

AKADEMIA EKONOMICZNA W POZNANIU

Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej

Marcin Bartkowiak

**Wycena opcji  
na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie  
w oparciu o modele zmienności**

rozprawa doktorska

Promotor: **prof. dr hab. Marian Matłoka**

**Poznań 2008**

## Spis treści

<b>Wstęp</b> .....	<b>3</b>
<b>Rozdział I. Charakterystyka opcji</b> .....	<b>8</b>
1.1. Instrumenty pochodne.....	8
1.2. Kontrakty terminowe i opcje na świecie.....	17
1.3. Kontrakty terminowe i opcje w Polsce .....	21
<b>Rozdział II. Podstawy wyceny instrumentów pochodnych</b> .....	<b>27</b>
2.1. Podstawowe założenia modeli wyceny instrumentów finansowych.....	27
2.2. Wycena instrumentów pochodnych w czasie dyskretnym .....	28
2.3. Wycena instrumentów pochodnych w czasie ciągłym .....	36
2.4. Model Blacka-Scholesa .....	42
2.5. Rynki niezupełne .....	48
<b>Rozdział III. Koncepcje wyceny opcji w oparciu o modele zmienności</b> .....	<b>50</b>
3.1. Modele GARCH .....	50
3.2. Wycena opcji w oparciu o modele GARCH.....	57
3.3. Modele przełącznikowe .....	62
3.4. Wycena opcji w oparciu o modele przełącznikowe.....	64
3.5. Modele zmienności stochastycznej.....	67
3.6. Wycena opcji w oparciu o modele przełącznikowe.....	69
<b>Rozdział IV. Własności badanych szeregów czasowych</b> .....	<b>72</b>
4.1. Specyfika finansowych szeregów czasowych .....	72
4.2. Opis wykorzystywanych w pracy szeregów czasowych .....	75
<b>Rozdział V. Wycena opcji notowanych na GPW w Warszawie</b> .....	<b>101</b>
5.1. Estymacja i wybór modeli zmienności .....	101
5.2. Wycena opcji w oparciu o modele zmienności .....	125
<b>Zakończenie</b> .....	<b>134</b>
<b>Dodatki</b>	
<b>Dodatek 1. Najważniejsze giełdy kontraktów futures i opcji</b> .....	<b>137</b>
<b>Dodatek 2. Miary dokładności prognoz</b> .....	<b>139</b>

<b>Dodatek matematyczny .....</b>	<b>141</b>
A. Procesy stochastyczne w czasie dyskretnym .....	141
B. Procesy stochastyczne w czasie ciągłym .....	144
C. Rynki niezupełne.....	153
<b>Literatura .....</b>	<b>154</b>

## Wstęp

Instrumenty pochodne stanowią ważną i liczną klasę aktywów na rozwiniętych rynkach finansowych – obserwowany jest trwały wzrost wielkości obrotów oraz rodzajów instrumentów pochodnych. Na wielu giełdach liczba i wartość transakcji dotyczących derywatów jest znacznie większa niż transakcji tradycyjnymi instrumentami finansowymi. Pojawiły się nawet wyspecjalizowane instytucje, których działalność koncentruje się na rynku instrumentów pochodnych.

Źródłem sukcesu są możliwości udostępniane inwestorom. Instrumenty pochodne dają bowiem sposobność do zabezpieczania się przed niekorzystnymi, z punktu widzenia inwestora, zmianami na rynku. Jednocześnie, ze względu na dźwignie finansową, są atrakcyjną propozycją dla krótkoterminowych graczy giełdowych. Niestety, jak pokazują ostatnie wydarzenia na rynkach finansowych, nawet szacowne instytucje korzystają z tej dźwigni w sposób nierozważny. Dla wszystkich uczestników rynku, niezależnie od motywacji jaką się kierują przy podejmowaniu decyzji, kluczowa jest właściwa wycena. Dlatego też, wycena instrumentów pochodnych, a zwłaszcza (z racji trudności) opcji, należy do jednego z głównych obszarów zainteresowań ekonometrii i matematyki finansowej.

Po ponad trzydziestu latach od ukazania się przełomowych prac Blacka i Scholesa oraz Mertona wciąż prowadzone są badania mające na celu sformułowanie modelu umożliwiającego sprawiedliwą wycenę opcji. Model taki, nie powinien mieć licznych wad modelu Blacka-Scholesa ( $\mathcal{M}^{BS}$ ), będąc jednocześnie równie prostym w stosowaniu. W modelu  $\mathcal{M}^{BS}$ , oprócz standardowych założeń dotyczących braku kosztów transakcyjnych i podatków, doskonałej podzielności instrumentu bazowego czy racjonalności uczestników rynku, zakłada się normalność rozkładów zwrotów logarytmicznych i stałość w czasie współczynnika zmienności. Natomiast liczne badania przeprowadzone na wielu rynkach wskazują, że zwroty logarytmiczne charakteryzują się między innymi leptokurtycznością oraz skośnością, co wyklucza rozkład normalny. Również założenia o stałości w czasie zmienności nie da się obronić. Niezależnie od użytej miary zmienności typowe jest występowanie dużych wahań zmienności. Ponadto charakterystyczne jest zjawisko grupowania się zmienności, czyli występowania okresów podwyższonej zmienności, po których następują okresy zmienności obniżonej. Wiąże się to bezpośrednio z istnieniem dodatniej autokorelacji w szeregach zmienności.

Naturalną propozycją, która uwzględnia powyższą krytykę, jest wykorzystanie do wyceny opcji modeli zmienności. Modele te umożliwiają oczywiście wyjaśnienie i opis

kształtowania się zmienności, ale również uwzględnienie rozkładu innego niż normalny. Pierwsze modele zmienności (zmienności stochastycznej) pojawiły się już w latach siedemdziesiątych ubiegłego wieku (Clark 1973). Jednak dopiero lata osiemdziesiąte (modele ARCH Engle 1982, GARCH Bollerslev 1986, przełącznikowe Hamilton 1989), a zwłaszcza dziewięćdziesiąte przyniosły rozwój tych metod (między innymi dzięki wzrostowi mocy obliczeniowej komputerów). Początkowo modele zmienności wykorzystywane były jedynie jako aparat opisu szeregów czasowych. Dalszy rozwój i rosnąca popularność modeli zmienności spowodowała, że zaczęto je używać również jako narzędzia do rozwiązywania innych problemów z pogranicza ekonometrii i matematyki finansowej. Model zmienności stochastycznej do wyceny opcji wprowadził w 1987 roku Hull i White, modele GARCH natomiast Heston (1993) i Duan (1995). Z kolei pierwszą próbę wykorzystania modeli przełącznikowych do tego celu podjął Di Masi *et al.* w 1994 roku. Podstawowa trudność związana z wykorzystaniem modeli zmienności do wyceny instrumentów pochodnych związana jest z brakiem zupełności rynku. Pojawienie się dodatkowego źródła losowości oznacza, że na rynku istnieją instrumenty pochodne nieosiągalne, czyli takie których wypłaty nie mogą być replikowane za pomocą strategii samofinansujących. Nie jest wówczas możliwe wyznaczenie ceny takiego instrumentu finansowego w sposób jednoznaczny. Naturalną propozycją poradzenia sobie z tym problemem jest wykorzystanie funkcji użyteczności inwestora do wskazania jedynej ceny sprawiedliwej. Innym sposobem wyceny instrumentów pochodnych na rynku niezpełnym jest metoda uzupełniania rynku. Polega ona na wprowadzeniu dodatkowych, teoretycznych instrumentów finansowych, które umożliwiają replikację wszystkich występujących na rynku derywatyw.

Badania przytoczone powyżej przeprowadzono na rozwiniętych rynkach finansowych. Rynek polski natomiast wciąż zaliczany jest do rynków rozwijających się. Charakteryzuje się małą płynnością (dla większości notowanych walorów wskaźnik *free float* jest niski), a także dominacją inwestorów instytucjonalnych nad indywidualnymi. Stąd też szeregi czasowe mają odmienne własności od tych zidentyfikowanych na rynkach dojrzałych. Ponadto opcje pojawiły się na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie stosunkowo niedawno – 22 września 2003 roku rozpoczęto handel opcjami na indeks WIG20. W październiku 2005 roku wprowadzono opcje na akcje pięciu spółek. Jednak dotąd nie zdobyły one uznania wśród inwestorów, na wielu sesjach liczba zawieranych transakcji była symboliczna. Dlatego w czerwcu 2007 bezterminowo zawieszono obrót opcjami na akcje. Nasuwa się więc pytanie, czy modele zmienności mogą być przydatne do wyceny opcji na Giełdzie Papierów wartościowych w Warszawie?

Celem pracy jest zweryfikowanie następującej hipotezy badawczej: wycena opcji na GPW w Warszawie w oparciu o modele zmienności umożliwi trafniejsze oszacowanie wartości opcji.

Badaniu poddane zostały wszystkie typy (ze względu na instrument bazowy) opcji, które były notowane na GPW w Warszawie we wrześniu 2006 roku. Są to zatem opcje na indeks WIG20 oraz opcje na akcje spółek: koncernu paliwowego PKN Orlen, banku Pekao S.A., firmy telekomunikacyjnej TP S.A., koncernu górniczego KGHM Polska Miedź i firmy informatycznej Prokom. W szczególności w pracy poszukiwane są odpowiedzi na następujące pytania:

- jakie własności mają analizowane szeregi czasowe?
- czy można dopasować do niedojrzałego rynku polskiego model zmienności?
- czy wycena dokonana w oparciu o modele zmienności jest lepsza od wyceny przeprowadzonej przy użyciu modelu  $\mathcal{M}^{BS}$ ?
- jaka jest relacja pomiędzy wycenami przygotowanymi przy użyciu różnych modeli zmienności a rzeczywistą, zdyskontowaną funkcją wypłaty opcji?
- które kryterium – dopasowania do danych historycznych, czy jakości prognostycznych jest korzystniejsze dla trafności wyceny?
- czy uwzględnienie w modelach rozkładów szoków inne niż normalne poprawia wyceny?
- czy ocena przydatności modelu jest wrażliwa na współczynnik *moneyness*?

Wkładem własnym autora jest przegląd wiedzy z zakresu wykorzystania modeli zmienności do wyceny opcji oraz ich aplikacja do szeregów czasowych z rynku polskiego.

Praca ma charakter zarówno teoretyczny jak i empiryczny. Rozważania teoretyczne dotyczą podstawowych pojęć związanych z opcjami i ich wyceną oraz własności szeregów czasowych. W części empirycznej podjęto próbę wychwycenia specyficznych własności szeregów na GPW w Warszawie oraz dopasowano opisywane modele do badanych szeregów. Posługując się kryterium informacyjnym Schwarza i jakością generowanych prognoz wybrano najlepsze modele, które następnie posłużyły do wyceny opcji o różnych cenach wykonania wystawianych na wszystkie możliwe instrumenty bazowe. Podstawowym źródłem wiedzy o modelach zmienności i innych wykorzystywanych w pracy zagadnieniach jest dostępna literatura przedmiotu, notowania i statystyki giełdowe. Literatura wykorzystana w pracy to głównie literatura anglojęzyczna, w mniejszym stopniu (ze względu na jej niedostatek) literatura polskojęzyczna. Wykorzystano statystyki giełdowe dostępne na

stronach [www.gpw.com.pl](http://www.gpw.com.pl). Dane dotyczące notowań z GPW w Warszawie uzyskano za pośrednictwem serwisu [bossa.pl](http://bossa.pl) oraz [stooq.pl](http://stooq.pl). Ponadto wykorzystano dane udostępnione przez KDPW i GPW w Warszawie, a dotyczące parametrów rynku opcji.

Praca składa się z pięciu rozdziałów. Rozdział pierwszy poświęcony został przedstawieniu podstawowych rodzajów finansowych instrumentów pochodnych, ze szczególnym uwzględnieniem opcji, oraz zasad funkcjonowania rynku tych instrumentów. Celem jest wprowadzenie zasadniczych idei, pojęć i informacji, które są wykorzystywane w dalszej części pracy. Kończącą część rozdziału poświęcono na przedstawienie statystyk dotyczących światowego i polskiego rynku instrumentów pochodnych. Przytoczone dane jednoznacznie wskazują na rosnące znaczenie rynku derywatów.

Przedmiotem rozważań w rozdziale drugim są teoretyczne podstawy wyceny opcji. Celem jest umiejscowienie stosowanych w pracy metod wyceny opcji na tle teorii. Przedstawiono podstawowe założenia modeli wyceny opcji. Ponadto w rozdziale zaprezentowano kluczowe dla omawianego zagadnienia pojęcie arbitrażu, bowiem brak arbitrażu stanowi punkt wyjścia do wyceny instrumentów pochodnych zarówno w modelach z czasem dyskretnym jak i ciągłym. Jedną z części rozdziału poświęcono modelowi Blacka-Scholesa oraz wskazano jego ograniczenia, które uzasadniają poszukiwania modelu lepiej odzwierciedlającego rzeczywistość. W ostatniej części rozdziału zaprezentowano ogólny sposób wyceny instrumentów pochodnych w przypadku gdy rynek jest niepełny. Twierdzenia przytaczane są bez dowodów, te można bowiem znaleźć w wielu pozycjach. Uzupełnieniem rozdziału jest dodatek matematyczny, zawierający podstawowe terminy probabilistyczne wykorzystywane w niniejszej pracy

Rozdział trzeci poświęcono na przedstawienie trzech typów modeli zmienności oraz metod ich wykorzystania do wyceny opcji:

- GARCH (uogólnionej autoregresyjnej heteroskedastyczności warunkowej),
- SV (zmienności stochastycznej),
- przełącznikowych typu Hamiltona.

Rozdział czwarty dotyczy specyfiki finansowych szeregów czasowych. Omówiono najczęściej przytaczane w literaturze przedmiotu fakty empiryczne dotyczące szeregów czasowych. Następnie zbadano, które z przytoczonych własności charakteryzują również szeregi czasowe na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Ujęcie specyficznych własności szeregów jest kluczowe dla wyboru modelu, który zostanie wykorzystany do wyceny opcji.

Ostatni, piąty rozdział jest zasadniczą częścią pracy. W rozdziale tym dokonano estymacji modeli zmienności i odrzucono te, których parametry są nieistotne. W kolejnym kroku wybrano modele najlepiej dopasowane do badanych szeregów. W tym celu posłużono się kryterium informacyjnym Schwarzera i jakością generowanych przez model prognoz. Do oceny jakości prognoz wykorzystano błędy prognoz (odnoszone do zmienności zrealizowanej), które umożliwiły budowę rankingów modeli. Następnie tak wyselekcjonowane modele posłużyły do wyceny opcji. Uzyskane wyniki porównano z cenami rynkowymi i cenami uzyskanymi z modelu  $\mathcal{M}^{BS}$ . Przeprowadzona analiza ma służyć weryfikacji postawionych wcześniej hipotez.

W zakończeniu rozprawy ujęto syntetycznie wnioski płynące z przeprowadzonych badań.



## Rozdział I

### Charakterystyka opcji.

Kontrakty terminowe i opcyjnie były zawierane na giełdach towarowych od stuleci. Niektóre źródła literaturowe wspominają nawet o starożytności<sup>1</sup>. Jednak przedmiotem niniejszej pracy są jedynie nowoczesne finansowe instrumenty pochodne, których historia jest znacznie krótsza, bo nieco ponad trzydziestoletnia. Za jej początek uważa się rok 1973<sup>2</sup>, kiedy to ukazują się dwa, uznawane za przełomowe, artykuły autorstwa Fischera Blacka, Myrona Scholesa<sup>3</sup> oraz Roberta Mertona<sup>4</sup>. W artykułach tych zaprezentowano model wyceny opcji. W tym samym roku zainaugurowano działalność wyspecjalizowanej giełdy kontraktów opcyjnych w Chicago (Chicago Board Options Exchange). Od tego czasu nastąpił gwałtowny rozwój rynków instrumentów pochodnych. Obecnie niemal każdy instrument finansowy – akcje, obligacje, indeksy giełdowe, kursy walutowe, stopy procentowe są podstawą jakiegoś instrumentu pochodnego. Nawet instrumenty pochodne często stają się bazą kolejnych derywatyw. W krajach o rozwiniętych rynkach finansowych powołano do życia wyspecjalizowane giełdy, na których handluje się wyłącznie instrumentami pochodnymi, a większość tradycyjnych giełd poszerzyło swoją ofertę i obecnie również umożliwia obrót derywatywami.

W niniejszym rozdziale omówiono podstawowe klasy finansowych instrumentów pochodnych oraz zasady funkcjonowania rynku tych instrumentów. Celem jest wprowadzenie podstawowych idei, pojęć i informacji, które są wykorzystywane w dalszej części pracy. Kończącą część rozdziału poświęcono na przedstawienie statystyk dotyczących światowego i polskiego rynku instrumentów pochodnych. Przytoczone dane jednoznacznie wskazują na rosnące znaczenie rynku derywatyw.

#### 1.1 Instrumenty pochodne

W literaturze funkcjonuje wiele definicji instrumentów pochodnych. Najogólniejsza z nich, sformułowana przez M. Rubinsteina, określa derywatywę jako umowę między dwiema

---

<sup>1</sup> Por. Swan E. J. [2000], *Building the global market. A 4000 Year History of Derivatives*, Kluwer Law International, The Hague

<sup>2</sup> Jajuga K. [2005], *Trzydzieści lat nowoczesnej teorii wyceny instrumentów pochodnych*. Uniwersytet Szczeciński, Zeszyty naukowe nr 389, s. 55

<sup>3</sup> Black. F., Scholes M. [1973], *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, *Journal of Political Economy* 81, ss. 637-659

<sup>4</sup> Merton R.C. [1973], *Theory of rational option pricing*, *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, ss. 141-183

stronami, w której ustalone zostają warunki (w szczególności terminy), na jakich dokonywane będą przepływy pieniężne między stronami<sup>5</sup>.

Zgodnie z powyższą definicją każdy instrument finansowy można potraktować jako derywatywę, nawet akcje, bo przepływy pieniężne związane z ich posiadaniem (dywidenda) uzależnione są od zysków firmy, na którą akcje opiewają. Dlatego też taka definicja jest niepraktyczna. Poniższa, bardziej szczegółowa<sup>6</sup>, umożliwia wydzielenie ze zbioru wszystkich instrumentów finansowych tej klasy, która jest przedmiotem badań w niniejszej pracy.

### **Definicja 1.1.1**

Finansowym instrumentem pochodnym nazywamy każdy instrument finansowy, którego wartość zależy (jest pochodną) od wartości innego instrumentu finansowego, zwanego instrumentem podstawowym lub bazowym.

Instrumenty pochodne można podzielić na trzy podstawowe grupy:

- kontrakty terminowe,
- opcje,
- swapy.

Kontrakt terminowy jest umową, w której jedna ze stron zobowiązuje się do sprzedaży (dostawy) określonej ilości danego instrumentu w ustalonej chwili w przyszłości. Druga strona kontraktu jest zobowiązana do uiszczenia w chwili przyjmowania dostawy z góry określonej ceny – ceny wykonania (*striking price*). Kontrakty terminowe są symetryczne – prawa i obowiązki stron uzupełniają się. O stronie zobowiązanej do sprzedaży mówi się, że zajmuje pozycję krótką (*short position*) w danym kontrakcie terminowym, druga strona umowy natomiast, zajmując pozycję długą (*long position*). Przy zawieraniu kontraktu żadna ze stron nie wnosi opłaty, poza ewentualnymi kosztami manipulacyjnymi, zatem w chwili zawierania kontraktu terminowego jego wartość jest równa zero. Po zawarciu kontraktu, wobec naturalnej zmienności cen instrumentu bazowego, jego wartość ulega zmianom. Dla jednej ze stron jest ona dodatnia, jednocześnie będąc ujemną (ze względu na wspomnianą symetrię) dla drugiej strony. Zwykle w chwili zamykania kontraktu jedna ze stron osiąga zysk, a druga ponosi stratę (o tej samej wartości bezwzględnej). Jeśli cena rynkowa instrumentu bazowego jest wyższa niż cena wykonania kontraktu, strona zajmująca pozycję długą odnosi zysk – ma bowiem możliwość odsprzedaży zakupionego instrumentu na rynku po wyższej cenie. W tej samej sytuacji strona zajmująca pozycję krótką ponosi stratę – zobowiązana jest

---

<sup>5</sup> Rubinstein M. [2000], *Rubinstein on derivatives*, Haas School of Business, University of California, s. 1

<sup>6</sup> Hull J. C. [2002], *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, wyd. 5, s. 1

sprzedać instrument za kwotę niższą od ceny rynkowej. Jeśli natomiast cena instrumentu bazowego jest niższa od ceny wykonania to inwestor w pozycji długiej traci, a w pozycji krótkiej zyskuje.

