} + \check{C}_{max}} - 1} dr + \int_{\frac{2 \cdot (1 + \bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} + \check{C}_{max}} - 1}^{\bar{r}} dr \\ &- \frac{\check{C} \cdot (1 + \bar{r})}{\check{C} - \check{C}_{max}} \int_{\frac{2 \cdot (1 + \bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} + \check{C}_{max}} - 1}^{\bar{r}} \frac{1}{1 + r} dr + \frac{\check{C}_{max}}{\check{C} - \check{C}_{max}} \int_{\frac{2 \cdot (1 + \bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} + \check{C}_{max}} - 1}^{\bar{r}} dr + \int_{\bar{r}}^{\frac{2 \cdot (1 + \bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} + \check{C}_{min}} - 1} dr \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\check{C} \cdot (1 + \bar{r})}{\check{C} - \check{C}_{min}} \int_{\bar{r}}^{\frac{2 \cdot (1 + \bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} + \check{C}_{min}} - 1} \frac{1}{1 + r} dr + \frac{\check{C}_{min}}{\check{C} - \check{C}_{min}} \int_{\bar{r}}^{\frac{2 \cdot (1 + \bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} + \check{C}_{min}} - 1} dr \\
& + \frac{\check{C} \cdot (1 + \bar{r})}{\check{C} - \check{C}_{min}} \int_{\frac{2 \cdot (1 + \bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} + \check{C}_{min}} - 1}^{\frac{\check{C} \cdot (1 + \bar{r})}{\check{C}_{min}} - 1} \frac{1}{1 + r} dr - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C} - \check{C}_{min}} \int_{\frac{2 \cdot (1 + \bar{r}) \cdot \check{C}}{\check{C} + \check{C}_{min}} - 1}^{\frac{\check{C} \cdot (1 + \bar{r})}{\check{C}_{min}} - 1} dr \\
& = \frac{\check{C} \cdot (1 + \bar{r})}{\check{C} - \check{C}_{max}} \ln \frac{4 \cdot \check{C} \cdot \check{C}_{max}}{(\check{C} + \check{C}_{max})^2} - \frac{\check{C} \cdot (1 + \bar{r})}{\check{C} - \check{C}_{max}} \left(\frac{4 \cdot \check{C} \cdot \check{C}_{max}}{\check{C} + \check{C}_{max}} - 1 - \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} \right) - \frac{2 \cdot \check{C} \cdot (1 + \bar{r})}{\check{C} + \check{C}_{max}} \\
& + \frac{2 \cdot \check{C} \cdot (1 + \bar{r})}{\check{C} + \check{C}_{min}} + \frac{\check{C} \cdot (1 + \bar{r})}{\check{C} - \check{C}_{min}} \ln \frac{(\check{C} + \check{C}_{min})^2}{4 \cdot \check{C} \cdot \check{C}_{min}} + \frac{\check{C} \cdot (1 + \bar{r})}{\check{C} - \check{C}_{min}} \cdot \left(\frac{4 \cdot \check{C}_{min}}{\check{C} + \check{C}_{min}} - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} - 1 \right) \\
& = \check{C}(1 + \bar{r}) \cdot \left[\frac{1}{\check{C} - \check{C}_{max}} \cdot \left(\ln \frac{4 \cdot \check{C} \cdot \check{C}_{max}}{(\check{C} + \check{C}_{max})^2} + \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} - 1 \right) + \frac{1}{\check{C} - \check{C}_{min}} \cdot \left(\ln \frac{(\check{C} + \check{C}_{min})^2}{4 \cdot \check{C} \cdot \check{C}_{min}} - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} + 1 \right) \right]
\end{aligned}$$

Natomiast mianownik przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
& \int_{x \in \mathbb{S}(R)} \max\{\rho_{\mathcal{R}}(x), 1 - \rho_{\mathcal{R}}(x)\} dx = \check{C}_{max} - \check{C}_{min} \\
& -\check{C} \cdot (1 + \bar{r}) \cdot \left[\frac{1}{\check{C} - \check{C}_{max}} \cdot \left(\ln \frac{4 \cdot \check{C} \cdot \check{C}_{max}}{(\check{C} + \check{C}_{max})^2} + \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} - 1 \right) + \frac{1}{\check{C} - \check{C}_{min}} \cdot \left(\ln \frac{(\check{C} + \check{C}_{min})^2}{4 \cdot \check{C} \cdot \check{C}_{min}} - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} + 1 \right) \right]
\end{aligned}$$

Dzieląc przez siebie licznik i mianownik otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
e(R_1) & = \frac{1}{\check{C} - \check{C}_{max}} \left(\ln \frac{4 \cdot \check{C} \cdot \check{C}_{max}}{(\check{C} + \check{C}_{max})^2} + \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} - 1 \right) + \frac{1}{\check{C} - \check{C}_{min}} \left(\ln \frac{(\check{C} + \check{C}_{min})^2}{4 \cdot \check{C} \cdot \check{C}_{min}} - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} + 1 \right) \\
& \cdot [\check{C}_{max} - \check{C}_{min} - \check{C}(1 + \bar{r})] \left[\frac{1}{\check{C} - \check{C}_{max}} \left(\ln \frac{4 \cdot \check{C} \cdot \check{C}_{max}}{(\check{C} + \check{C}_{max})^2} + \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} - 1 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{\check{C} - \check{C}_{min}} \left(\ln \frac{(\check{C} + \check{C}_{min})^2}{4\check{C}\check{C}_{min}} - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} + 1 \right) \Bigg]^{-1}$$