Na światowych rynkach występują dwa podstawowe typy kontraktów terminowych:

- kontrakty forward (*forward contracts*),
- kontrakty futures (*futures contracts*).

Najistotniejsza różnica między tymi instrumentami dotyczy miejsca i sposobu ich zawierania. Kontrakty forward zawierane są wyłącznie na rynku pozagiełdowym – *over-the-counter market (OTC market)* i są negocjowane indywidualnie między stronami umowy, stąd też funkcjonująca w polskiej literaturze nazwa tych kontraktów – negocjowane kontrakty terminowe. Na rynku *OTC* dilerzy kontaktują się za pomocą sieci teleinformatycznej, a ich rozmowy są archiwizowane na wypadek postępowania dowodowego. Kontrakty forward kończą się z reguły dostawą, ewentualnie rozliczeniem pieniężnym, jeśli instrument bazowy nie jest bezpośrednim przedmiotem obrotu. Na tej własności opiera się inne polskie określenie – kontrakty terminowe rzeczywiste, czyli kończące się obowiązkową dostawą. Należy podkreślić, że żadna ze stron kontraktu nie ma możliwości wycofania się z umowy, czy też dokonać zmian w jej warunkach. Niemniej dla najpopularniejszych kontraktów forward istnieją stosunkowo płynne pozagiełdowe rynki wtórne, na których można zbyć niepotrzebny kontrakt. Termin dostawy jest na ogół dokładnie określony. Strony kontraktu forward przyjmują na siebie ryzyko związane z ewentualnym niewywiązaniem się drugiej stron z umowy, czyli tak zwane ryzyko kontrahenta.

Kontrakty futures natomiast, zawierane są wyłącznie na wyspecjalizowanych giełdach (stąd jedno z polskich określeń - giełdowe kontrakty terminowe). Wszystkie warunki kontraktu futures, za wyjątkiem ceny, są standaryzowane. Cena, bowiem kształtuje się na giełdzie, nie jest negocjowana między stronami kontraktu (co ma miejsce w przypadku kontraktów forward). W ramach standaryzacji muszą być określone między innymi:

- wielkość kontraktu, czyli ilość instrumentów bazowych, na które opiewa pojedynczy kontrakt; wielkość kontraktu powinna być tak określona by zapewnić płynność rynku,
- instrument bazowy, który jest podstawą kontraktu,
- warunki dostawy lub rozliczenia kontraktu, w szczególności określenia wymaga czas dostawy, w przeciwieństwie do kontraktów forward na ogół nie podaje się konkretnego dnia, a okres w którym ma to nastąpić,

- dzienne limity zmian, których celem jest zabezpieczenie się przed atakami spekulantów, jednak takie limity mogą być sztuczną barierą, gdy cena instrumentu bazowego podlega gwałtownym zmianom,
- limity otwartych pozycji, które określają maksymalną ilość pozycji jakie mogą otworzyć inwestorzy dla danego instrumentu bazowego, istnienie tych ograniczeń wynika z potrzeby ograniczenia wpływu spekulantów na rynek.

Ze względu na płynność rynków giełdowych możliwe jest zamknięcie pozycji futures przed datą wygaśnięcia kontraktu poprzez równoczesne zajęcie pozycji odwrotnej (na co kładzie nacisk inne polskie określenie – nierzeczywiste kontrakty terminowe).

Dla właściwego funkcjonowania rynku kontraktów futures niezbędne są izby rozrachunkowe. Podstawowym zadaniem tych instytucji jest niedopuszczenie lub przynajmniej zmniejszenie prawdopodobieństwa wystąpienia niewypłacalności jakiegokolwiek uczestnika rynku. By to osiągnąć, zawarcie kontraktu jest uwarunkowane dokonaniem wpłaty wstępnego depozytu rozliczeniowego, którego wysokość ustala zarząd giełdy. Ponadto, po zakończeniu każdej sesji giełdy rozliczana jest pozycja każdego z inwestorów – procedura ta nazywana jest dzienną aktualizacją depozytu. Jeśli inwestor zajmuje pozycję długą to przy wzroście ceny futures depozyt rozliczeniowy jest powiększany o odpowiednią kwotę (równą iloczynowi liczby długich kontraktów przez wielkość zmiany kursu futures w danym dniu). Jednocześnie salda depozytów rozliczeniowych inwestorów zajmujących pozycje krótkie w tym samym kontrakcie są obniżane o kwoty przekazane na rachunki inwestorów zajmujących długie pozycje. Oczywiście pozycja izby jest neutralna – łączna liczba pozycji długich jest równa łącznej liczbie pozycji krótkich.

Jeśli wartość salda depozytu rozliczeniowego danego inwestora spadnie poniżej określonego poziomu, wzywany jest on do jego uzupełnienia. W wypadku nie wywiązania się przez uczestnika rynku z obowiązku uzupełnienia depozytu, jego pozycja jest automatycznie zamykana przez izbę rozrachunkową.

Konsekwencją istnienia izb rozrachunkowych jest eliminacja ryzyka kontrahenta przy równoczesnym pojawieniu się ryzyka stopy procentowej (część środków pieniężnych stron kontraktu jest zamrożona na kontach izby rozrachunkowej). Szczegółowe regulacje rynków futures są związane z ich silnie spekulacyjnym charakterem.

Kontrakty terminowe forward i futures mają wiele cech wspólnych, ale również kilka istotnych różnic, które syntetycznie zebrano w tabeli 1.1.

Tabela 1.1. Zestawienie najistotniejszych cech odróżniających kontrakty terminowe forward i futures.

kontrakty forward	kontrakty futures
- zawierane wyłącznie na rynkach pozagiełdowych ( <i>OTC</i> ),	- zawierane wyłącznie na rynkach giełdowych,
- nie standaryzowane, ustalane w trakcie negocjacji między stronami	- standaryzowane,
- zazwyczaj jest jedna określona data wykonania kontraktu,	- na ogół strony mają kilka dni na realizację kontraktu,
- rozliczenie następuje na końcu bez udziału izby rozrachunkowej,	- rozliczanie codzienne, przy udziale izb rozrachunkowych,
- dostawa lub rozliczenie pieniężne najczęściej dochodzi do skutku,	- najczęściej dochodzi do zamknięcia pozycji przed wygaśnięciem kontraktu,

Zródło: opracowanie własne

Opcją nazywamy instrument finansowy dający nabywcy (posiadaczowi) prawo, ale nie obowiązek do wykonania określonej transakcji po z góry ustalonej cenie<sup>7</sup>.

Ze względu na rodzaj wykonywanej transakcji opcje dzieli się na:

- opcje kupna (*call option*),
- opcje sprzedaży (*put option*).

Inwestor znajduje się w pozycji długiej, jeśli nabył opcję (kupna lub sprzedaży), a w pozycji krótkiej, gdy opcje wystawił. Opcja jest instrumentem pochodnym niesymetrycznym - strona, która zajmuje pozycję krótką ma obowiązek wykonania opcji na ewentualne żądanie inwestora zajmującego pozycję długą.

Cena obowiązująca przy transakcji, na którą opiewa opcja to cena wykonania (*striking price*). Iloraz ceny instrumentu bazowego w momencie wykonania ( $S_T$ ) i ceny wykonania ( $K$ ) nazywany jest współczynnikiem *moneyness* (czyli  $moneyness = \frac{S_T}{K}$ ). Cena opcji (*premium*), to kwota, którą nabywca opcji płaci wystawcy w chwili zawierania kontraktu. Data, do której z nabytego prawa można skorzystać to data wygaśnięcia (*expiration date*). Dochód inwestora związany z wykonaniem opcji nosi nazwę funkcji dochodu lub wypłaty (*pay-off*).

Ze względu na czas, w jakim opcja może zostać wykonana można wyróżnić:

- opcje europejskie,
- opcje amerykańskie,
- opcje bermudzkie (atlantyckie).

<sup>7</sup>por. Neftci S. N. [2000], *An introduction to the Mathematics of financial Derivatives*, Academic Press, s.7  
Tarczyński W. [2003], *Instrumenty pochodne na rynku kapitałowym*, PWE, Warszawa, s. 15

W opcjach typu europejskiego realizacja jest możliwa jedynie w ustalonej chwili w przyszłości – dacie wygaśnięcia opcji. W opcjach typu amerykańskiego wykonanie może nastąpić w dowolnym momencie przed ustaloną datą wygaśnięcia. Z kolei opcje bermudzkie mają określone terminy, w których może nastąpić ich realizacja.

Terminologia ta nie ma odniesienia geograficznego, jest czysto umowna. Opcje europejskie są przedmiotem handlu na całym świecie, a nie tylko w Europie. Podobnie rzecz ma się z pozostałymi typami opcji.

W przypadku europejskich opcji kupna posiadacz skorzysta z przysługującego mu prawa, gdy cena wykonania jest niższa od ceny instrumentu bazowego, zysk z takiej operacji jest równy różnicy między wspomnianymi cenami, pomniejszonej o premię. Wystawca europejskiej opcji kupna osiąga korzyści w sytuacji odwrotnej.

Posiadacz europejskiej opcji sprzedaży zrealizuje swoje prawo, gdy cena wykonania będzie wyższa od instrumentu bazowego. Wówczas jego dochód będzie równy różnicy między tymi cenami, pomniejszonej o premię. Oczywiście dla wystawcy opcji korzystna będzie sytuacja odwrotna.

Funkcja wypłaty europejskiej opcji kupna jest określona wzorem

$$\max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+, \quad (1.1)$$

natomiast europejskiej opcji sprzedaży

$$\max\{K - S_T, 0\} = (K - S_T)^+, \quad (1.2)$$

gdzie  $S_T$  to cena instrumentu bazowego w chwili wygaśnięcia, a  $K$  to cena wykonania.

W zależności od relacji pomiędzy ceną instrumentu bazowego w momencie wygaśnięcia i ceną wykonania opcja kupna nazywana jest:

- *in-the-money*, jeżeli wartość instrumentu bazowego jest większa od ceny wykonania ( $moneyness > 1$ ),
- *out-of-the-money*, gdy wartość instrumentu bazowego jest mniejsza od ceny wykonania ( $moneyness < 1$ ),
- *at-the-money*, jeśli ceny instrumentu bazowego i wykonania są równe ( $moneyness = 1$ ).

W przypadku opcji sprzedaży mówimy, że opcja jest:

- *in-the-money*, jeżeli wartość instrumentu bazowego jest mniejsza od ceny wykonania,
- *out-of-the-money*, gdy wartość instrumentu bazowego jest większa od ceny wykonania,
- *at-the-money*, podobnie jak w przypadku opcji kupna, jeśli ceny instrumentu bazowego i wykonania są równe.

Powyższe pojęcia można rozszerzyć na dowolną chwilę przed terminem wygaśnięcia.

Możliwość realizacji opcji przed terminem wygaśnięcia, jaka istnieje w opcji amerykańskiej komplikuje rozważania. Na ogół własności opcji europejskich rozszerza się przy pewnych założeniach na opcje amerykańskie. Dlatego też, uważa się powszechnie, że amerykańska opcja kupna na instrument niegenerujący dodatkowych przepływów jest równoważna europejskiej opcji kupna o tej samej cenie wykonania i tym samym terminie wygaśnięcia. Oznacza to, że racjonalny inwestor nie powinien realizować amerykańskiej opcji kupna przed terminem jej wygaśnięcia – powinien ją trzymać do daty wygaśnięcia lub sprzedać w dowolnym momencie przed tą datą. Dwa główne argumenty jakie przywoływane są w literaturze na uzasadnienie takiego postępowania to<sup>8</sup>:

1. Inwestor, który posiada opcje kupna jest zabezpieczony przed spadkiem wartości instrumentu bazowego poniżej ceny wykonania. Zrealizowanie opcji równoznaczne jest z dobrowolnym pozbyciem się ubezpieczenia przed niekorzystną zmianą ceny.
2. Jeśli posiadacz opcji kupna wykorzysta przysługujące mu prawo do nabycia instrumentu bazowego za cenę wykonania, to traci tym samym odsetki od wydanej kwoty za czas pomiędzy wcześniejszym wykonaniem a terminem wygaśnięcia.

Sytuacja jest zupełnie inna w przypadku amerykańskiej opcji sprzedaży, opcja taka zawiera, bowiem premię związaną z możliwością jej wcześniejszej realizacji (*early exercise premium*). Premia związana jest z drugim argumentem przywoływanym powyżej – wykonując opcję sprzedaży inwestor zyskuje na zmianie wartości pieniądza w czasie pomiędzy wcześniejszym wykonaniem a terminem wygaśnięcia. Ów zysk uważa się za większy niż strata wynikająca z utraty zabezpieczenia. Formalnie premia za wcześniejszą realizację definiowana jest jako różnica między ceną opcji amerykańskiej i równoważnej jej opcji europejskiej.

Instrumentami bazowymi dla opcji finansowych są najczęściej: akcje, waluty, indeksy giełdowe, stopy procentowe, kontrakty futures, a także inne opcje.

Gdy wystawca opcji kupna posiada odpowiednią ilość instrumentu bazowego to nazywa się ją opcją zabezpieczoną (*covered calls*), w przeciwnym wypadku opcję kupna określa się jako niezabezpieczoną (*naked calls*). Gdy instrumentu bazowego opcji nie można dostarczyć (np. indeksu) automatycznie mamy do czynienia z niezabezpieczoną opcją kupna.

Cenę opcji można rozłożyć na dwie składowe:

- wartość wewnętrzną (*intrinsic value*),

---

<sup>8</sup> por. Bingham N. H., Kiesel R. [2004], *Risk neutral valuation. Pricing and Hedging of Financial Derivatives*. Springer, ss. 14-15

– wartość dodatkową (*time value*).

Wartość wewnętrzną dla opcji kupna można wyznaczyć ze wzoru (1.3), a sprzedaży ze wzoru (1.4):

$$\text{wartość wewnętrzna} = \max\{S_t - K, 0\}, \quad (1.3)$$

$$\text{wartość wewnętrzna} = \max\{K - S_t, 0\}, \quad (1.4)$$

gdzie  $S_t$  to cena instrumentu bazowego w chwili  $t$ , a  $K$  to cena wykonania. Zatem opcja ma dodatnią wartość wewnętrzną wtedy i tylko wtedy, gdy jest w danej chwili *in-the-money*.

Wartość dodatkowa związana jest z czasem pozostałym do wygaśnięcia opcji. Wartość dodatkowa jest równa zero w chwili wygaśnięcia lub w chwili optymalnej do realizacji opcji.

Opcje są przedmiotem handlu zarówno na rynkach giełdowych<sup>9</sup> jak i pozagiełdowych. Te notowane na giełdzie muszą być wystandaryzowane, a więc między innymi mieć określony instrument bazowy, na które opiewają, datę wygaśnięcia, podawaną na ogół jako miesiąc i cenę wykonania. Bezpieczeństwo notowań mają zapewnić ograniczenia limitujące potencjalną aktywność inwestorów. Typowe przykłady takich ograniczeń, chroniących przed atakami spekulacyjnymi, to limity zaangażowania oraz limity realizacji. Limity zaangażowania (*position limits*) określają maksymalną dopuszczalną liczbę otwartych pozycji, którą może zająć każdy z inwestorów po jednej ze stron rynku (pozycje długie w opcjach kupna i krótkie w opcjach sprzedaży liczone są łącznie)<sup>10</sup>. Limity realizacji (*exercise limits*) ograniczają liczbę opcji, które uczestnik rynku może zgłosić w określonym przedziale czasu.

Również z bezpieczeństwem jest ściśle związane funkcjonowanie opcyjnych izb rozrachunkowych. Do zawarcia kontraktu kupna lub sprzedaży opcji między dwiema stronami w wyniku złożenia odpowiadających sobie zleceń dochodzi za pośrednictwem izby. Kupuje ona opcje od jednej ze stron i jednocześnie sprzedaje ją drugiej. Oznacza to, że izba staje się faktycznie stroną w obu transakcjach. Zatem ryzyko nie wywiązania się którejkolwiek ze stron z warunków umowy spada na izbę. By to ryzyko zmniejszyć, uczestnikom transakcji stawia się szereg warunków. Najistotniejszy z nich to obowiązek złożenia zabezpieczenia przy zajmowaniu pozycji krótkiej (gotówkowego lub w innej dopuszczalnej postaci) na specjalny rachunek zabezpieczający. Wysokość zabezpieczenia określają przepisy konkretnego rynku giełdowego. Obowiązek wniesienia zabezpieczenia gotówkowego nie dotyczy jedynie wystawienia zabezpieczonych opcji kupna. Należy dodać, że typowe warunki giełdowych kontraktów opcyjnych nie uwzględniają ewentualnej dywidendy, uwzględniają natomiast podział akcji.

<sup>9</sup> Lista najważniejszych giełd na których obraca się opcjami znajduje się w Dodatku 1.

<sup>10</sup> Dla największych giełd limity zaangażowania wynoszą 75.000 kontraktów



Na rynkach pozagiełdowych funkcjonuje również mnóstwo niestandardowych opcji określanych wspólnym mianem opcji egzotycznych. Termin ten został użyty po raz pierwszy w roku 1990 przez Rubinsteina<sup>11</sup>, ale dotąd nie wypracowano powszechnie akceptowalnej definicji. Najczęściej przyjmuje się, że opcje egzotyczne to instrumenty pochodne mając odmienną strukturę funkcji dochodu od standardowych opcji, gdzie za standardowe uważa się opcje europejskie i amerykańskie.

Udział opcji egzotycznych w obrotach ogółem jest niewielki, lecz ze względu na ich atrakcyjność są ważnym uzupełnieniem portfeli dla wielu inwestorów. Jako główne przyczyny tworzenia niestandardowych instrumentów pochodnych należy wskazać argumenty podatkowe, prawne, księgowo, ograniczenia narzucane przez regulatorów rynków i wreszcie względy ekonomiczne.

Ostatnim wspomnianym typem instrumentów pochodnych są swapy. Swap to umowa jednoczesnego kupna i sprzedaży przepływów pieniężnych według z góry ustalonych zasad. Najczęstszymi instrumentami bazowymi, których dotyczą swapy są stopy procentowe i waluty. W obrocie pojawiają się również swapcje (*swaption*) będące opcją na swap. Należy podkreślić, że teoretycznie można rozpatrywać swapy i swapcje jako połączenie kontraktów forward lub opcji. Taka dekompozycja znacznie ułatwia wycenę tych instrumentów finansowych, a także wskazuje na szczególną rolę, jaką pełnią kontrakty forward i opcje – są podstawowymi składnikami budującymi bardziej złożone instrumenty pochodne.

Dość często w obrocie na rynkach finansowych znajdują się warranty<sup>12</sup>. Są to finansowe instrumenty pochodne o konstrukcji zbliżonej do opcji. Istotna różnica polega na tym, że jest to papier wartościowy, którego emitentem może być określona osoba prawna (np. bank, dom maklerski)<sup>13</sup>. Emitent warrantu zawsze przyjmuje na siebie obowiązek realizacji określonej transakcji, zajmuje więc pozycję krótką. Zatem inwestor nabywając warrant może zająć tylko i wyłącznie pozycję długą. W konsekwencji, do prawidłowego obrotu warrantami nie jest konieczne wnoszenie depozytu rozliczeniowego - emitent swoim prestiżem gwarantuje wykonanie podjętego zobowiązania (sama realizacja zobowiązań odbywa się poprzez izbę rozrachunkową). Dlatego warranty wprowadzane są do obrotu jako jedne z pierwszych instrumentów pochodnych na młodych, nie w pełni rozwiniętych, rynkach kapitałowych.

---

<sup>11</sup> Rubinstein M. [1991], *Exotic Options*, Finance Working Paper 220, Haas School of Business, University of California, Berkeley

<sup>12</sup> Mianem warrantu określa się również dołączane do papieru wartościowego prawo dające posiadaczowi ograniczoną lub nieustającą możliwość kupna przyszłych emisji tego samego emitenta.