Wyprowadzenie 3

Wyprowadzimy teraz wzór (2.26). Energia dla zwrotu R_2 z instrumentu o

$PV_2 = Tr(\check{C}_{min}, \check{C}_*, \check{C}^*, \check{C}_{max})$ danej trapezoidalną liczbą rozmytą z funkcją przynależności

$$\rho_{R_2}(r) = \begin{cases} \frac{\frac{\check{C}(1+\bar{r})}{1+r} - \check{C}_{min}}{\check{C}_* - \check{C}_{min}} & \text{dla } \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} \leq \frac{1+\bar{r}}{1+r} < \frac{\check{C}_*}{\check{C}}, \\ 1 & \text{dla } \frac{\check{C}_*}{\check{C}} \leq \frac{1+\bar{r}}{1+r} \leq \frac{\check{C}^*}{\check{C}}, \\ \frac{\frac{\check{C}(1+\bar{r})}{1+r} - \check{C}_{max}}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} & \text{dla } \frac{\check{C}^*}{\check{C}} < \frac{1+\bar{r}}{1+r} \leq \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}}, \\ 0 & \text{dla } \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} < \frac{1+\bar{r}}{1+r}, \quad \frac{1+\bar{r}}{1+r} < \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}}. \end{cases}$$

Mamy:

$$\begin{aligned} d(R_2) &= \int_{x \in \mathbb{S}(R_2)} \rho_{Tr}(x) dx \\ &= \int_{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_{min}}{\check{C}_{min}}}^{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_*}{\check{C}_*}} \left(\frac{\frac{\check{C}(1+\bar{r})}{1+r} - \check{C}_{min}}{\check{C}_* - \check{C}_{min}} \right) dr + \check{C}^* - \check{C}_* + \int_{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}^*}{\check{C}^*}}^{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_{max}}{\check{C}_{max}}} \left(\frac{\frac{\check{C}(1+\bar{r})}{1+r} - \check{C}_{max}}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} \right) dr \\ &= \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}_* - \check{C}_{min}} \int_{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_{min}}{\check{C}_{min}}}^{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_*}{\check{C}_*}} \left(\frac{1}{1+r} \right) dr - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}_* - \check{C}_{min}} \int_{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_{min}}{\check{C}_{min}}}^{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_*}{\check{C}_*}} dr + \check{C}^* - \check{C}_* \\ &+ \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} \int_{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}^*}{\check{C}^*}}^{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_{max}}{\check{C}_{max}}} \left(\frac{1}{1+r} \right) dr - \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} \int_{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}^*}{\check{C}^*}}^{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_{max}}{\check{C}_{max}}} dr \\ &= \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}_* - \check{C}_{min}} \ln \left(\frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}_*} \cdot \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}(1+\bar{r})} \right) - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}_* - \check{C}_{min}} \left(\frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}_*} - \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}_{min}} \right) + \check{C}^* - \check{C}_* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} \ln \left(\frac{\check{C}_*}{\check{C}(1+\bar{r})} \cdot \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}_{max}} \right) - \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} \left(\frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}_{max}} - \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}_*} \right) \\
& = \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}^* - \check{C}_{min}} \left(\ln \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}_*} - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}_*} + 1 \right) + \check{C}^* - \check{C}_* + \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} \left(\ln \frac{\check{C}_*}{\check{C}_{max}} + \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}_*} - 1 \right)
\end{aligned}$$

To znaczy, że ostatecznie

$$d(R_2) = \frac{\check{C} \cdot (1+\bar{r})}{\check{C}^* - \check{C}_{min}} \cdot \left(\ln \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}_*} - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}_*} + 1 \right) + \check{C}^* - \check{C}_* + \frac{\check{C} \cdot (1+\bar{r})}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} \cdot \left(\ln \frac{\check{C}_*}{\check{C}_{max}} + \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}_*} - 1 \right)$$

Wyprowadzenie 4

Wyprowadzimy teraz wzór (2.30). Entropia dla zwrotu R_2 z instrumentu o

$PV_2 = Tr(\check{C}_{min}, \check{C}_*, \check{C}^*, \check{C}_{max})$ danej trapezoidalną liczbą rozmytą. Zgodnie ze wzorem (2.29), licznik miary entropii wyraża się za pomocą:

$$\begin{aligned}
& \int_{x \in \mathbb{S}(R_2)} \min\{\rho_{R_2}(x), 1 - \rho_{R_2}(x)\} dx = \\
& \int_{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_*}{\check{C}_*}}^{\frac{2\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_* - \check{C}_{min}}{\check{C} + \check{C}_{min}}} \left(1 - \frac{\frac{\check{C}(1+\bar{r})}{1+r} - \check{C}_{min}}{\check{C}_* - \check{C}_{min}} \right) dr + \int_{\frac{2\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_* - \check{C}_{min}}{\check{C} + \check{C}_{min}}}^{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_{min}}{\check{C}_{min}}} \left(\frac{\frac{\check{C}(1+\bar{r})}{1+r} - \check{C}_{min}}{\check{C}_* - \check{C}_{min}} \right) dr \\
& + \int_{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_*}{\check{C}_{max}}}^{\frac{2\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}^* - \check{C}_{max}}{\check{C} + \check{C}_{max}}} \left(\frac{\frac{\check{C}(1+\bar{r})}{1+r} - \check{C}_{max}}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} \right) dr + \int_{\frac{2\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}^* - \check{C}_{max}}{\check{C} + \check{C}_{max}}}^{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}^*}{\check{C}^*}} \left(1 - \frac{\frac{\check{C}(1+\bar{r})}{1+r} - \check{C}_{max}}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} \right) dr \\
& = \int_{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_*}{\check{C}_*}}^{\frac{2\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_* - \check{C}_{min}}{\check{C} + \check{C}_{min}}} dr - \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}_* - \check{C}_{min}} \int_{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_*}{\check{C}_*}}^{\frac{2\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_* - \check{C}_{min}}{\check{C} + \check{C}_{min}}} \left(\frac{1}{1+r} \right) dr + \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}_* - \check{C}_{min}} \int_{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_*}{\check{C}_*}}^{\frac{2\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_* - \check{C}_{min}}{\check{C} + \check{C}_{min}}} dr \\
& + \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}_* - \check{C}_{min}} \int_{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_*}{\check{C}_{max}}}^{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_{min}}{\check{C}_{min}}} \left(\frac{1}{1+r} \right) dr - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}_* - \check{C}_{min}} \int_{\frac{2\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_* - \check{C}_{min}}{\check{C} + \check{C}_{min}}}^{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_{min}}{\check{C}_{min}}} dr
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} \int \frac{\frac{2\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}^* - \check{C}_{max}}{\check{C} + \check{C}_{max}}}{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_{max}}{\check{C}_{max}}} \left(\frac{1}{1+r} \right) dr - \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} \int \frac{\frac{2\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}^* - \check{C}_{max}}{\check{C} + \check{C}_{max}}}{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}_{max}}{\check{C}_{max}}} dr \\
& + \int \frac{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}^*}{\check{C}^*}}{\frac{2\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}^* - \check{C}_{max}}{\check{C} + \check{C}_{max}}} dr - \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} \int \frac{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}^*}{\check{C}^*}}{\frac{2\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}^* - \check{C}_{max}}{\check{C} + \check{C}_{max}}} \left(\frac{1}{1+r} \right) dr \\
& + \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} \int \frac{\frac{\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}^*}{\check{C}^*}}{\frac{2\check{C}(1+\bar{r}) - \check{C}^* - \check{C}_{max}}{\check{C} + \check{C}_{max}}} dr \\
& = \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}^* - \check{C}_{min}} \ln \frac{\check{C} + \check{C}_{min}}{2\check{C}^*} + \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}^* - \check{C}_{min}} \left(\frac{2\check{C}_{min}}{\check{C} + \check{C}_{min}} - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}^*} \right) + \check{C}(1+\bar{r}) \left(\frac{2}{\check{C} + \check{C}_{min}} - \frac{1}{\check{C}^*} \right) \\
& + \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}^* - \check{C}_{min}} \ln \frac{\check{C} + \check{C}_{min}}{2\check{C}_{min}} + \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}^* - \check{C}_{min}} \left(\frac{2\check{C}_{min}}{\check{C} + \check{C}_{min}} - 1 \right) + \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} \ln \frac{2\check{C}_{max}}{\check{C} + \check{C}_{max}} \\
& - \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} \left(\frac{2\check{C}_{max}}{\check{C} + \check{C}_{max}} - 1 \right) + \check{C}(1+\bar{r}) \left(\frac{1}{\check{C}^*} - \frac{2}{\check{C} + \check{C}_{max}} \right) - \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} \ln \frac{\check{C} + \check{C}_{max}}{2\check{C}^*} \\
& + \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} \left(\frac{\check{C}_{max}}{\check{C}^*} - \frac{2\check{C}_{max}}{\check{C} + \check{C}_{max}} \right) = \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}^* - \check{C}_{min}} \left(\ln \frac{(\check{C} + \check{C}_{min})^2}{4\check{C}^* \cdot \check{C}_{min}} - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}^*} - 1 + \frac{2(\check{C}^* + \check{C}_{min})}{\check{C} + \check{C}_{min}} \right) \\
& + \frac{\check{C}(1+\bar{r})}{\check{C}^* - \check{C}_{max}} \left(\ln \frac{4\check{C}^* \cdot \check{C}_{max}}{(\check{C} + \check{C}_{max})^2} + \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}^*} - 1 - \frac{2(\check{C}^* + \check{C}_{max})}{\check{C} + \check{C}_{max}} \right)
\end{aligned}$$

Mianownik przyjmuje postać:

$$\int_{x \in \mathbb{S}(R_2)} \max\{\rho_{R_2}(x), 1 - \rho_{R_2}(x)\} dx = \check{C}_{max} - \check{C}_{min}$$

$$- \frac{\check{C} \cdot (1+\bar{r})}{\check{C}^* - \check{C}_{min}} \cdot \left(\ln \frac{(\check{C} + \check{C}_{min})^2}{4\check{C}^* \cdot \check{C}_{min}} - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}^*} - 1 + \frac{2 \cdot (\check{C}^* + \check{C}_{min})}{\check{C} + \check{C}_{min}} \right)$$

Zatem ostatecznie, dzieląc licznik przez mianownik otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
e(R_2) = & \left[\frac{1}{\check{c}_* - \check{c}_{min}} \cdot \left(\ln \frac{(\check{c} + \check{c}_{min})^2}{4 \cdot \check{c}_* \cdot \check{c}_{min}} - \frac{\check{c}_{min}}{\check{c}_*} - 1 + \frac{2 \cdot (\check{c}_* + \check{c}_{min})}{\check{c} + \check{c}_{min}} \right) \right. \\
& \left. + \frac{1}{\check{c}_* - \check{c}_{max}} \cdot \left(\ln \frac{4 \cdot \check{c}_* \cdot \check{c}_{max}}{(\check{c} + \check{c}_{max})^2} + \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}_*} - 1 - \frac{2 \cdot (\check{c}_* + \check{c}_{max})}{\check{c} + \check{c}_{max}} \right) \right] \\
& \cdot \left[\check{c}_{max} - \check{c}_{min} - \frac{1}{\check{c}_* - \check{c}_{min}} \cdot \left(\ln \frac{(\check{c} + \check{c}_{min})^2}{4 \cdot \check{c}_* \cdot \check{c}_{min}} - \frac{\check{c}_{min}}{\check{c}_*} - 1 + \frac{2 \cdot (\check{c}_* + \check{c}_{min})}{\check{c} + \check{c}_{min}} \right) \right. \\
& \left. - \frac{1}{\check{c}_* - \check{c}_{max}} \cdot \left(\ln \frac{4 \cdot \check{c}_* \cdot \check{c}_{max}}{(\check{c} + \check{c}_{max})^2} + \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}_*} - 1 - \frac{2 \cdot (\check{c}_* + \check{c}_{max})}{\check{c} + \check{c}_{max}} \right) \right]^{-1}
\end{aligned}$$

Wyprowadzenie 5

Wyprowadzimy teraz wzór (2.42). Miara energii dla czynnika dyskontującego, będącego w trójkątą liczbą rozmytą $D_1 = T\left(\bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{min}}{\check{c}}; \bar{v}; \bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}}\right)$, z funkcją przynależności

$$\eta_{D_1}(v) = \begin{cases} \frac{\check{c} \cdot v - \bar{v} \cdot \check{c}_{min}}{\check{c} \cdot \bar{v} - \bar{v} \cdot \check{c}_{min}} & \text{dla } \bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{min}}{\check{c}} \leq v < \bar{v}, \\ 1 & \text{dla } v = \bar{v}, \\ \frac{\check{c} \cdot v - \bar{v} \cdot \check{c}_{max}}{\check{c} \cdot \bar{v} - \bar{v} \cdot \check{c}_{max}} & \text{dla } \bar{v} < v \leq \bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}}, \\ 0 & \text{dla } \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}} < \frac{1 + \bar{r}}{1 + r}, \quad \frac{1 + \bar{r}}{1 + r} < \frac{\check{c}_{min}}{\check{c}}. \end{cases}$$

Mamy:

$$d(D_1) = \int_{v \in \mathbb{S}(D_1)} \eta(v) dv = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(\bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}} - \bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{min}}{\check{c}} \right) = \frac{\bar{v}}{2 \cdot \check{c}} \cdot (\check{c}_{max} - \check{c}_{min})$$

Oznacza to, że ostatecznie

$$d(D_1) = \frac{\bar{v}}{2 \cdot \check{c}} \cdot (\check{c}_{max} - \check{c}_{min}).$$

Wyprowadzenie 6

Wyprowadzimy teraz wzór (2.46). Dla czynnika dyskontującego, będącego w omawianym przypadku trójkątną liczbą rozmytą $D_1 = T\left(\bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{min}}{\check{c}}; \bar{v}; \bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}}\right)$, miara entropii obliczana jest następująco. Licznik przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \int_{v \in \mathbb{S}(D_1)} \min\{\eta(v); 1 - \eta(v)\} dv &= \frac{1}{4} \cdot \left(\bar{v} - \bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{min}}{\check{c}} \right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\bar{v} \cdot \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}} - \bar{v} \right) \\ &= \frac{\bar{v}}{4 \cdot \check{c}} \cdot (\check{c}_{max} - \check{c}_{min}) \end{aligned}$$

Natomiast mianownik:

$$\begin{aligned} \int_{v \in \mathbb{S}(D_1)} \max\{\eta(v); 1 - \eta(v)\} dv &= \int_{v \in \mathbb{S}(D_1)} dv - \frac{\bar{v}}{4 \cdot \check{c}} \cdot (\check{c}_{max} - \check{c}_{min}) \\ &= \frac{3 \cdot \bar{v}}{4 \cdot \check{c}} \cdot (\check{c}_{max} - \check{c}_{min}) \end{aligned}$$

Zatem ostatecznie:

$$e(D_1) = \frac{1}{3}$$

Wyprowadzenie 7

Wyprowadzimy teraz wzór (2.43). Miara energii dla czynnika dyskontującego, będącego trapezoidalną liczbą rozmytą $D_2 = Tr\left(\frac{\check{c}_{min}}{\check{c}} \cdot \bar{v}, \frac{\check{c}_*}{\check{c}} \cdot \bar{v}, \frac{\check{c}^*}{\check{c}} \cdot \bar{v}, \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}} \cdot \bar{v}\right)$ z funkcją przynależności