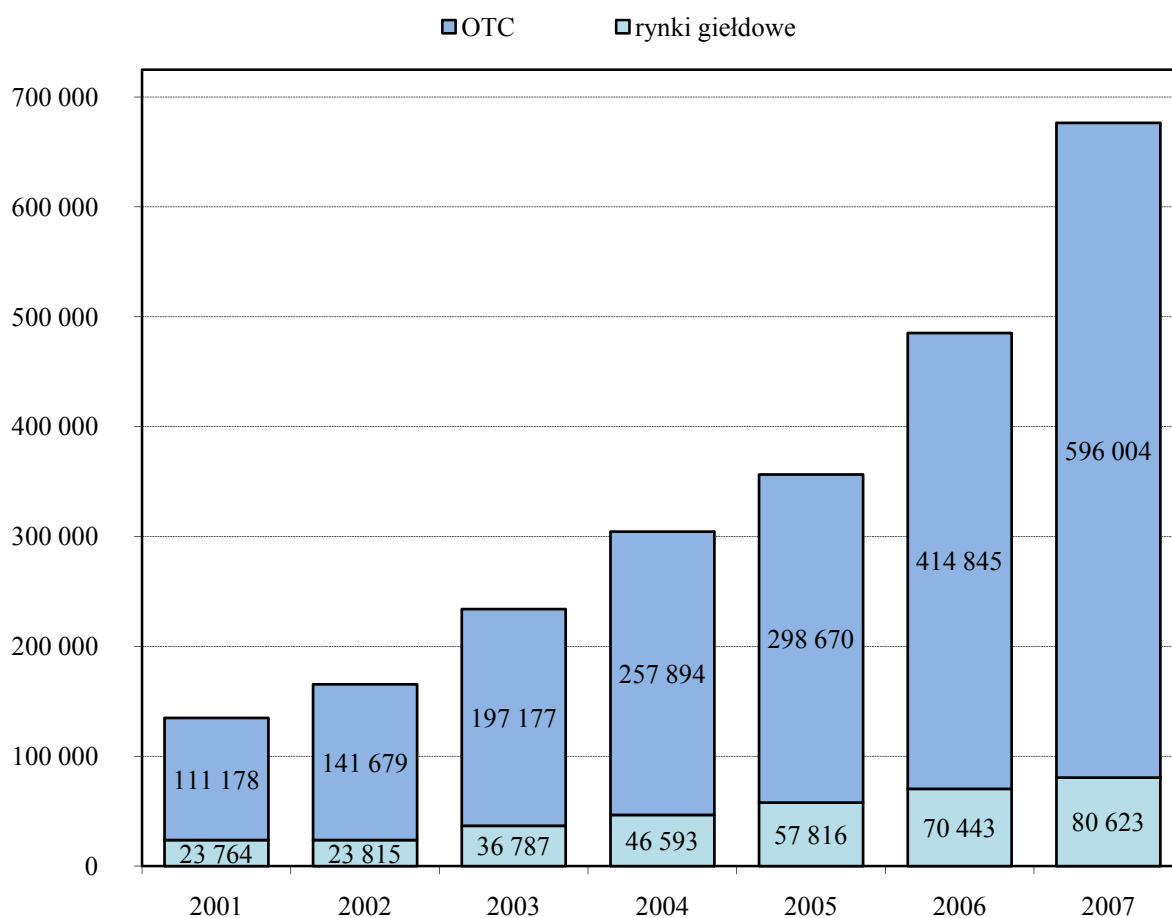
<sup>13</sup> Tarczyński W., Zwolankowski M. [1999], *Inżynieria finansowa*, Agencja Wydawnicza Placet, Warszawa, s.101

Lista wymienionych i omówionych instrumentów pochodnych nie jest zamknięta. Można stworzyć instrumenty bardziej skomplikowane i lepiej dopasowane do potrzeb inwestora. Jedynym ograniczeniem jest wyobraźnia i reakcja rynku na nową propozycję.

## 1.2 Kontrakty terminowe i opcje na świecie

Rynek instrumentów pochodnych dynamicznie się rozwija. Rysunek 1.1 pokazuje znaczny wzrost wartości emisji jaki nastąpił w ostatnich czasie. Dla rynku *OTC* w latach 2001-2007 wzrost ten wyniósł 536%, a dla rynków regulowanych 339%. Dominującym rynkiem jest rynek *OTC* – wartość znajdujących się w obrocie instrumentów pochodnych na tym rynku jest ponad siedmiokrotnie większa niż na rynkach regulowanych. Jako główną przyczynę większej popularności instrumentów rynku *OTC* należy wskazać większą elastyczność tych instrumentów – ich warunki są negocjowane, a przez to lepiej dostosowane do potrzeb inwestorów.

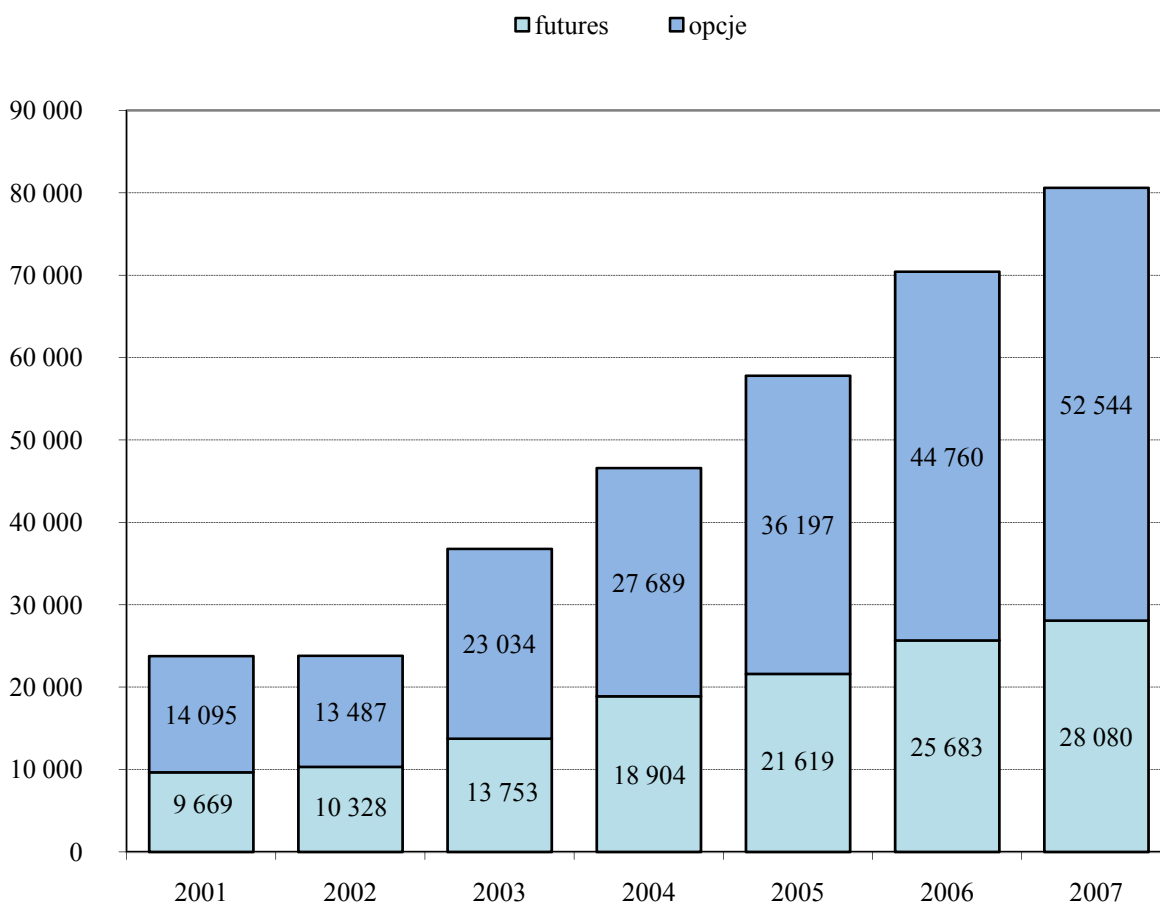
Rysunek 1.1. Wartość emisji instrumentów pochodnych w latach 2001-2007 (w mld USD).



Źródło: Opracowanie własne na podstawie *BIS Quarterly Review*, 2003-2008

Na rozwój rynku giełdowego (rysunek 1.2) nieco większy wpływ miały kontrakty opcyjne (wzrost o 373% w badanych latach) niż kontrakty terminowe (wzrost o 290%). Ponadto wartość wyemitowanych opcji jest prawie dwa razy większa niż wartość futures. Chwilowa stagnacja jaka miała miejsce w roku 2002 związana jest z kryzysem na rynkach giełdowych po wydarzeniach 11 września 2001 roku.

Rysunek 1.2. Wartość emisji instrumentów pochodnych na rynkach giełdowych w latach 2001-2007 (w mld USD).

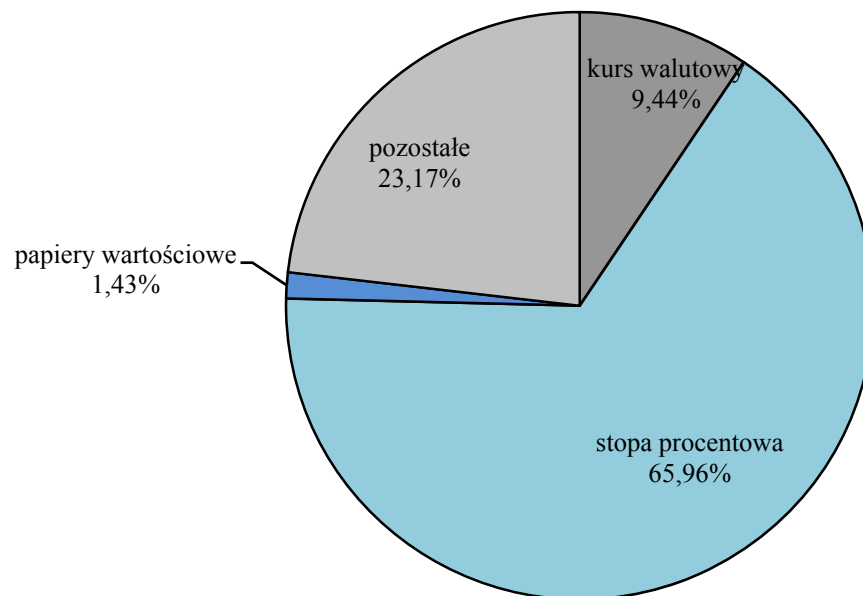


Źródło: Opracowanie własne na podstawie *BIS Quarterly Review*, 2003-2008

Obecnie większość kontraktów pochodnych na rynkach pozagiełdowych jest zawierana na stopy procentowe, stanowią one niemal 66% wartości wszystkich kontraktów (rysunek 1.3). W dalszej kolejności są kontrakty dla których instrumentem bazowym są kursy walut (9,4%). Natomiast derywatywy na papiery wartościowe to niespełna 1,5% całego rynku. Przewaga instrumentów pochodnych na stopy procentowe jest jeszcze większa dla rynku giełdowego (rysunek 1.4) – stanowią one niemal 90% wszystkich transakcji. Pozostałe

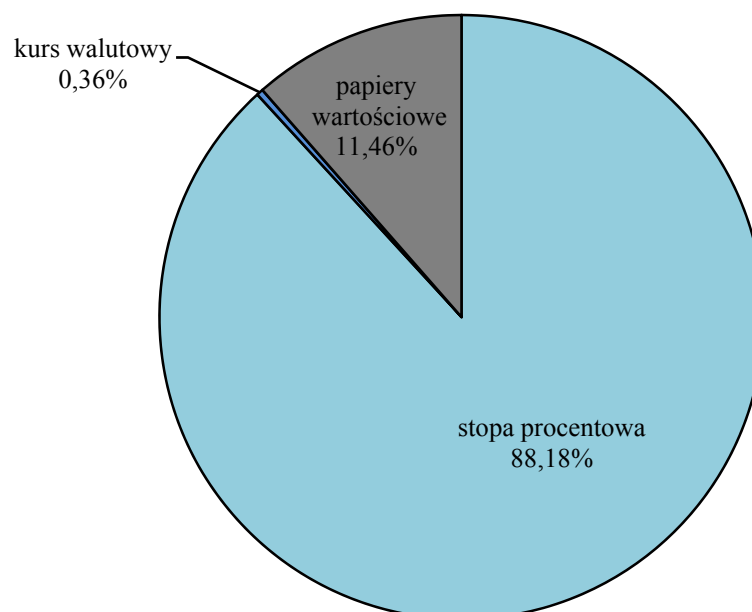
derywatywy wystawiane są głównie na papiery wartościowe (około 11,5%). Kurs walutowy jest instrumentem bazowym dla mniej niż pół procenta instrumentów. Odmienna struktura dla rynku pozagiełdowego wynika ze szczególnie dużej aktywności na nim banków, które by zabezpieczyć się przed ryzykiem kursowym są często stronami transakcji terminowych na waluty.

Rysunek 1.3. Struktura transakcji derywatywami na rynku pozagiełdowym w 2007 roku.



Źródło: Opracowanie własne na podstawie *BIS Quarterly Review*, 2003-2008

Rysunek 1.4. Struktura transakcji derywatywami na rynku giełdowym w 2007 roku.



Źródło: Opracowanie własne na podstawie *BIS Quarterly Review*, 2003-2008

Do największych giełd kontraktów opcyjnych i futures należą (tabela 1.2):

- w Europie: EUREX, EURONEXT.liffe, London Metal Exchange (LME), OMX Exchanges,
- w Ameryce Północnej: Chicago Mercantile Exchange (CME), Chicago Board of Trade (CBOT), New York Mercantile Exchange (NYMEX), Mexican Derivatives Exchange (MexDer), New York Board of Trade (NYBOT),
- w Azji: National Stock Exchange of India (NSE), Dalian Commodity Exchange (DCE), Tokyo Commodity Exchange (TOCOM), Korea Exchange (KSE)
- w Ameryce Południowej: Bolsa de Mercadorias y Futuros a Sao Paulo (BMF), A Bolsa do Brasil (BOVESPA),
- w Australii: Sydney Futures Exchange (SFE),
- w Afryce: JSE Securities Exchange South Africa<sup>14</sup>.

Tabela 1.2. Największe giełdy kontraktów opcyjnych i futures (według liczby zawartych kontraktów).

Lp.	Nazwa giełdy	liczba kontraktów
1	Korea Exchange	2 593 088 445
2	Eurex	1 248 748 152
3	Chicago Mercantile Exchange	1 090 351 711
4	Euronext.liffe	757 926 860
5	Chicago Board of Trade	674 651 393
6	Chicago Board Options Exchange	468 249 301
7	International Securities Exchange	448 695 669
8	Bovespa	268 620 460
9	New York Mercantile Exchange	204 611 537
10	American Stock Exchange	201 631 832
11	Bolsa de Mercadorias & Futuros	199 446 464
12	Philadelphia Stock Exchange	162 596 932
13	Pacific Exchange	144 780 498
14	National Stock Exchange of India	131 641 692
15	Mexican Derivatives Exchange	108 177 276
16	OMX Exchanges	103 509 936
17	Dalian Commodity Exchange	99 174 714
18	Taiwan Futures Exchange	92 659 768
19	London Metal Exchange	78 628 852
20	Boston Options Exchange	78 202 185
21	Tel-Aviv Stock Exchange	70 088 945
22	Sydney Futures Exchange	63 324 966
23	The Tokyo Commodity Exchange	61 814 289
24	JSE Securities Exchange South Africa	51 318 175
...	...	...
43	GPW w Warszawie	5 587 515

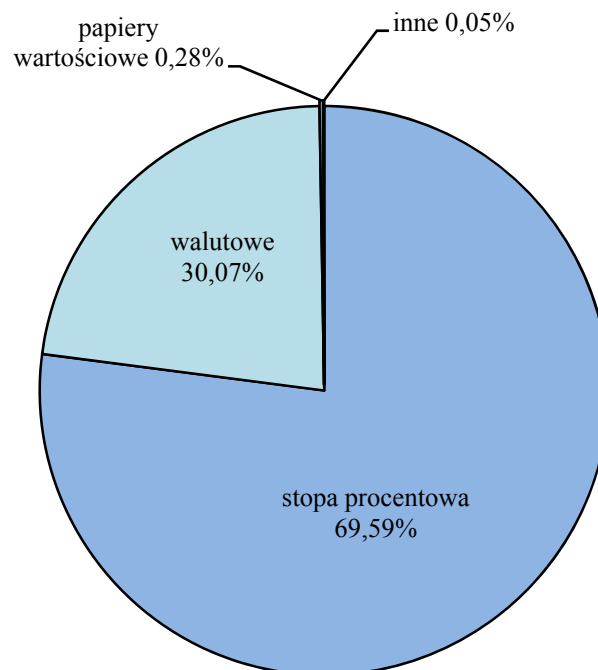
Źródło: Future Industry Association 2008

<sup>14</sup> Pełniejszą listę można znaleźć w Dodatku 1

### 1.3 Kontrakty terminowe i opcje w Polsce.

W Polsce podobnie jak na całym świecie finansowe instrumenty pochodne są przedmiotem obrotu zarówno na rynku giełdowym jak i pozagiełdowym. Porównanie danych z tabeli 1.4 i 1.6 potwierdza inną globalną tendencję - instrumenty rynku *OTC* cieszą się dużo większą popularnością. Na większą elastyczność tych instrumentów dodatkowo w Polsce nakłada się nie w pełni rozwinięty rynek kapitałowy, podlegający ciągłym przemianom, o stosunkowo ubogiej ofercie.

Rysunek 1.5. Struktura transakcji terminowych na rynku międzybankowym w 2006 roku.



Źródło: opracowanie własne na podstawie *Sytuacja finansowa banków w I półroczu 2007r. Synteza*. GINB, październik 2007

Polski pozagiełdowy rynek instrumentów pochodnych tworzony jest głównie przez banki. Głównym przedmiotem ich zainteresowania są instrumenty pochodne na stopę procentową i kurs walutowy (rysunek 1.5), inne rodzaje derywatów stanowią marginalny część obrotu (poniżej 0,35%). Jest to ściśle związane z faktem, że operacje walutowe i związane ze stopą procentową należą do podstawowych obszarów działalności banków i tym samym są głównym źródłem ryzyka, przed którym zabezpieczać mają instrumenty pochodne. Wartość zawieranych przez banki transakcji na rynkach derywatów systematycznie wzrasta (tabela 1.3) jednak dynamika wzrostu jest mniejsza niż na świecie.

Tabela 1.3. Wartość transakcji banków zawieranych na rynkach instrumentów pochodnych (w mln PLN).

	2006	2005	2004	2003
<b>transakcje terminowe ogółem, w tym:</b>	2139668	1602700	1384400	1304300
- stopy procentowej	1649415	1163300	966100	902700
- walutowe	485431	436600	414500	399300
- papierów wartościowych	4822	2300	3200	2300
<b>Opcje, w tym:</b>	84159	79600	52300	45200
- giełdowe	1590	600	100	0
- pozagiełdowe	82569	79000	52200	45200
<b>Inne instrumenty</b>	2500	1800	4200	2100

Źródło: opracowanie własne na podstawie *Sytuacja finansowa banków. Synteza*. GINB, 2004,2005, 2006

Pierwszymi instrumentami pochodnymi notowanymi w Polsce na rynku giełdowym były wprowadzone przez Giełdę Papierów Wartościowych w Warszawie (GPW) kontrakty futures na indeks WIG20 (notowania rozpoczęto 16 stycznia 1998). Kontrakty te stały się w krótkim czasie bardzo popularne, o czym najlepiej świadczy dynamika wzrostu obrotów i liczba otwartych pozycji. Zachęcone sukcesem władze giełdy wprowadzały do obrotu kolejne instrumenty pochodne (tabela 1.4). Obecnie w Polsce są dwie giełdy, na których przedmiotem obrotu są finansowe instrumenty pochodne – wspomniana GPW w Warszawie oraz Warszawska Giełda Towarowa (WGT). W ofercie GPW są:

- 1) kontrakty futures:
  - a) indeksowe (na indeksy WIG20, TechWIG i MIDWIG),
  - b) walutowe (na kurs USD i EUR),
  - c) na akcje spółek (TP SA, PKN Orlen, Elektrim, Agora, KGHM, Pekao SA, BRE Bank, Prokom i PKO BP.),
  - d) na obligacje skarbowe,
- 2) jednostki indeksowe MiniWIG, będące w istocie kontraktem futures, którego data wygaśnięcia ustalona została na ostatni dzień sesyjny grudnia 2025, a cena wykonania równa jest wartości indeksu WIG20 w dniu nabycia (wystawienia) tego instrumentu; instrumenty te wprowadzone zostały do obrotu głównie z myślą o drobnych inwestorach, jednak po początkowym sukcesie ich obecna popularność jest niewielka,
- 3) opcje:
  - a) indeksowe (na indeks WIG20),
  - b) na akcje spółek (PKN Orlen, Pekao SA, TP SA, KGHM, Prokom),

- 4) warranty (które mimo, że są w ofercie, to z braku zainteresowania potencjalnych emitentów nie są przedmiotem handlu, ostatnie serie warrantów były notowane 16 grudnia 2005).

Tabela 1.4. Instrumenty pochodne na GPW w Warszawie.

Instrument pochodny		Instrument bazowy	Data wprowadzenia
Kontrakty terminowe	indeksowe	WIG20	16 stycznia 1998
		TechWIG	1 sierpnia 2000
		MIDWIG	18 luty 2002
	na akcje	TP SA, PKN Orlen, Elektrim	22 stycznia 2001
		Pekao SA, KGHM, BRE Bank, Agora, Prokom	22 października 2001
		BPH	18 marca 2002
		Millenium, BZ WBK	24 marca 2003
		PKO BP	11 lipca 2005
	walutowe	USD/PLN	25 września 1998
		EUR/PLN	31 maja 1999
obligacje	Hipotetyczna obligacja o kuponie 6%	14 luty 2005	
opcje	indeksowe	WIG20	22 września 2003
	na akcje	PKN Orlen, Pekao SA, TP SA, KGHM, Prokom	17 października 2005
MiniWIG20		WIG20	26 listopada 2001

Zródło: GPW w Warszawie

Z kolei WGT wprowadziła do obrotu

- 1) kontrakty futures:
  - a) walutowe (na kurs USD, EUR, CHF, EUR/USD, EUR/HUF, EUR/CZK),
  - b) procentowe (na stopy 1M WIBOR, 3M WIBOR),
  - c) na obligacje skarbowe (2, 5 i 10 letnie),
- 2) opcje na walutowe kontrakty futures (wszystkie wymienione wyżej za wyjątkiem EUR/HUF, EUR/CZK).

Pomiędzy oferowanymi przez obie giełdy instrumentami pochodnymi istnieje kilka podstawowych różnic, dotyczących między innymi nominalnej kwoty kontraktu, sposobu rozliczenia oraz sposobu naliczania depozytu zabezpieczającego. Na GPW kontrakty



terminowe rozliczane są wyłącznie pieniężnie. Na WGT istnieje natomiast możliwość rozliczenia także poprzez fizyczną dostawę (dotyczy to kontraktów futures na obligacje skarbowe). Na obu giełdach odmienny jest również sposób naliczania depozytu początkowego. Dla kontraktów będących przedmiotem obrotu na GPW depozyt początkowy ustalany jest procentowo przez Izbę Rozrachunkowa Instrumentów Pochodnych (IRIP), działająca jako odrębny organ przy Krajowym Depozycie Papierów Wartościowych (KDPW).

Tabela 1.5. Wartość transakcji zawieranych na rynku instrumentów pochodnych na GPW w Warszawie (w mln PLN).

	2007	2006	2005	2004	2003	2002	2001
<b>kontrakty terminowe</b>	662876	377407	238025	125494	116201	77334	98646
<b>(ogółem) w tym:</b>							
- walutowe	332	208	420	272	523	482	1155
na EUR	38	51	92	113	357	235	565
na USD	294	157	328	159	166	247	590
- indeksowe	659403	369739	225490	123136	9733,8	5689	4988,1
na WIG20	657676	369378	225296	122192	9516	5541	4962
na TechWIG	213	279	105	102	2,8	4	26,1
na MIDWIG	1514	92	89	842	215	144	-
- na akcje	2740,2	4823,7	5467,8	2085,2	1758	100,6	69,8
- na obligacje	399,8	2656,94	6646,37	-	-	-	-
<b>opcje ogółem, w tym:</b>	28206	19453	11556	2786	636	-	-
- na WIG20	28202	18849	11370	2786	636	-	-
- na akcje	4	604	186	-	-	-	-
<b>Jednostki indeksowe</b>	15,84	10,82	8,0	15,6	33,9	61,7	5,6
<b>MINIWIG20</b>							

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GPW

Na WGT natomiast, depozyt początkowy ma stałą wartość wyrażoną w PLN. Porównując wysokości depozytów początkowych podobnych kontraktów walutowych, będących przedmiotem obrotu na obu giełdach, można zauważyć przewagę WGT – depozyty te są znacznie niższe, lecz mimo tej przewagi obrót kontraktami terminowymi utrzymuje się na niskim poziomie.

Najbardziej rozwiniętym segmentem regulowanego rynku instrumentów pochodnych jest rynek kontraktów futures na indeksy giełdowe. Stanowi on 94% obrotów na rynku

terminowym GPW. Drugie, co do wielkości udziały miały opcje, ale było to zaledwie 2,5%. Na ten udział złożyły się przede wszystkim opcje na WIG20, bowiem opcje na akcje nie zdobyły uznania wśród inwestorów i ostatecznie GPW zawiesiła obrót tymi instrumentami.

Giełdowy rynek instrumentów pochodnych w Polsce wciąż jest rynkiem rozwijającym się, a w rozwoju wciąż napotyka na wiele barier rozwojowych. Należą do nich przede wszystkim:

- słaba znajomość rynków pochodnych,
- bariera psychologiczna inwestorów,
- konkurencja rynku międzybankowego,
- niska płynność rynku,
- brak popytu ze strony inwestorów instytucjonalnych,
- bariery prawne,
- wysokie koszty transakcyjne<sup>15</sup>.

Polski rynek kapitałowy jest rynkiem młodym, na którym znajomość mechanizmów funkcjonowania jest niepełna. Wśród inwestorów dominuje przekonanie o wysokiej ryzykowności instrumentów pochodnych. Wiele osób traktuje te instrumenty jedynie jako narzędzie spekulacji, nie uświadamiając sobie, że mogą one również służyć do skutecznego zabezpieczenia się przed ryzykiem. Ze słabą znajomością rynku instrumentów pochodnych ściśle powiązana jest bariera psychologiczna. Derywatywy postrzegane jako wysoce spekulacyjne, wywołują niechęć u inwestorów z wysoką awersją do ryzyka.

Z przytoczonych statystyk dotyczących aktywności banków na rynku instrumentów pochodnych wynika, że mogłyby one stać się znaczącymi graczami na rynku giełdowym. Jednak płynny rynek międzybankowy niemal w pełni zaspokaja potrzeby banków w tym zakresie. Nie ma znaczenia przewaga rynku giełdowego w postaci istnienia izby rozliczeniowej eliminującej ryzyko kredytowe, bo na rynku międzybankowym stronami są instytucje cieszące się wysokim prestiżem, które same dbają o wywiązywanie się ze zobowiązań zawartych za pomocą instrumentów pochodnych. Decydująca wydaje się być natomiast niska płynność rynku giełdowego (wyjątek stanowią futures na indeks WIG20). GPW publikuje roczne wskaźniki płynności dla poszczególnych derywatów<sup>16</sup>, tabela 1.6 zawiera wartości tego wskaźnika. Niska płynność powoduje, że banki nie są zainteresowani

---

<sup>15</sup> Grąt A. [2004], *Rozwój giełdowych instrumentów pochodnych w Polsce na tle tendencji światowych*, w: Bank i Kredyt 4, ss. 13-14

<sup>16</sup> Wskaźnik płynności liczony jest jako procentowy udział obrotów na rynku pochodnych do wartości obrotów instrumentu bazowego na rynku kasowym.

zawieraniem transakcji, składanie zleceń mogłoby, bowiem powodować istotne zmiany cen rynkowych, a to z kolei groziłoby stratami. Ponadto niski wskaźnik płynności opcji na akcje był jedną z przyczyn bezterminowego zawieszenia obrotu tymi instrumentami 4 lipca 2007 roku.

Tabela 1.6. Wielkość wskaźnika płynności dla instrumentów pochodnych notowanych na GPW w Warszawie.

<b>nazwa instrumentu</b>	<b>2007</b>	<b>2006</b>	<b>2005</b>	<b>2004</b>	<b>2003</b>	<b>2002</b>	<b>2001</b>
futures na WIG20	256,6	174,1	170,4	164,7	207	171	179,5
futures na TechWIG	0,3	0,4	0,3	0,4	0,2	0,8	2,2
futures na MIDWIG	1,9	0,2	0,2	5,8	4,1	3,6	-
futures na akcje	1,3	2,9	4,6	3,1	3,7	3,6	2,3
opcje na WIG20	10,5	8,9	8,6	3,75	3,74	-	-
opcje na akcje	0,0	0,5	1	-	-	-	-

Źródło: opracowanie własne na podstawie danych GPW

Oprócz banków aktywnymi graczami na giełdowym rynku instrumentów pochodnych mogłyby stać się fundusze inwestycyjne i otwarte fundusze emerytalne (OFE). Jednak obecnie obowiązujące przepisy pozwalają tym instytucjom dokonywać transakcji na rynkach derywatów w bardzo wąskim zakresie. Celem takiej transakcji może być jedynie zabezpieczenie się przed ryzykiem. OFE mogą się zabezpieczać przed ryzykiem związanym z lokowaniem aktywów funduszu. Fundusze inwestycyjne natomiast mogą zabezpieczać się przed ryzykiem zmiany cen akcji bądź indeksów giełdowych będących w portfelu funduszu.

Istotnym czynnikiem ograniczającym rozwój giełdowego instrumentów pochodnych są wysokie koszty transakcji, na które składają się wysokie prowizje biur maklerskich, a także opłaty na rzecz GPW i KDPW. Pewne znaczenie ma również brak oprocentowania środków znajdujących się na rachunkach depozytowych.

Wymieniona wśród barier rozwoju giełdowego rynku instrumentów pochodnych niska płynność utrudnia również wycenę tych instrumentów, gdyż powoduje brak niezbędnych danych.

## Rozdział II

### Podstawy wyceny instrumentów pochodnych

Idea arbitrażu leży u podstaw teorii wyceny instrumentów finansowych. Wszystkie współczesne metody wyceny wykorzystują pojęcie arbitrażu. Podejście to wymaga bardzo słabych założeń. Nie trzeba bowiem nakładać warunków odnoszących się do preferencji i opinii uczestników rynku. W najprostszej postaci arbitraż oznacza możliwość uzyskania stopy zwrotu wyższej niż stopa wolna od ryzyka poprzez jednoczesne inwestycje w różne aktywa. Budując modele rynku finansowego zakłada się, że arbitraż nie występuje. Brak tego założenia powoduje, że rynek znajduje się w permanentnej nierównowadze, jest więc zbyt chaotyczny by można go było modelować. Oczywiście na rzeczywistych rynkach pojawia się czasem możliwość arbitrażu, ale jest to zjawisko o ograniczonej skali występowania i krótkotrwałe – niemal natychmiast jest usuwane w wyniku działalności arbitrażystów.

Brak możliwości arbitrażu stanowi punkt wyjścia do wyceny instrumentów pochodnych zarówno w modelach z czasem dyskretnym jak i ciągłym. W rozdziale przybliżone zostały podstawowe koncepcje dotyczące teorii wyceny derywatów. Przedstawiono również powszechnie wykorzystywany przez praktyków model Blacka-Scholesa. Ponadto zaprezentowano ogólny sposób wyceny instrumentów pochodnych w przypadku gdy rynek jest niezupełny. Właśnie taki typ rynku należy rozważać jeśli do wyceny wykorzystywane są modele zmienności. Twierdzenia przytaczane są bez dowodów, te można bowiem znaleźć w wielu pozycjach<sup>1</sup>. Uzupełnieniem do rozdziału jest dodatek matematyczny zawierający podstawowe terminy probabilistyczne wykorzystywane w niniejszej pracy.

#### 2.1 Podstawowe założenia modeli wyceny instrumentów finansowych

Budowa modeli wyceny instrumentów finansowych wymaga wprowadzenia szeregu założeń dotyczących rynku. Założenia te są z jednej strony daleko idącą idealizacją rzeczywistości, z drugiej znacznie upraszczają rozważania i umożliwiają uchwycenie zasadniczych problemów teoretycznych. W tabeli 2.1 zestawiono założenia będące punktem wyjścia do budowy modeli wyceny. Założenia te można stopniowo rozluźniać, uzyskując modele bardziej realistyczne.

---

<sup>1</sup> Np. Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski M., Stettner Ł. [2003], *Matematyka finansowa. Instrumenty pochodne*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa  
Bingham N.H., Kiesel R. [2004], *Risk... op. cit.*,  
Delbaen F., Schachermayer W. [2006], *The Mathematics of Arbitrage*. Springer Finance,  
Björk T. [1999], *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press,  
Neftci S.N. [2000], *An introduction...op. cit.*

Tabela 2.1. Podstawowe założenia modeli finansowych

Rynek jest doskonały	- brak kosztów transakcyjnych, - brak podatków, - brak ograniczeń dotyczących krótkiej sprzedaży, - ceny kupna i sprzedaży są równe, - brak wymogu wnoszenia depozytu zabezpieczającego.
Brak ryzyka niedotrzymania umów	- równość stopy procentowej kredytów i depozytów.
Rynek konkurencyjny	- uczestnicy rynku są cenobiorcami.
Racjonalni uczestnicy rynku	- uczestnicy rynku wolą więcej danego dobra niż mniej.
Brak arbitrażu	

Źródło: Bingham N.H., Kiesel R. [2004], *Risk neutral valuation. Pricing and Hedging of Financial Derivatives*. Springer, s. 7

Oczywiście w rzeczywistości żaden rynek nie jest doskonały. Jest to typowe założenie upraszczające, które ułatwia skupienie się na podstawach wyceny. Podobny charakter ma założenie o braku ryzyka niedotrzymania umowy. Ryzyko upadku firmy – bankructwa, jest bowiem nieodłącznym elementem działalności gospodarczej. Takie ryzyko pojawia się również na poziomie państw – pomijając nawet wojny czy załamania gospodarcze będące skutkiem wojny, w ostatnich dziesięcioleciach dochodziło do przypadków nie wywiązywania się ze spłat pożyczek międzynarodowych. Z kolei założenie o występowaniu uczestników rynku w charakterze cenobiorców oznacza, że nawet bardzo duże zlecenia pojedynczego podmiotu nie ma wpływu na cenę waloru. Innymi słowy uczestnik rynku może zakupić bądź zbyć dowolną ilość danego instrumentu finansowego nie wpływając jednocześnie na jego cenę. Założenie o racjonalności uczestników rynku jest bardzo słabym założeniem, ponieważ nie wymaga określenia preferencji tych uczestników. Mogą być oni niejednorodni ze względu na swoje wybory dotyczące konsumpcji i oczekiwania odnośnie stanu gospodarki w przyszłości. Należy założyć jedynie, że wolą oni więcej niż mniej lub bardziej precyzyjnie, wzrost konsumpcji bez ponoszenia dodatkowych kosztów jest zawsze akceptowalny.

## 2.2 Wycena instrumentów pochodnych w czasie dyskretnym.

Zakładamy, że ustalona jest skończona przestrzeń probabilistyczna  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  z filtracją  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0}^T$ , taką że  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ . Rozpatrujemy model rynku finansowego, na którym występuje  $d + 1$  instrumentów finansowych. Wśród nich jest jeden instrument pozbawiony ryzyka (np. obligacja skarbową lub konto bankowe) oznaczony indeksem 0 oraz  $d$  instrumentów ryzykownych indeksowanych od 1 do  $d$ . Ceny instrumentów finansowych są opisane przez  $d + 1$ -wymiarowy wektor  $S_t = (S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d)'$ , który jest mierzalny

względem  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{F}_t$ , to znaczy  $d + 1$ -wymiarowy proces stochastyczny  $(S_t)_{t=0}^T$  jest  $\mathbb{F}$ -adptowany. Niezbędne jest założenie, by proces cen przynajmniej jednego z instrumentów finansowych miał ściśle dodatnie wartości.

### Definicja 2.2.1

*Numéraire* jest to proces stochastyczny  $(X_t)_{t=0}^T$ , który jest ściśle dodatni dla wszystkich  $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ .

Najczęściej rolę *numéraire* pełni rachunek bankowy z oprocentowaniem równym stopie wolnej od ryzyka, niemniej czasem wygodniej jest użyć innego instrumentu finansowego. Wybieramy instrument  $S^0$  jako *numéraire*. Bez straty ogólności zakładamy w dalszym ciągu, że  $S_0^0 = 1$ .

Strategią inwestycyjną (lub portfelem)  $\varphi$  nazywamy  $d + 1$  wymiarowy prognozowalny proces stochastyczny  $\varphi = (\varphi_t)_{t=1}^T = (\varphi_t^0, \varphi_t^1, \dots, \varphi_t^d)'$ , gdzie  $\varphi_t^i$  oznacza liczbę  $i$ -tych instrumentów finansowych w portfelu w chwili  $t$ , które znajdują się w nim po ewentualnych transakcjach dokonanych w chwili  $t - 1$ . Oznacza to, że inwestor ustala skład portfela w chwili  $t$  na podstawie informacji dostępnej przed czasem  $t$ , czyli w oparciu o proces  $S_{t-1}$ . Składowe  $\varphi_t^i$  mogą przyjmować wartości dodatnie jak i ujemne, zatem dopuszczalna jest krótka sprzedaż jak i zaciąganie kredytu w rachunku bankowym. Ponadto zakłada się, że instrumenty finansowe są doskonale podzielne.

### Definicja 2.2.2

Niech  $V_t^\varphi$  oznacza wartość portfela w chwili  $t$  przy zastosowaniu strategii inwestycyjnej  $\varphi$ . Wówczas  $V_t^\varphi$  jest iloczynem skalarnym w przestrzeni  $\mathbb{R}^{d+1}$ :

$$V_t^\varphi = \varphi_t \cdot S_t := \sum_{i=0}^d \varphi_t^i S_t^i, \quad (t = 1, 2, \dots, T) \text{ i } V_0^\varphi = \varphi_1 \cdot S_1.$$

Wartość początkowa portfela  $V_0^\varphi$  nazywana jest kapitałem początkowym.

Iloczyn  $\varphi_t \cdot S_{t-1}$  odzwierciedla wartość portfela tuż po ustaleniu jego składu w chwili  $t - 1$ , natomiast  $\varphi_t \cdot S_t$  oznacza wartość portfela w chwili  $t$  tuż po zaobserwowaniu cen, ale jeszcze przed zmianą jego struktury. Stąd

$$\varphi_t \cdot (S_t - S_{t-1}) = \varphi_t \cdot \Delta S_t,$$

jest zmianą wartości rynkowej portfela na skutek zmian cen instrumentów finansowych jaka miała miejsce pomiędzy czasem  $t - 1$  i  $t$ . Można więc zdefiniować proces zysku portfela.

### Definicja 2.2.3

Proces zysku  $G^\varphi$  w strategii  $\varphi$  jest określony następująco:

$$G_t^\varphi := \sum_{\tau=1}^t \varphi_\tau \cdot (S_\tau - S_{\tau-1}) = \sum_{\tau=1}^t \varphi_\tau \cdot \Delta S_\tau, (t = 1, 2, \dots, T).$$

Budując model rynku finansowego zakłada się, że zmiana składu portfela z  $\varphi_t$  na  $\varphi_{t+1}$  przeprowadzana jest zarówno bez przyływu kapitału z zewnątrz jak i jego odpływu. Prowadzi to do poniższej definicji.

### Definicja 2.2.4

Strategia inwestycyjna (portfel) jest samofinansująca się jeśli spełniony jest warunek:

$$\varphi_t \cdot S_t = \varphi_{t+1} \cdot S_t, \quad (t = 1, 2, \dots, T - 1).$$

Zbiór wszystkich strategii samofinansujących oznaczany będzie przez  $\Phi$ .

Ewolucja wartości portfela  $V_t^\varphi$  i zysku  $G_t^\varphi$  może być opisana za pomocą zdyskontowanego procesu cen, gdzie procesem dyskontującym będzie *numéraire*. Oznaczmy zdyskontowany proces cen następująco:  $\tilde{S}_t = \left( \frac{S_t^0}{S_t^0}, \frac{S_t^1}{S_t^0}, \dots, \frac{S_t^d}{S_t^0} \right)' = \left( 1, \frac{S_t^1}{S_t^0}, \dots, \frac{S_t^d}{S_t^0} \right)'$ . Wówczas zdyskontowany proces wartości portfela przyjmuje postać:

$$\tilde{V}_t^\varphi = \frac{1}{S_t^0} (\varphi_t \cdot S_t) = \varphi_t \cdot \tilde{S}_t, \quad (t = 1, 2, \dots, T),$$

a zdyskontowany proces zysku:

$$\tilde{G}_t^\varphi = \sum_{\tau=1}^t \varphi_\tau \cdot (\tilde{S}_\tau - \tilde{S}_{\tau-1}) = \sum_{\tau=1}^t \varphi_\tau \cdot \Delta \tilde{S}_\tau, (t = 1, 2, \dots, T).$$

Poniższe twierdzenie pokazuje, że z ekonomicznego punktu widzenia zmiana *numéraire*, względem którego dyskontowany jest proces cen nie ma znaczenia.