$$\eta_{D_2}(v) = \begin{cases} \frac{\check{c} \cdot v - \check{c}_{min} \cdot \bar{v}}{\check{c}_* \cdot \bar{v} - \check{c}_{min} \cdot \bar{v}} & \text{dla } \frac{\check{c}_{min}}{\check{c}} \cdot \bar{v} \leq v \leq \frac{\check{c}_*}{\check{c}} \cdot \bar{v}, \\ 1 & \text{dla } \frac{\check{c}_*}{\check{c}} \cdot \bar{v} < v < \frac{\check{c}^*}{\check{c}} \cdot \bar{v}, \\ \frac{\check{c} \cdot v - \check{c}_{max} \cdot \bar{v}}{\check{c}^* \cdot \bar{v} - \check{c}_{max} \cdot \bar{v}} & \text{dla } \frac{\check{c}^*}{\check{c}} \cdot \bar{v} < v \leq \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}} \cdot \bar{v}, \\ 0 & \text{dla } \frac{\check{c}_{max}}{\check{c}} < v, \quad v < \frac{\check{c}_{min}}{\check{c}} \cdot \bar{v}, \end{cases}$$

Mamy:

$$\begin{aligned}
d(D_2) &= \int_{v \in \mathbb{S}(D_2)} \eta(v) dv = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(\bar{v} \cdot \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} - \bar{v} \cdot \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} + \frac{\check{C}^*}{\check{C}} \cdot \bar{v} - \frac{\check{C}_*}{\check{C}} \cdot \bar{v} \right) \\
&= \frac{\bar{v}}{2 \cdot \check{C}} \cdot (\check{C}^* + \check{C}_{max} - \check{C}_{min} - \check{C}_*)
\end{aligned}$$

Oznacza to, że ostatecznie

$$d(D_2) = \frac{\bar{v}}{2 \cdot \check{C}} \cdot (\check{C}^* + \check{C}_{max} - \check{C}_{min} - \check{C}_*).$$

Wyprowadzenie 8

Wyprowadzimy teraz wzór (2.47). Dla czynnika dyskontującego, będącego trapezoidalną liczbą rozmytą $D_2 = Tr\left(\frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} \cdot \bar{v}, \frac{\check{C}_*}{\check{C}} \cdot \bar{v}, \frac{\check{C}^*}{\check{C}} \cdot \bar{v}, \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} \cdot \bar{v}\right)$, miara entropii obliczana jest następująco.

Zgodnie ze wzorem (2.53) licznik przyjmuje postać:

$$\begin{aligned}
\int_{v \in \mathbb{S}(D_2)} \min\{\eta(v); 1 - \eta(v)\} dv &= \frac{1}{4} \cdot \left(\bar{v} \cdot \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} - \frac{\check{C}^*}{\check{C}} \cdot \bar{v} \right) + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\check{C}_*}{\check{C}} \cdot \bar{v} - \bar{v} \cdot \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} \right) \\
&= \frac{\bar{v}}{4 \cdot \check{C}} \cdot (\check{C}_* - \check{C}_{min} + \check{C}_{max} - \check{C}^*)
\end{aligned}$$

Natomiast mianownik:

$$\begin{aligned}
\int_{v \in \mathbb{S}(D_2)} \max\{\eta(v); 1 - \eta(v)\} dv &= \int_{v \in \mathbb{S}(D_2)} dv - \frac{\bar{v}}{4 \cdot \check{C}} \cdot (\check{C}_* - \check{C}_{min} + \check{C}_{max} - \check{C}^*) \\
&= \frac{\bar{v}}{4 \cdot \check{C}} \cdot (-\check{C}_* - 3 \cdot \check{C}_{min} + 3 \cdot \check{C}_{max} + \check{C}^*)
\end{aligned}$$

Zatem ostatecznie:

$$e(D_2) = \frac{\check{C}_* - \check{C}_{min} + \check{C}_{max} - \check{C}^*}{-\check{C}_* - 3 \cdot \check{C}_{min} + 3 \cdot \check{C}_{max} + \check{C}^*}.$$