### Twierdzenie 2.2.1

Niech  $X_t$  będzie *numéraire*. Strategia inwestycyjna  $\varphi$  jest samofinansująca względem  $S_t$ , wtedy i tylko wtedy, gdy  $\varphi$  jest samofinansująca względem  $\frac{S_t}{X_t}$ .

Z powyższego twierdzenia otrzymujemy natychmiastowy wniosek, że strategia inwestycyjna  $\varphi$  jest samofinansująca względem  $S_t$ , wtedy i tylko wtedy, gdy  $\varphi$  jest samofinansująca względem  $\tilde{S}_t$ .

Opis strategii samofinansującej można również wyrazić korzystając z procesów zdyskontowanych.

### **Twierdzenie 2.2.2**

Strategia inwestycyjna  $\varphi$  jest samofinansująca wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\tilde{V}_t^\varphi = V_0^\varphi + \tilde{G}_t^\varphi.$$

Kolejne twierdzenie mówi o jednoznaczności wyboru procesu *numéraire* gwarantującego samofinansowanie strategii inwestycyjnej.

### **Twierdzenie 2.2.3**

Jeżeli  $(\varphi_t^1, \varphi_t^2, \dots, \varphi_t^d)'$  jest prognozowalny i  $V_0$  jest  $\mathcal{F}_0$ -mierzalny, to istnieje dokładnie jeden prognozowalny proces  $\varphi_t^0$  taki, że strategia  $(\varphi_t^0, \varphi_t^1, \dots, \varphi_t^d)'$  jest samofinansująca z kapitałem początkowym  $V_0 = V_0^\varphi$ .

Interpretacja ekonomiczna przywoływanego twierdzenia jest dość oczywista - do każdej strategii inwestycyjnej  $(\varphi_t^1, \varphi_t^2, \dots, \varphi_t^d)'$  w aktywa ryzykowne można dodać inwestycje  $\varphi_t^0$  w *numéraire*, taką że całkowita strategia jest samofinansująca. Więcej, strategia  $\varphi_t^0$  jest określona w sposób jednoznaczny.

Z twierdzenia 2.2.3 wynika ponadto, że do zdefiniowania zdyskontowanego procesu zysku wystarczy określić składowe  $(\varphi_t^1, \varphi_t^2, \dots, \varphi_t^d)'$ . Jeśli bowiem będą one prognozowalne to w sposób jednoznaczny powiązane są (po ustaleniu kapitału początkowego) ze strategią samofinansującą.

Mając określone ramy modelu można zapisać definicję instrumentu pochodnego podaną w rozdziale 1 (definicja 1.1.1) przy użyciu pojęć probabilistycznych.

### **Definicja 2.2.5**

Instrumentem pochodnym  $X$  z terminem wygaśnięcia  $T$  nazywamy dowolną  $\mathcal{F}_T$ -mierzalną zmienną losową.

Zatem instrumenty pochodne są zmiennymi losowymi wykorzystującymi pełną informację dostępną w chwili  $T$ .

Jednym z głównych założeń modelu rynku finansowego jest brak możliwości arbitrażu. Występowanie arbitrażu interpretowane jest bowiem, jako istotna ułomność i świadczy o braku efektywności rynku. Brak arbitrażu należy rozumieć jako brak strategii umożliwiającej osiągnięcie zysku bez wnoszenia kapitału początkowego i bez ponoszenia ryzyka. Poniższe definicje są matematycznym odpowiednikiem tej ekonomicznej zasady.



### Definicja 2.2.6

Strategię  $\varphi \in \Phi$  nazywamy strategią arbitrażową, jeśli spełnione są następujące warunki:

$$\mathbf{P}\{V_0^\varphi = 0\} = 1, \text{ oraz } \mathbf{P}\{V_T^\varphi \geq 0\} = 1 \text{ i } \mathbf{P}\{V_T^\varphi > 0\} > 0.$$

Zatem strategia arbitrażowa to strategia samofinansująca o zerowej wartości początkowej, której wartość końcowa jest nieujemna z prawdopodobieństwem jeden oraz z dodatnim prawdopodobieństwem ma wartość dodatnią.

### Definicja 2.2.7

Mówimy, że model rynku  $\mathcal{M}$  jest pozbawiony arbitrażu, jeśli nie istnieje na nim strategia arbitrażowa.

Kluczowym wynikiem teorii wyceny instrumentów finansowych jest równoważność braku arbitrażu z istnieniem miary martyngałowej. Zdefiniujmy zatem równoważną miarę martyngałową.

### Definicja 2.2.8

Miarę probabilistyczną  $\mathbf{Q}$  zadaną na przestrzeni  $(\Omega, \mathcal{F}_T)$  nazywamy równoważną miarą martyngałową (RMM) jeśli:

1.  $\mathbf{Q}$  jest równoważna  $\mathbf{P}$  na  $(\Omega, \mathcal{F}_T)$
2. zdyskontowany proces cen  $\tilde{S}$  jest  $\mathbf{Q}$ -martyngałem względem filtracji  $\mathbb{F}$ .

Zbiór RMM na  $(\Omega, \mathcal{F}_T)$  oznaczany będzie symbolem  $\mathcal{P}$ .

Teraz można przejść do jednego z podstawowych twierdzeń w teorii wyceny instrumentów finansowych. Twierdzenie to pokazuje, że istnienie równoważnej miary martyngałowej jest warunkiem koniecznym i wystarczającym do tego, aby w modelu rynku  $\mathcal{M}$  nie było możliwości arbitrażu.

### Twierdzenie 2.2.4 (o braku arbitrażu)

Na rynku  $\mathcal{M}$  nie ma możliwości arbitrażu wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ .

Zależność pomiędzy brakiem arbitrażu, a istnieniem miary probabilistycznej neutralizującej ryzyko umożliwia użycie RMM do wyceny instrumentów pochodnych. Sposób w jaki wycenę należy przeprowadzić przedstawiono poniżej.

### Definicja 2.2.9

Instrument pochodny  $X$  jest osiągalny (*attainable*), jeżeli istnieje strategia  $\varphi \in \Phi$ , taka że

$$V_T^\varphi = X.$$

Strategię tę nazywamy strategią replikującą.

Oznacza to, że strategia replikująca generuje takie same strumienie pieniężne w chwili  $T$  jak instrument  $X$ . Używając procesów zdyskontowanych otrzymujemy:

$$\frac{X}{S_T^0} = \tilde{V}_T^\varphi = V_0^\varphi + \tilde{G}_T^\varphi.$$

Zatem zdyskontowana wartość instrumentu pochodnego jest równa sumie kapitału początkowego i zdyskontowanego zysku uzyskanego ze strategii  $\varphi$ .

Na efektywnym rynku powinna być spełniona zasada jednej ceny. Dlatego też strumienie pieniężne generowane przez określony instrument pochodny muszą być wyceniane tak samo. Gdyby było inaczej, to arbitrażyści wykorzystaliby możliwość osiągnięcia zysku z różnicy cen. Stąd warunek braku arbitrażu powoduje, że dla osiągalnego instrumentu pochodnego jego cena w chwili  $t$  jest zdeterminowana przez kapitał początkowy każdej strategii replikującej (mówimy wówczas, że instrument pochodny jest jednoznacznie replikowany). Na przywołanej argumentacji zasadza się podstawowa idea teorii wyceny arbitrażowej.

Replikując przepływ pieniężny w danym momencie za pomocą strategii samofinansującej możliwa jest sytuacja w której zysk inwestora w chwili  $t < T$  będzie ujemny. Potrzebne byłoby więc dodatkowe założenie o zdolności inwestora do spłaty swoich ewentualnych długów. By uniknąć problemów związanych z ujemnym zyskiem wprowadzono pojęcie strategii dopuszczalnej.

### **Definicja 2.2.10**

Strategia samofinansująca  $\varphi$  jest dopuszczalna (*admissible*) jeżeli  $V_t^\varphi \geq 0$  dla każdego  $t = 1, 2, \dots, T$ . Zbiór wszystkich strategii dopuszczalnych oznaczana jest symbolem  $\Phi_a$ .

Koncepcja dopuszczalności odzwierciedla ochronę pośrednika przed nieograniczoną krótką sprzedażą.

Teraz można zająć się podstawowym problemem tego rozdziału - jak mając instrument pochodny  $X$ , czyli przepływ pieniężny w chwili  $T$ , określić jego wartość (cenę) w chwili  $t < T$ ? Dla osiągalnego instrumentu pochodnego, cena ta powinna być określona przez wartość dowolnej strategii replikującej w chwili  $t$ . To znaczy powinien istnieć jednoznaczny proces wartości odzwierciedlający wartość instrumentu  $X$  w chwili  $t$ . Następne twierdzenie zapewnia, że procesy wartości strategii replikujących pokrywają się co dowodzi ich jednoznaczności.

### Twierdzenie 2.2.5

Jeżeli na rynku  $\mathcal{M}$  nie ma możliwości arbitrażu, to każdy osiągalny instrument pochodny jest w sposób jednoznaczny na nim replikowany.

Przywołana w powyższym twierdzeniu jednoznaczność pozwala na zdefiniowanie pojęcia ceny arbitrażowej.

### Definicja 2.2.11

Niech rynek  $\mathcal{M}$  pozbawiony będzie możliwości arbitrażu, a  $X$  oznacza dowolny osiągalny instrument pochodny z czasem wygaśnięcia  $T$ . Proces ceny arbitrażowej  $\pi_\varphi(X)$ , lub krótko cena arbitrażowa instrumentu  $X$ , jest równa wartości dowolnego portfela replikującego dany instrument, to znaczy:

$$\pi_t(X) = V_t^\varphi,$$

gdzie  $\varphi$  jest strategią replikującą  $X$ .

Analizując arbitrażowe podejście do wyceny opcji należy podkreślić, że wyznaczenie ceny instrumentu pochodnego nie wymaga określenia żadnych preferencji uczestników rynku poza nienasyceciem, to znaczy uczestnicy zawsze wolą więcej niż mniej, co wyklucza możliwość arbitrażu. Zatem wzór na cenę dowolnego osiągalnego instrumentu pochodnego musi być niezależny od preferencji inwestorów. W szczególności w świecie z neutralnym podejściem do ryzyka wszyscy uczestnicy rynku muszą wyceniać instrumenty pochodne tak samo. To podstawowe spostrzeżenie, które zawdzięczamy pracom Coxa i Rossa<sup>2</sup> oraz Harrisona i Krepsa<sup>3</sup>, znacznie uprościło wycenę instrumentów pochodnych. W ogólnej postaci cena osiągalnego instrumentu pochodnego jest równa wartości oczekiwanej zdyskontowanej wypłaty względem równoważnej miary martyngałowej.

### Twierdzenie 2.2.6

Cena arbitrażowa dowolnego osiągalnego instrumentu pochodnego jest określona następującym równaniem, nazywanym martyngałową metodą wyceny (*risk-neutral valuation formula*):

$$\pi_t(X) = S_t^0 \cdot E^Q \left( \frac{X}{S_0^T} \middle| \mathcal{F}_t \right) \text{ dla } t = 0, 1, \dots, T, \quad (2.1)$$

gdzie  $Q$  jest RMM.

---

<sup>2</sup> Cox J. C., Ross S. A. [1976], *The valuation of options for alternative stochastic processes*, Journal of Financial Economics 3, ss. 145-166

<sup>3</sup> Harrison J. M., Kreps D. M. [1979], *Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets*, Journal of Economic Theory 20, ss. 381-408

Wzór na cenę arbitrażową (2.1) wymaga wskazanie RMM. Może to być kłopotliwe jeśli takich miar jest więcej niż jedna. Okazuje się jednak, że jeśli wszystkie instrumenty pochodne są osiągalne to liczba RMM redukuje się do jednej.

### **Definicja 2.2.12**

Rynek  $\mathcal{M}$  jest zupełny, jeżeli każdy instrument pochodny jest osiągalny, to znaczy dla każdej  $\mathcal{F}_T$ -mierzalnej zmiennej losowej  $X$  istnieje strategia replikująca  $\varphi \in \Phi$  taka, że  $V_T^\varphi = X$ .

Osiągalność instrumentów pochodnych jest więc bardzo pożądaną cechą rynku. Kolejne twierdzenie pokazuje zależność pomiędzy zupełnością a RMM.

### **Twierdzenie 2.2.7 (o zupełności)**

Rynek  $\mathcal{M}$  na którym nie ma możliwości arbitrażu jest zupełny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dokładnie jedna miara martyngałowa  $Q$  równoważna do  $P$  względem której zdyskontowany proces cen jest martyngałem.

Łącząc twierdzenie o braku arbitrażu (twierdzenie 2.2.4) z twierdzeniem o zupełności (twierdzenie 2.2.7) uzyskujemy twierdzenie zwane podstawowym twierdzeniem wyceny.

### **Twierdzenie 2.2.8 (podstawowe twierdzenie wyceny<sup>4</sup>)**

Na pozbawionym arbitrażu i zupełnym rynku  $\mathcal{M}$  istnieje dokładnie jedna RMM .

Przedstawione powyżej rezultaty mogą być prezentowane w wielu wariantach i rozwinięciach. Model został zbudowany dla skończonego, dyskretnego czasu i skończonej przestrzeni probabilistycznej. Osłabienie założenia o skończonej przestrzeni probabilistycznej nie ma wpływu na zależność między brakiem arbitrażu a istnieniem RMM. Natomiast dodatkowe wprowadzenie nieskończonego horyzontu czasowego powoduje, że twierdzenie o braku arbitrażu przestaje obowiązywać. Zastąpione zostaje przez słabszy warunek regularności nazywany *no free lunch with bounded risk* (NFLBR). NFLBR oznacza, że maksymalne straty jakie mogą mieć miejsce w określonych strategiach są ograniczone (formalną definicję można odnaleźć w pracy Schachermayera<sup>5</sup>). Ponadto Schachermayer wyprowadził twierdzenie analogiczne do twierdzenia o braku arbitrażu<sup>6</sup>:

Warunek NFLBR jest równoważny istnieniu RMM.

---

<sup>4</sup> Termin podstawowe twierdzenie wyceny zostało wprowadzone przez Dybviga i Rossa [1987] i jest używane na określenie twierdzeń łączących ze sobą ekonomiczne założenia modelu (takie jak brak arbitrażu) z założeniami matematycznym dotyczącymi istnienia równoważnej miary martyngałowej.

<sup>5</sup> Schachermayer W. [1994], *Martingale measure for discret-time process with infinite horizon*, Mathematical Finance 4, ss. 25-50

<sup>6</sup> Schachermayer W. [1994], *Martingale...* op. cit.

### 2.3 Wycena instrumentów pochodnych w czasie ciągłym.

Zakładamy, że rynek jest doskonały, a inwestorzy mają możliwość dokonywania transakcji w sposób ciągły w pewnym horyzoncie czasowym  $T$ . W tym celu rozważamy przestrzeń probabilistyczną  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  z filtracją  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  spełniającą zwykle warunki to znaczy zupełną i prawostronnie ciągłą. Dodatkowo zakładamy, że  $\sigma$ -ciało  $\mathcal{F}_0$  jest trywialne, czyli zachodzi następująca implikacja:  $A \in \mathcal{F}_0 \Rightarrow \mathbf{P}(A) = 0 \vee \mathbf{P}(A) = 1$ . Rozpatrywany rynek finansowy składa się z  $d + 1$  pierwotnych instrumentów finansowych, których ceny są opisane przez procesy stochastyczne  $S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d$  w przestrzeni  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . Zakładamy, że procesy te spełniają następujące warunki:

1. są adaptowane do filtracji  $\mathbb{F}$ ,
2. są prawostronnie ciągłe z lewostronnymi granicami (càdlàg, RCLL)
3. są ściśle dodatnimi semimartyngalami

Przestrzeń  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$  wraz z procesami cen  $d + 1$  instrumentów bazowych  $S_t = (S_t^0, \dots, S_t^d)$  nazywana będzie modelem rynku finansowego  $\mathcal{M}$ .

Przy wycenie istniejących na rynku instrumentów pochodnych potrzebny jest proces dyskontowy, czyli *numéraire*.

#### Definicja 2.3.1

*Numéraire* jest to proces stochastyczny  $X_t$ , który prawie na pewno jest ściśle dodatni dla każdego  $t \in [0, T]$ .

W dalszym ciągu zakładamy, że proces  $S_t^0$  opisuje instrument niewypłacający dywidendy i jest prawie na pewno ściśle dodatni. Instrument  $S^0$  wybieramy jako *numéraire*. Na ogół rolę *numéraire* pełni rachunek bankowy  $B_t = e^{\int_0^t r(s) ds}$ , gdzie  $r(t)$  jest procesem deterministycznym.

#### Definicja 2.3.2

Strategią inwestycyjną (lub portfelem) nazywamy  $R^{d+1}$ -wartościowy, lewostronnie ciągły proces prognozowalny

$$\varphi_t = (\varphi_t^0, \varphi_t^1, \dots, \varphi_t^d), \quad t \in [0, T],$$

taki, że

$$\int_0^T E^{\mathbf{P}} |\varphi_t^0| dt < \infty, \quad \sum_{i=0}^d E^{\mathbf{P}} (\varphi_t^i)^2 dt < \infty.$$

Powyższe warunki zapewniają istnienie całki stochastycznej  $\int_0^t \varphi(u) dS(u)$ . Natomiast samą strategię inwestycyjną interpretujemy następująco:  $\varphi_t^i$  oznacza liczbę jednostek  $i$ -tego instrumentu w portfelu  $\varphi$  w chwili  $t$ . Intuicyjnie prognozowalność oznacza, że skład portfela w chwili  $t$  jest ustalany przez inwestora na podstawie informacji dostępnej przed  $t$ , czyli na podstawie procesu cen  $S(t^-)$  (lewostronnego sąsiedztwa  $t$ ). W dowolnej chwili  $t$  zmienna losowa  $\varphi_t^i$  może przyjmować zarówno wartości dodatnie jak i ujemne wartości (oznaczające krótką sprzedaż).

### Definicja 2.3.3

Procesem wartości portfela  $\varphi$  nazywamy proces iloczyn skalarny

$$V_t^\varphi := \varphi_t \cdot S_t = \sum_{i=0}^d \varphi_t^i S_t^i, \quad t \in [0, T].$$

Procesem zysku w strategii  $\varphi$  nazywamy proces

$$G_t^\varphi := \int_0^t \varphi(u) dS_u = \sum_{i=0}^d \int_0^t \varphi_u^i dS_u^i.$$

Strategia  $\varphi$  jest samofinansująca jeśli spełnia warunek

$$V_t^\varphi = V_0^\varphi + G_t^\varphi, \quad t \in [0, T].$$

Następne twierdzenie podkreśla elastyczność w możliwości wyboru *numéraire*.

### Twierdzenie 2.3.1

Portfel samofinansujący pozostaje samofinansującym po zmianie *numéraire*.

Jeśli jako *numéraire* wybrany zostanie instrument  $S^0$  to zdyskontowany proces cen jest określony wzorem:

$$\tilde{S}_t := \frac{S_t}{S_t^0} = (1, \tilde{S}_t^1, \dots, \tilde{S}_t^d), \text{ gdzie } \tilde{S}_t^i = \frac{S_t^i}{S_t^0} \text{ dla } i = 1, 2, \dots, d.$$

Używając zdyskontowanego procesu cen można zdefiniować zdyskontowany proces wartości portfela i zdyskontowany proces zysku:

$$\tilde{V}_t^\varphi = \frac{V_t^\varphi}{S_t^0} = \varphi_t^0 + \sum_{i=1}^d \varphi_t^i \tilde{S}_t^i,$$

$$\tilde{G}_t^\varphi = \sum_{i=1}^d \int_0^t \varphi_u^i d\tilde{S}_u^i.$$

Warto zwrócić uwagę, że  $\tilde{G}_t^\varphi$  nie zależy od składowej *numéraire*  $\varphi_0$ .

Podobnie jak w przypadku czasu dyskretnego można wyrazić warunek samofinansowania za pomocą procesów zdyskontowanych.

### **Twierdzenie 2.3.2**

Strategia  $\varphi$  jest samofinansująca wtedy i tylko wtedy, gdy  $\tilde{V}_t^\varphi = \tilde{V}_0^\varphi + \tilde{G}_t^\varphi$ ,  $t \in [0, T]$ .

Ponadto  $\tilde{V}_t^\varphi \geq 0 \Leftrightarrow V_t^\varphi \geq 0$ .

Powyższe twierdzenie jest analogiczne do twierdzenia 2.2.3 i pokazuje, że samofinansująca strategia jest określona jednoznacznie przez kapitał początkowy i składowe  $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^d$ . Innymi słowy dowolny zbiór prognozowalnych procesów  $\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^d$  takich, że całka stochastyczna  $\int_0^t \varphi_u^i d\tilde{S}_u^i$ , dla  $i = 1, 2, \dots, d$  istnieje, może być rozszerzony do samofinansującej strategii  $\varphi$  przez ustalenie kapitału początkowego:

$$\varphi_t^0 = \tilde{V}_0^\varphi + \sum_{i=1}^d \int_0^t \varphi_u^i d\tilde{S}_u^i - \sum_{i=1}^d \varphi_t^i \tilde{S}_t^i.$$

Wycena instrumentów pochodnych w modelu z czasem ciągłym również koncentruje się wokół zależności pomiędzy brakiem arbitrażu a istnieniem określonej miary prawdopodobieństwa. Zaczniemy od definicji strategii arbitrażowej.

### **Definicja 2.3.4**

Samofinansująca strategia  $\varphi$  nazywana jest arbitrażową, jeżeli spełnione są następujące warunki:

$$V_0^\varphi = 0, \quad P(V_T^\varphi \geq 0) = 1, \quad P(V_T^\varphi > 0) > 0.$$

### **Definicja 2.3.5**

Miarę probabilistyczną  $\mathbf{Q}$  zadaną na przestrzeni  $(\Omega, \mathcal{F})$  nazywamy (silną) równoważną miarą martyngałową (RMM), jeśli:

1.  $\mathbf{Q}$  jest równoważna  $\mathbf{P}$ ,
2. Zdyskontowany proces cen instrumentów bazowych  $\tilde{S}$  jest lokalnym  $\mathbf{Q}$ -martyngałem ( $\mathbf{Q}$ -martyngałem).

Oznaczamy zbiór RMM symbolem  $\mathcal{P}$ .

Na zbiór samofinansujących strategii inwestycyjnych można nałożyć dodatkowe ograniczenia, wyłaniające klasę w której nie będzie strategii startującej z zerowego kapitału  $V_0^\varphi = 0$ , a mogącej zapewnić portfel o dowolnie dużej wartości w chwili  $T$ . Otrzymujemy wówczas następującą definicję.

### Definicja 2.3.6

Samofinansująca strategia  $\varphi$  nazywa się oswojoną (*tame*) (względem  $S^0$ ), jeżeli

$$\tilde{V}_t^\varphi \geq 0, t \in [0, T].$$

Zbiór wszystkich strategii oswojonych oznaczany jest symbolem  $\Phi_t$ .

Analizując proces wartości portfela względem RMM dla strategii oswojonych otrzymujemy poniższe twierdzenie.

### Twierdzenie 2.3.3

Niech  $\varphi \in \Phi_t$ . Wtedy  $\tilde{V}_t^\varphi$  jest nieujemnym lokalnym martyngałem i nadmartyngałem dla dowolnej miary  $Q \in \mathcal{P}$ .

Kolejne twierdzenie pokazuje, że istnienie miary martyngałowej jest warunkiem wystarczającym, by w modelu rynku  $\mathcal{M}$ , wśród strategii oswojonych, nie było możliwości arbitrażu.

### Twierdzenie 2.3.4

Niech  $\mathcal{P} \neq \emptyset$ . Wtedy model rynku  $\mathcal{M}$  nie zawiera strategii arbitrażowych w  $\Phi_t$ .

Brak możliwości arbitrażu jest implikowany przez istnienie RMM. Nasuwa się naturalne pytanie, czy prawdziwe jest twierdzenie odwrotne. W przypadku rynku z czasem dyskretnym odpowiedź jest pozytywna. Natomiast na rynku z czasem ciągłym warunki braku arbitrażu są zbyt mało precyzyjnie wyrażone by takiej odpowiedzi można było udzielić. Jednak po pewnych uściśleniach zachodzi twierdzenie odwrotne.

### Definicja 2.3.7

Proces prognozowalny nazywa się prostym, jeśli jest skończoną kombinacją liniową procesów postaci  $\psi \cdot \mathbb{1}_{(\tau_1, \tau_2]}$ , gdzie  $\tau_1, \tau_2$  są momentami stopu, a  $\psi$  jest zmienną losową  $\mathcal{F}_{\tau_1}$ -mierzalną.

### Definicja 2.3.8

Prosta strategia inwestycyjna  $\varphi$  jest  $\delta$ -dopuszczalna ( $\delta$ -admissible), jeśli

$$P(V_t^\varphi \geq -\delta) = 1, \quad \text{dla } t \in [0, T].$$

### Definicja 2.3.9

Proces cen  $S_t$  spełnia warunek *no free lunch with vanishing risk* (NFLVR), jeśli dla każdego ciągu  $(\varphi_n)$  prostych strategii, które są  $\delta_n$ -dopuszczalne mamy



$$V_T(\varphi_n) \xrightarrow{P} 0, \text{ jeśli } \delta_n \rightarrow 0.$$

### **Twierdzenie 2.3.5**

Dla rynku  $\mathcal{M}$  istnieje RMM wtedy i tylko wtedy, gdy jest spełniony warunek NFLRV.

Założmy obecnie, że na rynku  $\mathcal{M}$  istnieje silna RMM, którą oznaczamy  $\mathbf{P}^*$  (co jest równoważne z brakiem arbitrażu). Wówczas spośród instrumentów pochodnych spełniających warunek regularności ( $\frac{X}{S_0^T} \in L^1(\mathbf{P}^*)$ , czyli dla  $\frac{X}{S_0^T}$  istnieje pierwszy moment) można wyróżnić szczególną podklasę.

### **Definicja 2.3.10**

Strategię samofinansującą  $\varphi$  nazywamy  $\mathbf{P}^*$ -dopuszczalną, jeśli

$$\tilde{G}_t^\varphi = \int_0^t \varphi_u d\tilde{S}_u$$

jest  $\mathbf{P}^*$ -martyngałem. Klasę wszystkich strategii  $\mathbf{P}^*$ -dopuszczalnych oznacza się symbolem  $\Phi(\mathbf{P}^*)$ .

### **Twierdzenie 2.3.6**

Na rynku  $\mathcal{M}$  w klasie  $\Phi(\mathbf{P}^*)$  nie ma strategii arbitrażowych.

Jak wspomniano wcześniej, przy założeniu braku arbitrażu problem wyceny instrumentu pochodnego redukuje się do istnienia samofinansującej strategii replikującej dany instrument.

### **Definicja 2.3.11**

Instrument pochodny  $X$  nazywa się  $\mathbf{P}^*$ -osiągalny, jeśli istnieje przynajmniej jedna strategia inwestycyjna  $\varphi \in \Phi(\mathbf{P}^*)$ , taka że  $V_T^\varphi = X$ . Strategię tę nazywamy strategią replikującą  $X$ .

### **Definicja 2.3.12**

Ceną arbitrażową instrumentu  $\mathbf{P}^*$ -osiągalnego  $X$  nazywamy cenę, przy której nie ma możliwości arbitrażu.

### **Twierdzenie 2.3.7**

Dla dowolnego instrumentu  $\mathbf{P}^*$ -osiągalnego  $X$  cena arbitrażowa jest określona następująco:

$$\pi_t(X) = S_t^0 E^{\mathbf{P}^*} \left( \frac{X}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t \right). \quad (2.2)$$

Ponieważ powyższa cena jest określona jednoznacznie, to otrzymujemy następujący wniosek.

**Twierdzenie 2.3.8**

Jeśli dla danego instrumentu istnieją dwie strategie replikujących  $\varphi, \psi \in \Phi(\mathbf{P}^*)$  to

$$V_t^\varphi = V_t^\psi.$$

Pozostaje do rozwiązania problem, jak cena instrumentu (2.2) zależy od wyboru RMM. W tym celu należy zmodyfikować definicję instrumentu osiągalnego, tak by nie była związana z wybraną miarą  $\mathbf{P}^*$ .

**Definicja 2.3.13**

Strategię samofinansującą  $\varphi$  nazywa się dopuszczalną jeśli jest oswojona i  $\mathbf{Q}$ -dopuszczalna dla pewnego  $\mathbf{Q} \in \mathcal{P}$ .

**Definicja 2.3.14**

Instrument pochodny  $X$  nazywa się osiągalny, jeśli istnieje strategia dopuszczalna  $\varphi$ , taka że  $V_T^\varphi = X$ . Model rynku  $\mathcal{M}$  nazywamy zupełnym, jeśli każdy instrument pochodny jest osiągalny.

Można wykazać, że pojęcie osiągalności instrumentu pochodnego jest niezależne od wyboru *numéraire*. Jeśli bowiem instrument pochodny jest osiągalny przy jednym wyborze *numéraire*, to jest też osiągalny przy innym, a strategie replikujące są identyczne. Niemniej wybór *numéraire* może ułatwić analizę problemu.

**Twierdzenie 2.3.9**

Jeśli dla osiągalnego instrumentu  $X$  istnieją dwie strategie replikujące  $\varphi_1 \in \Phi(\mathbf{Q}_1)$  oraz  $\varphi_2 \in \Phi(\mathbf{Q}_2)$ , to

$$E^{\mathbf{Q}_1} \left( \frac{X}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t \right) = E^{\mathbf{Q}_2} \left( \frac{X}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

Oznacza to, jeśli  $X$  jest instrumentem osiągalnym, to istnieje dla niego tylko jedna cena arbitrażowa.

Twierdzenie 2.3.7 rozwiązuje problem znalezienia ceny instrumentu pochodnego. Kolejne twierdzenie umożliwia znalezienie strategii replikujących.

**Twierdzenie 2.3.10**

Niech  $\frac{X}{S_T^0} \in L^1(\mathbf{P}^*)$ . Niech  $M$  będzie  $\mathbf{P}^*$ -martyngałem określonym wzorem

$$M_t = E^{\mathbf{P}^*} \left( \frac{X}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

Jeśli  $M$  dopuszcza przedstawienie całkowe:

$$M_t = \tilde{V}_0^\varphi + \sum_{i=1}^d \int_0^t \varphi_u^i d\tilde{S}_u^i,$$

gdzie  $\varphi^1, \dots, \varphi^d$  są prognozowalne i lokalnie ograniczone, to instrument  $X$  jest osiągalny.

Teraz możliwe jest sformułowanie twierdzenia, które jest analogiczne do twierdzenia o zupełności dla czasu dyskretnego (patrz twierdzenie 2.2.7).

### Twierdzenie 2.3.11

Jeśli silna miara martyngałowa  $\mathbf{P}^*$  jest jedyną RMM na rynku  $\mathcal{M}$ , to rynek  $\mathcal{M}$  jest zupełny, w tym sensie, że każdy instrument spełniający warunek  $\frac{X}{S_T^0} \in L^1(\mathbf{P}^*)$  jest osiągalny.

## 2.4 Model Blacka-Scholesa

Model Blacka-Scholesa, oznaczany  $\mathcal{M}^{BS}$ , to model rynku złożonego z  $d + 1$  instrumentów finansowych, którymi handluje się w sposób ciągły. Pośród nich jest jeden instrument bezryzykowny (rachunek bankowy lub rzadziej obligacja), którego cenę oznaczamy  $B_t$  oraz  $d$ -instrumentów ryzykownych (utożsamianych najczęściej z akcjami) o cenach  $S_t^i$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Dynamika cen instrumentów finansowych jest opisana następującymi równaniami:

$$\begin{aligned} dB_t &= r(t)B_t dt, & B_0 &= 1, \\ dS_t^i &= S_t^i \left( b_i(t) dt + \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(t) dW_t^j \right), & S_0^i &= p_i \in \mathbb{R}_+, \quad i = 1, \dots, d. \end{aligned}$$

W równaniach powyższych

$$W_t = (W_t^1, \dots, W_t^n)', 0 \leq t \leq T,$$

jest standardowym  $n$ -wymiarowym ruchem Browna, który wyznacza naturalną filtrację w przestrzeni  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , a  $r(t)$  deterministycznym procesem krótkoterminowej stopy procentowej. Natomiast proces  $b(t) = (b_1(t), \dots, b_d(t))', 0 \leq t \leq T$  jest wektorem stóp aprecjacji instrumentów ryzykownych, które mierzą stopę zwrotu w chwili  $t$ . Wreszcie proces  $\sigma(t) = \sigma_{ij}(t), 1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq n, 0 \leq t \leq T$  jest macierzą współczynników zmienności modelujących chwilową intensywność z jaką  $j$ -te źródło niepewności wpływa na  $i$ -ty instrument finansowy w chwili  $t$ . Procesy  $r(t)$ ,  $b(t)$  oraz  $\sigma(t)$  są nazywane współczynnikami modelu  $\mathcal{M}^{BS}$ . Zakłada się, że te współczynniki są progresywnie mierzalne i spełniony jest warunek regularności:

$$\int_0^T (|r(t) + \|b(t)\| + \|\sigma(t)\|) dt < \infty. \quad (2.3)$$

Naturalne jest pytanie, czy model  $\mathcal{M}^{BS}$  jest wolny od arbitrażu. Zgodnie z twierdzeniem 2.3.4 brak arbitrażu jest powiązany z istnieniem RMM. By pokazać w jaki sposób taka miara może zostać znaleziona, poniżej przedstawiono klasyczny model rynku Blacka-Scholesa z jednym instrumentem ryzykownym  $S_t$ . Odpowiednie równania mają w tym modelu postać:

$$dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1,$$

$$dS_t = bS_t dt + \sigma S_t dW_t, S_0 = p \in (0, \infty),$$

gdzie współczynniki  $b \in \mathbb{R}$ ,  $r, \sigma \in \mathbb{R}_+$  są stałe. Wprowadzając zdyskontowaną cenę instrumentu ryzykownego  $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{B_t}$  uzyskujemy ze wzoru Itô równanie:

$$d\tilde{S}_t = (b - r)\tilde{S}_t + \sigma\tilde{S}_t dW_t.$$

RMM  $\mathbf{P}^*$  jest zdefiniowana pochodną Radona-Nikodyma:

$$\left. \frac{d\mathbf{P}^*}{d\mathbf{P}} \right|_{\mathcal{F}_t} = L(t),$$

gdzie

$$L(t) = \exp\left(\int_0^t \gamma(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \gamma^2(s) ds\right),$$

a proces  $(\gamma(t): 0 \leq t \leq T)$  jest adaptowany, progresywnie mierzalny oraz spełnia warunek  $\int_0^T \gamma^2(s) ds < \infty$  (p.n.). Z twierdzenia Girsanowa (patrz dodatek B, twierdzenie B.5) mamy:

$$d\tilde{W}_t = dW_t - \gamma(t)dt,$$

gdzie  $\tilde{W}$  jest  $\mathbf{P}^*$ -procesem Wienera. Zatem względem  $\mathbf{P}^*$  dynamika  $\tilde{S}_t$  jest opisana równaniem

$$d\tilde{S}_t = (b - r - \sigma\gamma(t))\tilde{S}_t dt + \sigma\tilde{S}_t d\tilde{W}_t.$$

Jeśli  $\tilde{S}_t$  ma być lokalnym  $\mathbf{P}^*$ -martyngałem to musi być spełniona równość

$$b - r - \sigma\gamma(t) = 0, \quad t \in [0, T],$$

zatem

$$\gamma(t) \equiv \gamma = \frac{b - r}{\sigma}.$$

Proces  $\gamma_t$  nazywany jest rynkową ceną ryzyka. Można go interpretować jako premię za ryzyko przypadającą na jednostkę zmienności. Jeśli proces ten jest znany, to jest możliwe jednoznaczne wyznaczenie miary  $\mathbf{P}^*$ . Dynamika  $S_t$  względem miary  $\mathbf{P}^*$  jest opisana równaniem

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\tilde{W}_t.$$

Przedstawione powyżej rozumowanie można uogólnić.

### Twierdzenie 2.4.1

Jeśli model  $\mathcal{M}^{BS}$  jest wolny od arbitrażu, to istnieje progresywnie mierzalny proces  $\gamma: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , nazywany rynkową ceną ryzyka, taki że

$$r(t)\mathbb{1}_d - b(t) = \sigma(t)\gamma(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.4)$$

gdzie  $\mathbb{1}_d$  jest  $d$ -wymiarowym wektorem złożonym z jedynek.

Odwrotnie, jeśli taki proces  $\gamma$  istnieje i dodatkowo spełnia warunki:

$$1) \int_0^T \|\gamma(t)\|^2 dt < \infty \text{ (p. n.)}$$

$$2) E^{\mathbf{P}} \left[ \exp \left( \int_0^T \gamma(t) dW_t - \frac{1}{2} \int_0^T \|\gamma(t)\|^2 dt \right) \right] = 1$$

to model  $\mathcal{M}^{BS}$  jest wolny od arbitrażu.

Pozostaje problem zupełności rynku, który podobnie jak w przypadku arbitrażu zostanie najpierw rozważony dla modelu klasycznego ( $n = d = 1$ , stałe współczynniki modelu  $b$ ,  $r$  oraz  $\sigma$ ). W modelu tym została wyznaczona RMM  $\mathbf{P}^*$ . Niech  $X$  będzie instrumentem pochodnym, takim że  $X \in L^1(\mathbf{P})$ , wówczas także  $X \in L^1(\mathbf{P}^*)$  i można zdefiniować  $\mathbf{P}^*$ -martyngał

$$M(t) = E^{\mathbf{P}^*} [X \exp(-rT) | \mathcal{F}_t].$$

Z twierdzenia o reprezentacji martyngałów (dodatek, twierdzenie B.7) mamy

$$M_t = M_0 + \int_0^t h(u) d\tilde{W}_u,$$

gdzie  $\tilde{W}_t$  jest  $\mathbf{P}^*$ -procesem Wienera. Wtedy dynamika  $\tilde{S}$  jest dana równaniem

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t d\tilde{W}_t,$$

oraz

$$M_t = M_0 + \int_0^t \varphi_u^1 d\tilde{S}_u$$

gdzie  $\varphi_t^1 = \frac{h(t)}{\sigma \tilde{S}_t}$ . Zdefiniujmy

$$\varphi_t^0 = M_t - \varphi_t^1 \tilde{S}_t = M_t - \frac{h(t)}{\sigma},$$

skąd otrzymujemy samofinansującą strategię  $\varphi_t = (\varphi_t^0, \varphi_t^1)$  (patrz twierdzenie 2.3.2). pokazano tym samym, że instrument  $X$  jest osiągalny

$$X = M_T \exp(rT) = (\varphi_T^0 + \varphi_T^1 \tilde{S}_T).$$

Ponieważ  $X$  jest dowolnym instrumentem to rynek  $\mathcal{M}^{BS}$  jest zupełny.

Analiza przypadku ogólnego ograniczona zostanie do instrumentów pochodnych takich, że  $\frac{X}{B_T} \in L^1(\mathbf{P}^*)$ . Z twierdzenia 2.3.11 wiemy, że jedyność RMM implikuje zupełność rynku. Ponadto w modelu  $\mathcal{M}^{BS}$  wszystkie RMM można wyznaczyć w oparciu o twierdzenie Girsanowa, zatem miary te są opisane przez pochodne Radona-Nikodýma względem miary  $\mathbf{P}$ . Jednak pochodne te są określone przez proces  $\gamma$  spełniający warunek (2.4) z twierdzenia 2.4.1. Mając to na uwadze, sformułowanie warunków zupełności rynku  $\mathcal{M}^{BS}$  wymaga narzucenia założeń dotyczących współczynników modelu.

### Twierdzenie 2.4.2

Następujące warunki są równoważne:

1. Istnieje jedyna RMM, dla której zdyskontowany proces  $\tilde{S}_t$  jest martyngałem
2. Model  $\mathcal{M}^{BS}$  jest zupełny (w tym sensie, że każdy instrument  $X$ , taki że  $\frac{X}{B_T} \in L^1(\mathbf{P}^*)$  jest osiągalny)
3. Zachodzi równość  $n = d$  i macierz zmienności  $\sigma(t, \omega)$  jest nieosobliwa  $(\lambda \otimes \mathbf{P})$ -p. w.