Dodatek B

Algorytmy programu Matlab

Portfel n -składnikowy, trapezoidalna PV

```
clear all
%deklaracja zmiennych
n = round(rand(1,1)/2*100)+1;
step=0.001;
NR=rand(n,1); %oczekiwana prosta stopa
zwrotu
diag = rand(n,1); % The diagonal values
uppermatrix = triu(rand(n),1); % Losowe
wartości macierzy wariancji kowariancji
VAR
=bsxfun(@min,diag,diag.')+uppermatrix+upper
matrix.%; % Macierz wariancji kowariancji
for i=1:n
    r1=rand(1,1)*100;
    r2=rand(1,1)*100;
    M(i,1)=min(r1,r2);
    M(i,4)=max(r1,r2);
    r3=(M(i,4)-M(i,1)).*rand(1,1)+M(i,1);
    r4=(M(i,4)-M(i,1)).*rand(1,1)+M(i,1);
    M(i,2)= min(r3,r4);
    M(i,3)= max(r3,r4);
    P(i,1)=(M(i,2)+M(i,3))/2; % cena rynkowa
end
%PV i wykres
figure
plot(M(:,1),[0,1,1,0]);
xlabel('Price')
ylabel('mi(x)')
ylim([0 1.1])
grid off
%PV dla instrumentów
for k=1:n
    j=0;
    for i=M(k,1)+step:step:M(k,2)-step
        j=j+1;
        MI1(k,j)=(i-M(k,1))/(M(k,2)-M(k,1));
    end
    for i=M(k,2)+step:step:M(k,3)
        j=j+1;
        MI1(k,j)=1;
    end
    for i=M(k,3)+step:step:M(k,4)-step
        j=j+1;
        MI1(k,j)=(i-M(k,3))/(M(k,3)-M(k,4));
    end
end
% Stopy zwrotu dla instrumentow
for k=1:n
    s=0; a=0; count=0;
    for i=(((P(k,1)*(1+NR(k,1))))-
M(k,4))/M(k,4))+step:step:(((P(k,1)*(1+NR(k,1))
)-M(k,1))/M(k,1))-step
```

```

s=s+1;
    if i>=(((P(k,1)*(1+NR(k,1)))/M(k,4))-1) &&
i<=(((P(k,1)*(1+NR(k,1)))/M(k,3))-1)
        a=(((1+NR(k,1))/(1+i))-
(M(k,4)/P(k,1)))/((M(k,3)/P(k,1))-
(M(k,4)/P(k,1)));
    elseif i<(((P(k,1)*(1+NR(k,1)))/M(k,2))-1) &&
i>(((P(k,1)*(1+NR(k,1)))/M(k,3))-1)
        a=1;
    elseif i<=(((P(k,1)*(1+NR(k,1)))/M(k,1))-1)
&& i>=(((P(k,1)*(1+NR(k,1)))/M(k,2))-1)
        a=(((1+NR(k,1))/(1+i))-
(M(k,1)/P(k,1)))/((M(k,2)/P(k,1))-
(M(k,1)/P(k,1)));
    end
    R1(k,s)=a;
    X1(k,s)=i;
    count=count+1;
end
Z1(1,k)=count;
end
k=randi(n); %zwrot z którego instrumentu
pokazaż?
x=[X1(k,1):step:X1(k,Z1(1,k))];
y=[R1(k,1):Z1(1,k)];
figure
plot(x,y);
xlabel('Price')
ylabel('ri(x)')
ylim([0 1.1])
grid off
%Czynnik dyskontujący dla instrumentów
for k=1:n
    s=0; a=0;
    for
i=(M(k,1)/((1+NR(k,1))*P(k,1)))+step:step:(M(k,
4)/((1+NR(k,1))*P(k,1))-step
        s=s+1;
        if i>=M(k,1)/((1+NR(k,1)))/P(k,1) &&
i<=M(k,2)/((1+NR(k,1)))/P(k,1)
            a=(i-
((1/(1+NR(k,1)))*(M(k,1)/P(k,1)))/((1/(1+NR(k,
1)))*(M(k,2)/P(k,1))-
(1/(1+NR(k,1)))*(M(k,1)/P(k,1)));
            elseif i>M(k,2)/((1+NR(k,1)))/P(k,1) &&
i<M(k,3)/((1+NR(k,1)))/P(k,1)
                a=1;
            elseif i>=M(k,3)/((1+NR(k,1)))/P(k,1) &&
i<=M(k,4)/((1+NR(k,1)))/P(k,1)
                a=(i-
((1/(1+NR(k,1)))*(M(k,4)/P(k,1)))/((1/(1+NR(k,
1)))*(M(k,3)/P(k,1))-
(1/(1+NR(k,1)))*(M(k,4)/P(k,1)));
```

```

end
D1(k,s)=a;
X2(k,s)=a;
end
end
% PV portfela
nr=0; a=0; b=0; c=0; d=0; t=0;
for k=1:n
nr=nr+NR(k,1);
a=a+M(k,1);
b=b+M(k,2);
c=c+M(k,3);
d=d+M(k,4);
t=t+P(k,1);
end
for i=a:step:b-step
j=j+1;
Ml(n+1,j)=i;
Ml(n+2,j)=(i-a)/(b-a);
end
for i=b:step:c
j=j+1;
Ml(n+1,j)=i;
Ml(n+2,j)=1;
end
for i=c+step:step:d
j=j+1;
Ml(n+1,j)=i;
Ml(n+2,j)=(i-d)/(c-d);
end
% Zwrot dla portfela
s=0;
for i=(((t*(1+nr))-d)/d):step:(((t*(1+nr)-a))/a)
s=s+1;
j=0;
if i>=(t*(1+nr)/d)-1 && i<=(t*(1+nr)/c)-1
j=(((1+nr)/(1+i))-(d/t))/(1-(d/t));
elseif i>(t*(1+nr)/c)-1 && i<(t*(1+nr)/b)-1
j=1;
elseif i>=(t*(1+nr)/b)-1 && i<=(t*(1+nr)/a)-1
j=(((1+nr)/(1+i))-(a/t))/(1-(a/t));
end
R(1,s)=i;
R(2,s)=j;
end
% Czynniki dyskontujące dla portfela
s=0;
for i=1:length(R)
s=s+1;
j=0;
if 1/(1+R(1,i))>=a*(1/(1+nr))/t &&
1/(1+R(1,i))<=b*(1/(1+nr))/t
j=(1/(1+R(1,i))-
((1/(1+nr))*(a/t)))/((1/(1+nr))*(b/t)-
(1/(1+nr))*(a/t));
elseif 1/(1+R(1,i))>b*(1/(1+nr))/t &&
1/(1+R(1,i))<c*(1/(1+nr))/t
j=1;
elseif 1/(1+R(1,i))>=c*(1/(1+nr))/t &&
1/(1+R(1,i))<=d*(1/(1+nr))/t
j=(1/(1+R(1,i))-
((1/(1+nr))*(d/t)))/((1/(1+nr))*(c/t)-
(1/(1+nr))*(d/t));
end
D(1,s)=1/(1+R(1,i));
D(2,s)=j;
end
% wykresy
x=[a,b,c,d];
y=[0,1,1,0];
figure
plot(x,y);
legend('PV','Location','NorthEast')
xlabel('Price')
ylabel('mi(x)')
ylim([0 1.1])
grid off
figure
plot(R(1,:),R(2,:))
xlabel('r')
ylabel('ro(r)')
ylim([0 1.1])
grid off
figure
plot(D(1,:),D(2,:));
xlabel('v')
ylabel('delta(v)')
ylim([0 1.1])
grid off
% Wariancje i energie
d1=0; v1=0;
for k=1:n
D2(k,1)=(((1/(1+NR(k,1)))/(2*P(k,1))))*(M(k,4)+M
(k,3)-M(k,2)-M(k,1));
D2(k,2)=1/(1+NR(k,1));
D2(k,3)=(M(k,3)+M(k,2))/2;
d1=d1+(D2(k,3)/D2(k,2));
v1=v1+((D2(k,3)/D2(k,2))*D2(k,1));
end
var=0;
for k=1:n
var=var+VAR(k,k)
end
var = var^2;
end
d2=(d1^(-1))*v1;
display('energie dla czynnika dyskontującego');
for k=1:n
D2(k,1)
end
d2
display('entropie dla czynnika dyskontującego
są stałe i równe 1/3');
display('wariancje stopy zwrotu');
for k=1:n
VAR(k,k)
end
var