Teraz można zająć się wyceną instrumentów pochodnych w modelu Blacka-Scholesa. Zakładamy, że  $d = n$  (czyli jest tyle instrumentów bazowych ile niezależnych procesów Wienera), współczynniki modelu spełniają warunek regularności (2.3), macierz  $\sigma$  jest nieosobliwa i rynkowa cena ryzyka  $\gamma$  istnieje. Przy tych założeniach model  $\mathcal{M}^{BS}$  ma dokładnie jedną miarę martyngałowa  $\mathbf{P}^*$  o pochodnej Radona-Nikodýma

$$\frac{d\mathbf{P}^*}{d\mathbf{P}} = L(t) = \exp \left[ \int_0^t \gamma(u) dW_u - \frac{1}{2} \int_0^t \|\gamma(u)\|^2 du \right],$$

gdzie

$$\gamma(t) = \sigma^{-1}(t)(r(t)\mathbb{1}_d - b(t)).$$

Na podstawie twierdzenia 2.3.1 i 2.3.2 wiadomo, że taki model jest wolny od arbitrażu i zupełny. Model ten nazywany jest modelem standardowym.

### Twierdzenie 2.4.3

Niech  $\mathcal{M}^{BS}$  będzie standardowym  $d$ -wymiarowym modelem Blacka-Scholesa, a  $X$  instrumentem pochodnym, takim że  $\frac{X}{B_T} \in L^1(\mathbf{P}^*)$ . Cena arbitrażowa instrumentu  $X$  dana jest wzorem

$$\pi_t(X) = B_t E^{P^*} \left[ \frac{X}{B_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] = E^{P^*} \left[ X \exp \left( - \int_t^T r(u) du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

W celu wyznaczenia wzorów analitycznych rozważania po raz kolejny zostaną zawężone do klasycznego modelu Blacka-Scholesa. Zgodnie z ogólną teorią cena arbitrażowa instrumentu pochodnego jest wówczas określona wzorem

$$\pi_t(X) = \exp(-r(T-t)) E^{P^*} [X | \mathcal{F}_t]$$

gdzie miara  $\mathbf{P}^*$  jest zdefiniowana w oparciu o twierdzeniem Girsanowa przez pochodną Radona-Nikodyma

$$\frac{dP^*}{dP} = L(t) = \exp \left[ \left( \frac{b-r}{\sigma} \right) W_t - \frac{1}{2} \left( \frac{b-r}{\sigma} \right)^2 t \right]$$

Ponadto jeśli instrument  $X$  ma postać  $X = H(S_T)$  z całkowalną funkcją  $H: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , to cena arbitrażowa tego instrumentu jest również dana wzorem  $\pi_t(X) = F(t, S_t)$ , gdzie  $F(t, s)$  jest rozwiązaniem równania różniczkowego Blacka-Scholesa

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t}(t, s) + rs \frac{\partial F}{\partial s}(t, s) + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(t, s) - rF(t, s) &= 0, \\ F(T, s) &= H(s). \end{aligned} \quad (2.5)$$

W celu uzyskania tego cząstkowego równania różniczkowego należy zastosować przedstawienie Feynmana-Kaca (patrz dodatek B, twierdzenie B.8) dla  $\mathbf{P}^*$ -martyngału

$$M_t = \exp(-rT) E^{P^*} [H(S_T) | \mathcal{F}_t].$$

Rzeczywiście, jeśli podstawimy  $G(t, S_t) = M_t$ , to z twierdzenia B.8 wiemy, że  $G$  jest rozwiązaniem cząstkowego stochastycznego równania różniczkowego

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t, s) + rs \frac{\partial G}{\partial s}(t, s) + \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 G}{\partial s^2}(t, s) = 0,$$

z warunkiem początkowym  $G(T, s) = s^{-rT} H(s)$ . Ponieważ

$$\pi_t(X) = \exp(-r(T-t)) E^{P^*} [H(S_T) | \mathcal{F}_t] = \exp(rt) M_t,$$

to  $F(t, s) = \exp(rt) G(t, s)$ . Wynika stąd, że  $G(t, s) = \exp(-rt) F(t, s)$ . Wstawiamy to wyrażenie dla  $G(t, s)$  i otrzymujemy (2.5).

Rozważając europejską opcję kupna na instrument bazowy  $S$  z ceną wykonania  $K$  i terminem wygaśnięcia  $T$  (a więc  $H(T) = (S_T - K)^+$ ) można wyznaczyć wartość oczekiwaną (co jest łatwiejsze od rozwiązania równania różniczkowego Blacka-Scholesa) i uzyskać wzór analityczny.

#### **Twierdzenie 2.4.4 (wzór Blacka-Scholesa)**

Dla europejskiej opcji kupna instrumentu finansowego  $S$ , zachodzi następujący wzór na cenę  $C_t$  opcji w chwili  $0 \leq t < T$ :

$$C_t = S_t N(d_1(S_t, T - t)) - K \exp[-r(T - t)] N(d_2(S_t, T - t)),$$

gdzie

$N(\cdot)$  jest dystrybuantą rozkładu normalnego,

$$d_1(S_t, T - t) = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}},$$

$$d_2(S_t, T - t) = d_1(S_t, T - t) - \sigma \sqrt{T - t}.$$

Oryginalne wyprowadzenie równania Blacka-Scholesa zostało dokonane nieco inaczej<sup>7</sup>. Punktem wyjścia był portfel replikujący złożony z jednej opcji i krótkiej pozycji dla odpowiedniej liczby akcji. Więcej szczegółów można znaleźć w oryginalnej pracy.

Model Blacka-Scholesa jest elegancką teorią, która zdobyła olbrzymią popularność. Należy mieć jednak świadomość, że model ten opiera się na kilku mocnych założeniach, które rozmijają się z rzeczywistością. Do głównych niedoskonałości modelu Blacka-Scholesa, oprócz standardowych założeń dotyczących braku kosztów transakcyjnych, podatków czy doskonałej podzielności instrumentu bazowego, należą założenia odnośnie:

- normalności rozkładów zwrotów logarytmicznych (lognormalności cen),
- stałości w czasie współczynnika zmienności.

Liczne badania empiryczne wskazują, że zwroty logarytmiczne charakteryzują się między innymi występowaniem grubych ogonów (leptokurtycznością) oraz skośnością, co wyklucza rozkład normalny (szerzej problem został omówiony w rozdziale 4).

Również założenie o stałości w czasie zmienności nie da się obronić. Niezależnie od użytej miary zmienności typowe jest występowanie dużych wahań zmienności. Ponadto charakterystyczne jest zjawisko grupowania się zmienności, czyli występowania okresów

---

<sup>7</sup> Black F., Scholes M. [1973], *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy 81, ss. 637-659



podwyższonej zmienności, po których następują okresy zmienności obniżonej. Dlatego też, do wyceny instrumentów pochodnych wykorzystuje się modele, w których zmienność jest również procesem stochastycznym. Jednak uwzględnienie dodatkowego źródła losowości powoduje, że model staje się niepełny.

## 2.5 Rynki niepełne.

Podobnie jak dla rynku pełnego rozpatrujemy model rynku na którym znajduje się  $d + 1$  instrumentów bazowych, których cena jest określona przez procesy stochastyczne  $S^0, S^1, \dots, S^d$ , przy czym  $S^0$  traktujemy jako *numéraire*. Przyjmuje się, że procesy  $S_t^i$  są adaptowane, RCLL i ściśle dodatnimi semimartynałami. Ponadto zakładamy, że nie ma możliwości arbitrażu (co pociąga za sobą istnienie RMM), ale istnieją na rynku instrumenty pochodne nieosiągalne, czyli takie których wypłaty nie mogą być replikowane za pomocą strategii samofinansujących (co zgodnie z definicją 2.3.14 oznacza, że rynek jest niepełny). W świetle twierdzenia 2.3.11 nieosiągalność instrumentów pochodnych implikuje brak jednoznaczności RMM. Nasuwa się oczywiste pytanie - jak wycenić nieosiągalne instrumenty pochodne, to znaczy, którą RMM należy wybrać do wzoru na wycenę martynałowa (2.2). Naturalną propozycją jest użycie do tego celu funkcji użyteczności inwestora.

### Definicja 2.5.1

Funkcja ciągła  $U: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ściśle rosnąca, ściśle wklęsła, różniczkowalna w sposób ciągły oraz spełniająca warunki

$$\lim_{x \rightarrow \infty} U'(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} U'(x) = \infty,$$

jest nazywana funkcją użyteczności.

Niech  $V_t^\varphi$  będzie procesem wartości portfela  $\varphi$ . Jeśli  $V_0^\varphi = x$ , to będziemy pisać  $V_t^\varphi = V_t^{\varphi, x}$ . Oznacza to, że  $x$  jest kapitałem początkowym, od którego rozpoczyna realizację strategii samofinansującej. Celem inwestora jest maksymalizacja oczekiwanej użyteczności końcowego zysku przy wszystkich strategiach dopuszczalnych

$$\tilde{U}(x) = \sup_{\varphi \in \Phi_a} E^P[U(V_T^{\varphi, x})]$$

### Definicja 2.5.2

Niech dany będzie instrument pochodny  $X$ . Zdefiniujmy

$$W(\delta, x, p) = \sup_{\varphi \in \Phi_a} E^P \left[ U \left( V_T^{\varphi, x-\delta} + \frac{\delta}{p} X \right) \right].$$

Niech dla każdego ustalonego  $(x, p)$  funkcja  $W(\delta, x, p)$  jest różniczkowalna w otoczeniu  $\delta = 0$ . Jeśli równanie

$$\frac{\partial W}{\partial \delta}(0, p, x) = 0,$$

ma jednoznaczne rozwiązanie  $p(\hat{x})$ , to rozwiązanie to jest ceną sprawiedliwą.

Powyższa definicja ma naturalną interpretację. Jeśli z początkowego kapitału  $x$  przeznaczymy  $\delta$  na zakup instrumentu  $X$  po cenie  $p$ , to stan posiadania w chwili  $T$  będzie równy  $V_T^{\varphi, x-\delta}$ . Cena  $p$  będzie uczciwa, jeśli zostanie spełniony warunek marginalnej stopy substytucji, to znaczy przeznaczenie niewielkiej części kapitału na inwestycje w instrument  $X$  w chwili  $t = 0$  ma pomijalny wpływ na osiąganą przez inwestora użyteczność kapitału. Istnienie tego wpływu oznaczałoby, że cena  $p$  nie może być uznana za uczciwą, bo na przykład dla  $\frac{\partial W}{\partial \delta} > 0$  opłacalne byłoby kupowanie instrumentu  $X$ , natomiast nieopłacalna byłaby jego sprzedaż.

Teraz można podać ogólny wzór na wycenę oparty na definicji 2.4.2.

### **Twierdzenie 2.5.1**

Załóżmy, że  $\hat{U}$  jest różniczkowalna dla każdego  $x \in \mathbb{R}_+$  i  $\hat{U}'(x) > 0$ . Wtedy cena sprawiedliwa jest dana wzorem

$$p(\hat{x}) = \frac{E^P \left[ U \left( V_T^{\varphi^*, x} \right) X \right]}{\hat{U}'(x)},$$

dla pewnej strategii  $\varphi^* \in \Phi_a$ .

## Rozdział III

### Koncepcje wyceny opcji w oparciu o modele zmienności

Przedstawiony w rozdziale 2 model Blacka-Scholesa, mimo upływu ponad trzydziestu lat od jego opublikowania, wciąż jest najpopularniejszym modelem wyceny opcji. Giełdy (wśród nich Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie) używają wzoru Blacka-Scholesa do wyliczenia kursów odniesienia dla notowanych opcji. Do tak spektakularnego sukcesu przyczyniła się głównie prostota stosowania tego modelu, choć jednocześnie literatura omawiająca jego wady jest bardzo bogata. W poprzednim rozdziale wskazano również na główne niedoskonałości modelu  $\mathcal{M}^{BS}$ .

Jednym z kierunków badań uwzględniających powyższą krytykę jest wykorzystanie do wyceny opcji modeli zmienności. Zaletą tych modeli, oprócz oczywistej zdolności do wyjaśnienia i opisu kształtowania się zmienności, jest możliwość uwzględnienia rozkładu innego niż normalny. W rozdziale przedstawiono trzy typy modeli oraz metody ich wykorzystania do wyceny opcji:

- modele GARCH (uogólnionej autoregresyjnej heteroskedastyczności warunkowej),
- modele SV (zmienności stochastycznej),
- modele przełącznikowe typu Hamiltona.

#### 3.1 Modele GARCH

Koncepcja modelu, w którym warunkowe wariancje zależą od przeszłych stanów gospodarki, po raz pierwszy pojawiła się w pracy Engle'a<sup>1</sup>. Praca ta dotyczyła zmienności inflacji w Wielkiej Brytanii. Zaproponowany przez Engle'a model autoregresyjnej heteroskedastyczności warunkowej (*autoregressive conditional heteroscedasticity* – ARCH) był następnie wielokrotnie modyfikowany i rozszerzany. W empirycznych zastosowaniach, przy dużej liczbie obserwacji konieczne jest estymowanie dużej ilości parametrów. Rozwiązaniem tego problemu okazał się być uogólniony model autoregresyjnej heteroskedastyczności warunkowej (*generalized autoregressive conditional heteroskedasticity* – GARCH) zaproponowany przez Bollersleva<sup>2</sup>. W modelu tym do równania zmienności wprowadzono dodatkowo jej opóźnione wartości, dzięki czemu zredukowano liczbę koniecznych do estymowania parametrów. Kolejne modyfikacje,

---

<sup>1</sup> Engle R.F. [1982], *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, *Econometrica* 50, ss. 987-1007

<sup>2</sup> Bollerslev T. [1986], *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, *Journal of Econometrics* 31, ss. 307-327

polegające na dołączeniu dodatkowych parametrów w równaniu strukturalnym zmienności lub na transformacji tego równania, umożliwiły wychwycenie specyficznych zależności między zwrotami a zmiennością. Prosta budowa modeli GARCH i łatwa estymacja parametrów przesądziły o ich popularności. Są obecnie najpowszechniej stosowanymi modelami zmienności instrumentów finansowych, a jednym z wielu ich zastosowań jest wycena instrumentów pochodnych.

Niech  $r_t$  oznacza procentowy zwrot logarytmiczny<sup>3</sup> z instrumentu finansowego w chwili  $t$ , a  $\varepsilon_t = r_t - E(r_t | \mathcal{F}_{t-1})$ . Model ARCH( $q$ ) można zapisać za pomocą specyfikacji:

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad (3.1)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (3.2)$$

gdzie  $z_t$  jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie ze średnią zero i wariancją jeden (co w skrócie będzie zapisywane  $z_t \sim iid(0,1)$ ),  $\omega > 0$  i  $\alpha_i \geq 0$  dla  $i = 1, 2, \dots, q$ .

Równanie (3.2) opisuje zależność polegającą na tym, że duże wartości  $\varepsilon_{t-1}^2$  pociągają za sobą dużą zmienność  $\sigma_t^2$ . Oznacza to, że w szeregach generowanych przez proces ARCH prawdopodobieństwo wystąpienia po dużej zmianie kolejnej dużej zmiany jest większe niż prawdopodobieństwo wystąpienia zmiany małej. To powoduje, że modele ARCH są przydatne do modelowania szeregów czasowych, w których występuje grupowanie zmienności. Uogólnienie modelu ARCH uzyskano przez dodanie do równania (3.2) dodatkowego składnika, które reprezentują opóźnione wartości zmienności. Stąd model GARCH( $p, q$ ) opisany jest równaniami:

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \quad (3.3)$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (3.4)$$

gdzie  $z_t \sim iid(0,1)$ ,  $\omega > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  oraz  $\beta_j \geq 0$  dla  $i=1,2,\dots,q$ ,  $j=1,2,\dots,p$ . Ponadto, jeśli spełniona jest nierówność:

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j < 1$$

to model jest słabo stacjonarny<sup>4</sup>.

<sup>3</sup> dokładniej pojęcie procentowego zwrotu logarytmicznego zostało omówione w rozdziale 4

<sup>4</sup> Ling S., McAleer M. [2002], *Stationarity and Existence of Moments of a Family of GARCH Processes*, Journal of Econometrics 106, ss. 109-117

Prognoza zmienności na  $h$  dni naprzód, wyliczana za pomocą modelu GARCH( $p, q$ ) wyraża się wzorem:

$$\sigma_{t+h|t}^2 = E(\sigma_{t+h}^2 | \mathcal{F}_t) = \omega + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t+h-j|t} + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t+h-i|t}^2,$$

gdzie  $\varepsilon_{t+i|t}^2 = \sigma_{t+i|t}^2$  dla  $i > 0$  oraz  $\varepsilon_{t+i|t}^2 = \varepsilon_{t+i}^2$  i  $\sigma_{t+i|t}^2 = \sigma_{t+i}^2$  dla  $i < 0$ .

W podstawowym modelu GARCH rozkład składnika losowego  $z_t$  jest rozkładem normalnym, co jest równoznaczne z tym, że rozkład warunkowy zmiennej  $\varepsilon_t$  jest normalny  $N(0, \sigma_t^2)$ . Jednak zarówno rozkład bezwarunkowy i warunkowy często charakteryzuje się leptokurtycznością i występowaniem grubych ogonów. W celu lepszego dopasowania modeli GARCH do takich przypadków stosuje się alternatywne rozkłady zmiennej  $z_t$ , między innymi:

- rozkład Studenta,
- uogólniony rozkład błędu (*generalized error distribution* – GED),
- skośny rozkład Studenta.

Standaryzowany rozkład Studenta z  $\nu$  stopniami swobody (dla  $\nu > 2$ ) jest rozkładem symetrycznym o zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowej wariancji, którego funkcja gęstości dana jest wzorem:

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu-2}\right)^{-\frac{(\nu+1)}{2}}, \quad (3.5)$$

gdzie  $\Gamma(\cdot)$  jest standardową funkcją gamma. Rozkład ten przy liczbie stopni swobody dążącej do nieskończoności jest zbieżny do standardowego rozkładu normalnego. Liczba stopni swobody nie musi być z góry określona, lecz jest estymowana wraz z pozostałymi parametrami modelu.

Uogólniony rozkład błędu do rodziny modeli GARCH został po raz pierwszy wprowadzony przez Nelsona<sup>5</sup>. Podobnie jak rozkład Studenta jest symetryczny, a jego funkcja gęstości wyraża się wzorem:

$$f(x) = \frac{\nu \exp\left(-\frac{1}{2} \left|\frac{x}{\lambda}\right|^\nu\right)}{\lambda \cdot 2^{\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)} \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}, \quad (3.6)$$

gdzie

---

<sup>5</sup> Nelson D.B. [1991], *Conditional Heteroskedacity in Asset Returns: A New Approach*, *Econometrica* 59, ss. 347-370

$$\lambda = \left[ \frac{2^{-\frac{2}{\nu}} \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.7)$$

Dla  $\nu = 2$ , zachodzi  $\lambda = 1$  i (3.6) jest gęstością standardowego rozkładu normalnego. Przy  $\nu < 2$  rozkład GED ma grubsze ogony, a przy  $\nu > 2$  cieńsze niż rozkład normalny.

Obserwowane w szeregach finansowych zjawisko skośności można uwzględnić przez zastosowanie skośnego rozkładu Studenta. Funkcja gęstości tego rozkładu ma postać:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\xi + \xi^{-1}} sg(\xi(sx + m)), & \text{gdy } z < -\frac{m}{s} \\ \frac{2}{\xi + \xi^{-1}} sg\left(\left(\frac{sx + m}{\xi}\right)\right), & \text{gdy } z \geq -\frac{m}{s} \end{cases} \quad (3.8)$$

gdzie zakłada się że  $\nu > 2$ ,  $g$  jest gęstością standaryzowanego rozkładu Studenta z  $\nu$  stopniami swobody określoną wzorem (3.5),  $\xi$  jest współczynnikiem asymetrii oraz

$$m = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right) \sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} (\xi - \xi^{-1}) \text{ i } s^2 = \xi^2 + \xi^{-2} - 1 - m^2.$$

Dla  $\xi = 1$ , skośny rozkład Studenta z  $\nu$  stopniami swobody staje się symetrycznym rozkładem Studenta o funkcji gęstości określonej wzorem (3.5).

Skośny rozkład Studenta zaproponowali Fernandez i Steel<sup>6</sup>, zaś jako rozkład warunkowy w procesie GARCH wprowadzili go Osiewalski i Pipień<sup>7</sup>. Autorzy ci nie zakładali  $\nu > 2$ , nie rozważali więc wersji standaryzowanej rozkładu, a proces GARCH definiowali stosując odwrotność precyzji (w miejsce wariancji nie istniejącej przy  $\nu \leq 2$ ).