```


Portfel n-składnikowy, dyskretne PV

```

clear all
%deklaracja zmiennych
n = round(rand(1,1)/2*100)+1;
step=0.001;
NR=rand(n,1); %oczekiwana prosta stopa
zwrotu
diag = rand(n,1);
uppermatrix =
triu(bsxfun(@min,diag,diag.').*rand(n,1)); %
Losowe wartości macierzy wariancji
kowariancji
VAR = diag(n)+uppermatrix+uppermatrix.>'; %
Macierz wariancji kowariancji

for i=1:n
    r1=rand(1,1)*100;
    r2=rand(1,1)*100;
    M(i,1)=min(r1,r2);
    M(i,4)=max(r1,r2);
    r3=(M(i,4)-M(i,1)).*rand(1,1)+M(i,1);
    r4=(M(i,4)-M(i,1)).*rand(1,1)+M(i,1);
    M(i,2)= min(r3,r4);
    M(i,3)= max(r3,r4);
    P(i,1)=(M(i,2)+M(i,3))/2; % cena rynkowa
end

%PV dla instrumentów
for k=1:n
    j=0;
    for i=M(k,1)+step:step:M(k,2)-step
        j=j+1;
        M1(k,j)=(i-M(k,1))/(M(k,2)-M(k,1));
        X3(k,j)=i;
    end
    for i=M(k,2):step:M(k,3)
        j=j+1;
        M1(k,j)=1;
        X3(k,j)=i;
    end
    for i=M(k,3)+step:step:M(k,4)-step
        j=j+1;
        M1(k,j)=(i-M(k,4))/(M(k,3)-M(k,4));
        X3(k,j)=i;
    end
end

%PV i wykres
cmap1 = hot(15);
cmap2 = winter(15) ;
combinedColorMap = [cmap1; cmap2];
randomRows = randi(size(combinedColorMap,
1), [15, 1]);
randomColors =
combinedColorMap(randomRows, :);

figure
for k=1:n
for i=1:1000:length(X3(k,:))

```

```

line([X3(k,i) X3(k,i)], [0
M1(k,i)], 'Color',randomColors(k,:));
end
end
xlabel('Price')
ylabel('mi(x)')
ylim([0 1.1])
grid off

% Stopy zwrotu dla instrumentow
for k=1:n
s=0;
a=0;
count=0;
for i=((P(k,1)*(1+NR(k,1)))-
M(k,4))/M(k,4)+step:step:(((P(k,1)*(1+NR(k,1))
)-M(k,1))/M(k,1))-step
    s=s+1;
    if i>=(((P(k,1)*(1+NR(k,1)))/M(k,4))-1) &&
i<=(((P(k,1)*(1+NR(k,1)))/M(k,3))-1)
        a=(((1+NR(k,1))/(1+i))-
(M(k,4)/P(k,1)))/((M(k,3)/P(k,1))-
(M(k,4)/P(k,1))));
    elseif i<(((P(k,1)*(1+NR(k,1)))/M(k,2))-1) &&
i>(((P(k,1)*(1+NR(k,1)))/M(k,3))-1)
        a=1;
    elseif i<=(((P(k,1)*(1+NR(k,1)))/M(k,1))-1)
&& i>=(((P(k,1)*(1+NR(k,1)))/M(k,2))-1)
        a=(((1+NR(k,1))/(1+i))-
(M(k,1)/P(k,1)))/((M(k,2)/P(k,1))-
(M(k,1)/P(k,1))));
    end
    R1(k,s)=a;
    X1(k,s)=i;
    count=count+1;
end
Z1(1,k)=count;
end

k=randi(n); %zwrot z którego instrumentu
pokazać?

figure
for i=1:10:length(X1(k,:))
line([X1(k,i) X1(k,i)], [0 R1(k,i)]);
end
xlabel('Price')
ylabel('mi(x)')
ylim([0 1.1])
grid off

%Czynnik dyskontujący dla instrumentów
for k=1:n
s=0;
a=0;
for
i=(M(k,1)/((1+NR(k,1))*P(k,1)))+step:step:(M(k,
4)/((1+NR(k,1))*P(k,1)))-step
    s=s+1;

```

```

    if i>=M(k,1)*(1/(1+NR(k,1)))/P(k,1) &&
i<=M(k,2)*(1/(1+NR(k,1)))/P(k,1)
        a=(i-
((1/(1+NR(k,1)))*(M(k,1)/P(k,1)))/((1/(1+NR(k,
1)))*(M(k,2)/P(k,1))-
(1/(1+NR(k,1)))*(M(k,1)/P(k,1)));
        elseif i>M(k,2)*(1/(1+NR(k,1)))/P(k,1) &&
i<M(k,3)*(1/(1+NR(k,1)))/P(k,1)
            a=1;
        elseif i>=M(k,3)*(1/(1+NR(k,1)))/P(k,1) &&
i<=M(k,4)*(1/(1+NR(k,1)))/P(k,1)
            a=(i-
((1/(1+NR(k,1)))*(M(k,4)/P(k,1)))/((1/(1+NR(k,
1)))*(M(k,3)/P(k,1))-
(1/(1+NR(k,1)))*(M(k,4)/P(k,1)));
            end
            D1(k,s)=a;
            X2(k,s)=a;
end
end

```

% PV portfela

```

nr=0; a=0; b=0; c=0; d=0; t=0;
for k=1:n
nr=nr+NR(k,1);
a=a+M(k,1);
b=b+M(k,2);
c=c+M(k,3);
d=d+M(k,4);
t=t+P(k,1);
end

```

```

for i=a:step:b-step
j=j+1;
MI(n+1,j)=i;
MI(n+2,j)=(i-a)/(b-a);
end
for i=b:step:c
j=j+1;
MI(n+1,j)=i;
MI(n+2,j)=1;
end
for i=c+step:step:d
j=j+1;
MI(n+1,j)=i;
MI(n+2,j)=(i-d)/(c-d);
end

```

% Zwrot dla portfela

```

s=0;
for i=((t*(1+nr)-d)/d):step:(((t*(1+nr)-a)/a)
s=s+1;
j=0;
if i>=(t*(1+nr)/d)-1 && i<=(t*(1+nr)/c)-1
j=(((1+nr)/(1+i))-(d/t))/(1-(d/t));
elseif i>(t*(1+nr)/c)-1 && i<(t*(1+nr)/b)-1
j=1;
elseif i>=(t*(1+nr)/b)-1 && i<=(t*(1+nr)/a)-1
j=(((1+nr)/(1+i))-(a/t))/(1-(a/t));
end

```

```

R(1,s)=i;
R(2,s)=j;
end

```

% Czynniki dyskontujący dla portfela

```

s=0;
for i=1:length(R)
s=s+1;
j=0;
if 1/(1+R(1,i))>=a*(1/(1+nr))/t &&
1/(1+R(1,i))<=b*(1/(1+nr))/t
j=(1/(1+R(1,i))-
((1/(1+nr))*(a/t)))/((1/(1+nr))*(b/t)-
(1/(1+nr))*(a/t));
elseif 1/(1+R(1,i))>b*(1/(1+nr))/t &&
1/(1+R(1,i))<c*(1/(1+nr))/t
j=1;
elseif 1/(1+R(1,i))>=c*(1/(1+nr))/t &&
1/(1+R(1,i))<=d*(1/(1+nr))/t
j=(1/(1+R(1,i))-
((1/(1+nr))*(d/t)))/((1/(1+nr))*(c/t)-
(1/(1+nr))*(d/t));
end
D(1,s)=1/(1+R(1,i));
D(2,s)=j;
end

```

% wykresy

```

figure
for i=1:10:length(MI(n+1,:))
line([MI(n+1,i) MI(n+1,i)], [0 MI(n+2,i)]);
end
xlabel('Price')
ylabel('mi(x)')
ylim([0 1.1])
grid off

```

```

figure
for i=1:10:length(R(1,:))
line([R(1,i) R(1,i)], [0 R(2,i)]);
end
xlabel('Price')
ylabel('mi(x)')
ylim([0 1.1])
grid off

```

```

figure
for i=1:10:length(D(1,:))
line([D(1,i) D(1,i)], [0 D(2,i)]);
end
xlabel('Price')
ylabel('delta(v)')
ylim([0 1.1])
grid off

```

% Wariancje i energie

```

d1=0; v1=0;
for k=1:n

```

```

D2(k,1)=((1/(1+NR(k,1)))/(2*P(k,1)))*(M(k,4)+M
(k,3)-M(k,2)-M(k,1));
D2(k,2)=1/(1+NR(k,1));
D2(k,3)=(M(k,3)+M(k,2))/2;
d1=d1+(D2(k,3)/D2(k,2));
v1=v1+((D2(k,3)/D2(k,2))*D2(k,1));
end
var=0;
for k=1:n
    var=var+VAR(k,k)
end
var = var^2;
end
d2=(d1^(-1))*v1;
display('energje dla czynnika dyskontującego');
for k=1:n
    D2(k,1)
end
d2
display('entropie dla czynnika dyskontującego
są stałe i równe 1/3');
display('wariancje stopy zwrotu');
for k=1:n
    VAR(k,k)
end
var

```