Modyfikacje dotyczące równania strukturalnego w modelu GARCH umożliwiające uwzględnienie obserwowanych własności finansowych szeregów czasowych są bardzo liczne. Efekt asymetrycznego wpływu informacji na poziom zmienności pozwala uwzględnić wykładniczy model GARCH( $p, q$ ) (EGARCH( $p, q$ )), zaproponowany po raz pierwszy przez

<sup>6</sup> Fernandez C., Steel M. [1998], *On Bayesian Modeling of Fat Tails and Skewness*, Journal of the American Statistical Association 93, ss. 359-371

<sup>7</sup> Osiewalski J., Pipień M. [1999], *Bayesian forecasting of exchange rates using GARCH models with skewed t conditional distributions*. MACROMODELS'98 – Conference Proceedings, vol.2, ss. 195-218  
Osiewalski J., Pipień M. [2000], *GARCH-in-Mean through skewed t conditional distributions: Bayesian inference for exchange rates*, MACROMODELS'99 – Conference Proceedings, ss. 354-369

Nelsona<sup>8</sup>. Przedstawiona poniżej postać, wykorzystująca operator opóźnienia  $L$ , to najczęściej przywoływana w literaturze specyfikacja tego modelu, którą podał Bollerslev i Mikkelsen<sup>9</sup>:

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + [1 - \beta(L)]^{-1} [1 + \alpha(L)]g(z_{t-1}), \quad (3.9)$$

gdzie:

$$\alpha(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_q L^q,$$

$$\beta(L) = \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_p L^p,$$

$$g(z_t) = \gamma_1 z_t + \gamma_2 (|z_t| - E(|z_t|)).$$

Funkcja  $g$  we wzorze (3.9) uwzględnia zarówno wielkość jak i znak innowacji  $z_t$ . Odchylenie zmiennej  $|z_t|$  od jej wartości oczekiwanej wpływa na zmianę wariancji warunkowej w sposób zależny od kierunku i siły tego odchylenia. Z kolei wartość oczekiwana  $E(z_t) = E\left(\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}\right) = E\left(\frac{|z_t|}{\sigma_t}\right)$  zależy od przyjętego rozkładu innowacji  $z_t$ :

– dla rozkładu normalnego mamy:

$$E|z_t| = \sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

– dla skośnego rozkładu Studenta<sup>10</sup>:

$$E|z_t| = \frac{4\xi^2 \Gamma\left(\frac{1+\nu}{2}\right) \sqrt{\nu-2}}{(\xi + \xi^{-1}) \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) (\nu-1) \sqrt{\pi}}$$

– dla rozkładu GED:

$$E|z_t| = \frac{2^{\frac{1}{\nu}} \lambda \Gamma\left(\frac{2}{\nu}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)},$$

gdzie  $\lambda$  określona jest wzorem (3.7).

Innym modelem pozwalającym uwzględnić asymetrię jest model APARCH<sup>11</sup>, który wprowadzili Ding, Granger i Engle<sup>12</sup>, a w którym wariancja warunkowa jest opisana równaniem:

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \gamma_i \varepsilon_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad (3.10)$$

<sup>8</sup> Nelson D.B. [1991], *Conditional...*, op. cit.

<sup>9</sup> Bollerslev T., Mikkelsen H. [1996], *Modeling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility*, Journal of Econometrics 73, ss. 151-184

<sup>10</sup> Dla  $\xi = 1$  otrzymamy wartość oczekiwaną dla symetrycznego rozkładu Studenta.

<sup>11</sup> W literaturze czasem można spotkać się z inną nazwą tego modelu APGARCh.

<sup>12</sup> Ding Z., Granger C.W.J, Engle R.F. [1993], *A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model*, Journal of Empirical Finance 1, ss. 83-106

gdzie  $\delta > 0$ ,  $-1 < \gamma_i < 1$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, q$ ).

Model APARCH oprócz uwzględnienia asymetrii umożliwia dopasowanie wykładnika  $\delta$ , w sposób gwarantujący istnienie bezwarunkowego momentu rzędu  $\delta$  dla procesu  $\sigma_t$ . Ponadto model APARCH( $p, q$ ) obejmuje siedem rozszerzeń i szczególnych przypadków modelu ARCH:

- standardowy model ARCH dla  $\delta = 2$ ,  $\gamma_i = 0$ ,  $\beta_i = 0$  ( $i=1, 2, 3, \dots, p$ ),
- standardowy model GARCH dla  $\delta = 2$ ,  $\gamma_i = 0$  ( $i=1, 2, 3, \dots, p$ ),
- model TS-GARCH Taylora i Schwerta, gdy  $\delta = 1$ ,  $\gamma_i = 0$  ( $i=1, 2, 3, \dots, p$ ),
- model GJR-GARCH, gdy  $\delta = 2$ ,
- model TARCH, gdy  $\delta = 1$ ,
- model NARCH Higginsa i Bery, gdy  $\gamma_i = 0$ ,  $\beta_i = 0$  ( $i=1, 2, 3, \dots, p$ ),
- model Log-ARCH Geweke'a i Pentuli, gdy  $\delta \rightarrow 0$ .

Stosując standardowy model GARCH do modelowania danych o wysokiej częstotliwości, często zdarza się, że suma estymowanych współczynników  $\alpha_i$  i  $\beta_j$  jest bliska jeden:

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j \approx 1.$$

W pracy Engle'a i Bollersleva<sup>13</sup> model GARCH( $p, q$ ), w którym:

$$\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$$

nazwany został modelem zintegrowanym (IGARCH). Wariancja bezwarunkowa zmiennej  $\varepsilon_t$  generowanej przez proces IGARCH jest nieskończona, zatem proces  $\varepsilon_t$  nie jest kowariancyjnie stacjonarny, może być jednak ściśle stacjonarny. Model IGARCH charakteryzuje silna persystencja, to znaczy trwała zależność prognozy  $\sigma_{t+h|t}^2$  od zmienności warunkowej  $\sigma_t^2$ . Cecha ta istotnie różni ten model od kowariancyjnie stacjonarnego modelu GARCH, w którym zależność ta zanika w tempie wykładniczym wraz z wydłużaniem horyzontu prognozy.

Podział procesów według wspomnianej własności na dwie klasy byłby zbyt restrykcyjny - finansowe szeregi czasowe wykazują zależności długookresowe ale nie tak silne. Lukę

---

<sup>13</sup> Bollerslev T, Engle R. [1986], *Modelling the Persistence of Conditional Variances*, *Econometric Reviews* 5, ss. 1-50



między procesami o krótkiej pamięci i procesami charakteryzującymi się trwałym wpływem szoków wypełniają procesy ułamkowo zintegrowane (FIGARCH).

Wariancja warunkowa w modelu FIGARCH( $p, d, q$ ) jest określona następująco<sup>14</sup>:

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega}{1 - \beta(L)} + \left[ 1 - \frac{\phi(L)(1 - L)^d}{1 - \beta(L)} \right] \varepsilon_t^2, \quad (3.11)$$

gdzie:

$$\phi(L) = [1 - \alpha(L) - \beta(L)](1 - L)^{-1},$$

$$\alpha(L) = \alpha_1 L + \alpha_2 L^2 + \dots + \alpha_q L^q,$$

$$\beta(L) = \beta_1 L + \beta_2 L^2 + \dots + \beta_p L^p,$$

$0 \leq d \leq 1$  parametr pamięci.

Występująca w (3.11) ułamkowa potęga  $(1 - L)^d$  operatora pierwszych różnic może być przedstawiona za pomocą standardowej funkcji  $\Gamma$  w postaci:

$$(1 - L)^d = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{d\Gamma(j - d)}{\Gamma(1 - d)\Gamma(j + 1)} L^j.$$

Zatem model FIGARCH( $p, d, q$ ) zawiera model IGARCH( $p, q$ ) (dla  $d = 1$ ), jak i standardowy model GARCH( $p, q$ ) (dla  $d = 0$ ).

Definicja modelu FIGARCH( $p, d, q$ ) określona wzorem (3.11) poddana została krytyce przez różnych autorów. Kwestionowano między innymi uzasadnienia hipotez na temat stacjonarności tego modelu przedstawione w pracy Bailliego i innych<sup>15</sup>. Inną specyfikację modelu zaproponował Chung<sup>16</sup>:

$$\sigma_t^2 = \sigma^2 + \lambda(L)(\varepsilon_t^2 - \sigma^2), \quad (3.12)$$

gdzie:

$$\lambda(L) = 1 - \frac{\phi(L)(1 - L)^d}{1 - \beta(L)} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j L^j,$$

natomiast  $\sigma^2$  jest bezwarunkową wariancją  $\varepsilon_t$ .

Zgodnie z propozycją Chunga, w praktyce wartości tego szeregu są skracane do  $i = t - 1$  przyjmując jako wartości początkowe dla  $\varepsilon_t^2 - \sigma^2$  zera.

<sup>14</sup> Baillie R., Bollerslev T., Mikkelsen H. [1996], *Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, Journal of Econometrics 74, ss. 3-30

<sup>15</sup> Ibidem

<sup>16</sup> Chung C.-F. [1999], *Estimating the Fractionally Integrated GARCH Model*, National Taiwan University Working Paper

Koncepcja ułamkowej integracji została rozszerzona na inne modele GARCH. Bollerslev i Mikkelsen<sup>17</sup> przedstawili zintegrowany ułamkowo model EGARCH (FIEGARCH) a Tse<sup>18</sup> zintegrowany ułamkowo APARCH (FIAPARCH). Podobnie do procesu GARCH( $p, q$ ), proces EGARCH( $p, q$ ) określony wzorem (3.9) można rozszerzyć o długą pamięć przez zastąpienie wielomianu  $1 - \beta(L)$  przez wyrażenie  $\phi(L)(1 - L)^d$ , zatem model FIEGARCH( $p, d, q$ ) jest określony następująco:

$$\ln \sigma_t^2 = \omega + \phi(L)^{-1}(1 - L)^{-d} [1 + \alpha(L)]g(z_{t-1}), \quad (3.13)$$

Natomiast w przypadku modelu FIAPARCH( $p, d, q$ ) otrzymujemy:

$$\sigma_t^\delta = \omega + \left[ 1 - \frac{\phi(L)(1 - L)^d}{1 - \beta(L)} \right] (|\varepsilon_t| - \gamma \varepsilon_t)^\delta. \quad (3.14)$$

Uogólnioną wersję modelu FIGARCH przedstawił Davidson<sup>19</sup> i nazwał ją hiperbolicznym modelem GARCH (HYGARCH). Równanie HYGARCH( $p, \alpha, d, q$ ) można uzyskać przez zastąpienia ułamkowej potęgi  $(1 - L)^d$  we wzorze (3.11) wyrażeniem  $1 + \alpha[(1 - L)^d - 1]$ :

$$\sigma_t^2 = \frac{\omega}{1 - \beta(L)} + \left[ 1 - \frac{\phi(L)1 + \alpha[(1 - L)^d - 1]}{1 - \beta(L)} \right] \varepsilon_t^2, \quad (3.15)$$

gdzie o parametrach  $\alpha$  i  $d$  zakłada się, że są nieujemne. HYGARCH zawiera model GARCH (dla parametru  $\alpha = 0$ ), FIGARCH (dla  $\alpha = 1$ ) oraz IGARCH (dla  $\alpha = d = 1$ ).

### 3.2 Wycena opcji w oparciu o modele GARCH

Jako pierwszy użycie modelu klasy GARCH do wyceny instrumentów pochodnych zaproponował Duan<sup>20</sup>. W swojej pracy uogólnił tradycyjną koncepcję wyceny przy neutralnym podejściu do ryzyka. Podobnie jak w klasycznym podejściu wprowadza się miarę prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}$ , dla procesu nieprzekształconego oraz arbitrażowej miary  $\mathbf{Q}$ , względem której zdyskontowany proces cen instrumentu finansowego jest martyngałem. Modyfikacja procesu stóp zwrotu, dokonywana jest w taki sposób, by w każdej chwili warunkowa wartość oczekiwana stopy zwrotu była równa stopie zwrotu wolnej od ryzyka. Parametr modyfikujący proces stóp zwrotu nie jest stały w czasie i podejście to nazwane zostało wyceną dla zależności (miary) lokalnie wolnej od ryzyka (*Local Risk-Neutral Valuation Relationship* - LRNVR).

<sup>17</sup> Bollerslev T., Mikkelsen H. [1996], *Modeling...*, op.cit.

<sup>18</sup> Tse Y.K. [1995], *The Conditional Heteroscedasticity of the Yen-Dollar Exchange Rate*, Journal of Applied Econometrics 193, ss.49-55

<sup>19</sup> Davidson J. [2000], *Moment and memory Properties of Linear Conditional Heteroscedasticity Models, and a new Model*, Journal of Business and Economics Statistics 2, ss. 16-29

<sup>20</sup> Duan J.-C. [1995], *The GARCH Option Pricing Model*, Mathematical Finance 5, s. 13-32

Powyższe warunki można zapisać następująco:

$$\text{Var}^P(r_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \text{Var}^Q(r_t|\mathcal{F}_{t-1}), \quad (3.16)$$

$$E^Q(r_t|\mathcal{F}_{t-1}) = r. \quad (3.17)$$

Jednym z kluczowych założeń dla omawianego podejścia jest warunkowa normalność stóp zwrotu. To założenie jest niezbędne, by zapewnić niezmienniczość rozkładu w czasie przekształcania procesu stóp zwrotu do martyngału. Jednak założenie to stoi w sprzeczności z przywoływanymi w rozdziale 4 badaniami. Dlatego też Duan<sup>21</sup> zaproponował ogólniejszą wersję swojego podejścia, które uwzględnia rozkłady inne niż normalny. Zasadnicza idea rozszerzenia sprowadza się do przekształcenia rozkładów gruboogonowych i skośnych do rozkładu normalnego dla którego stosowanie LRNVR jest zasadne. Definicje i twierdzenia przywoływane w tym podrozdziale pochodzą z przytaczanej pracy Duana<sup>22</sup>.

Niech warunkowa średnia  $\mu_t$  oraz warunkowa wariancja  $\sigma_t^2$  będą funkcjami mierzalnymi względem zbioru informacji  $\mathcal{F}_{t-1}$ , wówczas ogólną postać modelu względem miary  $\mathbf{P}$  można zapisać poniższymi równaniami:

$$\begin{cases} \tau\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}, \delta\right) = \mu_t + \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 = f(\sigma_s, z_t, -\infty < s < t, \theta) \\ z_t \sim D(0,1) \\ \tau(u, \delta) = \begin{cases} \frac{u^\delta - 1}{\delta} & \text{dla } u > 0 \text{ i } \delta > 0 \\ \ln u & \text{dla } u > 0 \text{ i } \delta = 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3.18)$$

gdzie  $f$  to funkcja parametryczna opisująca wariancję warunkową, w której wektor  $\theta$  jest parametrem,  $z_t$  jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie ze średnią zero i wariancją jeden,  $r$  to stopa wolna od ryzyka, wreszcie  $\delta$  przyjmuje wartości zapewniające istnienie warunkowej wartości oczekiwanej dla  $\tau\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}, \delta\right)$  względem miary  $\mathbf{P}$ .

$\tau(\cdot, \delta)$  jest przekształceniem Boxa-Coxa, zatem

$$\begin{aligned} \tau\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}, 0\right) &= \ln \frac{S_t}{S_{t-1}}, \\ \tau\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}, 1\right) &= \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1 = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}. \end{aligned}$$

Model (3.18) opisuje zwroty logarytmiczne, gdy  $\delta = 0$  i zwroty proste gdy  $\delta = 1$ .

Wybór wartości  $\delta$  nie może być arbitralny. Jeśli bowiem w modelu (3.18) przyjmiemy  $\delta = 0$  oraz  $z_t \sim t(0,1)$  to wartość oczekiwana zwrotu prostego nie istnieje (jest

<sup>21</sup> Duan J.-C. [1999], *Conditionally fat-tailed distributions and the volatility smile in options*, Working Paper, Department of Finance, Hong Kong University of Science and Technology

<sup>22</sup> Ibidem

nieskończona). Dzieje się tak, gdyż ta kombinacja założeń oznacza, że zwroty logarytmiczne są modelowane jako zmienna losowa o warunkowym rozkładzie Studenta. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} E^Q \left[ \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] &= E^Q \left[ \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1 \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] = E^Q \left[ \frac{S_t}{S_{t-1}} \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] - 1 = \\ &= E^Q \left[ \exp \left( \ln \frac{S_t}{S_{t-1}} \right) \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right] - 1 = E^Q [\exp(\mu_t + \sigma_t z_t) \middle| \mathcal{F}_{t-1}] - 1 = \infty. \end{aligned}$$

By uniknąć problemu można użyć w modelu (3.18) zwrotów prostych, czyli przyjąć  $\delta = 1$ . Niemniej ten sposób postępowania powoduje, że mogą pojawiać się ujemne ceny, co z pewnością nie jest cechą pożądaną. Takich problemów nie ma jeśli zastosowany zostanie uogólniony rozkład błędu (GED).

Zmienna  $z_t$  może zostać przekształcona do standardowego rozkładu normalnego za pomocą odwzorowania:

$$\psi(z_t) = \phi^{-1}[D(z_t)], \quad (3.19)$$

gdzie  $\phi$  jest dystrybucją standardowego rozkładu normalnego.

Rynek opisany modelem (3.18) jest niezupełny, istnieje bowiem dodatkowe źródło niepewności, co oznacza, że istnieją na rynku instrumenty pochodne nieosiągalne, czyli takie których wypłaty nie mogą być replikowane za pomocą strategii samofinansujących. Znalezienie RMM wymaga więc wprowadzenia dodatkowych założeń dotyczących preferencji inwestora.

Niech  $t_l$  i  $t_u$ , gdzie  $t_l < t_u$ , będą dowolnymi całkowitymi momentami czasu. Ponieważ momenty są dowolne można nimi objąć każdy czas życia opcji. Ponadto niech  $U(C_t)$  oraz  $C_t$  oznaczają odpowiednio ściśle rosnącą funkcję użyteczności inwestora i zagregowaną konsumpcję w chwili  $t$ . Zakłada się, że inwestor maksymalizuje oczekiwaną użyteczność konsumpcji, a funkcja użyteczności jest czasowo separowalna i addytywna (patrz dodatek C, definicja C.1 i C.2). Powyższe założenia prowadzą do następującego równania Eulera na cenę dowolnego instrumentu pochodnego w chwili  $t - 1$ :

$$\pi_{t-1} = E^P \left[ e^{-\rho} \frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})} \pi_t \middle| \mathcal{F}_{t-1} \right],$$

gdzie  $U'(C_t)$  oznacza marginalną użyteczność konsumpcji w chwili  $t$ , natomiast  $\rho$  jest współczynnikiem niecierpliwości (*impatience factor*). By wartość oczekiwana istniała, marginalna stopa substytucji  $\left( \frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})} \right)$  musi mieć skończony drugi moment warunkowy względem  $\mathcal{F}_{t_l}$  i miary  $P$ .

### **Twierdzenie 3.2.1 (o mierze lokalnie wolnej od ryzyka )**

Niech dana będzie miara  $\mathbf{Q}$  na przedziale  $[t_l, t_u]$  zdefiniowana następująco:

$$d\mathbf{Q} = \exp \left[ -\rho(t_u - t_l) + \sum_{s=t_l+1}^{t_u} \left( r_{s-1,s} + \ln \frac{U'(C_s)}{U'(C_{s-1})} \right) \right] d\mathbf{P}, \quad (3.20)$$

gdzie  $r_{t,t+1}$  jest jednookresową stopą wolną od ryzyka w chwili  $t$ . Wówczas miara  $\mathbf{Q}$  spełnia poniższe warunki:

- 1)  $\mathbf{Q}$  jest miarą prawdopodobieństwa
- 2) Dla  $t_l + 1 \leq t \leq t_u$ , jeżeli  $E^{\mathbf{P}}[\pi_t^2 | \mathcal{F}_{t_l}] < \infty$  i  $E^{\mathbf{P}} \left[ \frac{U'(C_t)}{U'(C_{t-1})} \middle| \mathcal{F}_{t_l} \right] < \infty$  to cena dowolnego instrumentu pochodnego w chwili  $t - 1$  jest równa:

$$\pi_{t-1} = e^{-r_{t-1,t}} E^{\mathbf{Q}}[\pi_t | \mathcal{F}_{t-1}]$$

Poniższa definicja, podająca warunki jakie musi spełnić miara  $\mathbf{Q}$  by mogła posłużyć do sprawiedliwej wyceny instrumentów pochodnych, jest uogólnieniem zależności lokalnie wolnej od ryzyka.

### **Definicja 3.2.1 (Generalized Local Risk Neutral Valuation Relationship – GLRNVR)**

Miara  $\mathbf{Q}$ , zdefiniowana równaniem 3.20, spełnia GLRNVR, jeżeli dla  $t_l \leq t \leq t_u - 1$  zachodzi:

- 1)  $\mathbf{Q} \sim \mathbf{P}$ ,
- 2) istnieje prognozowalny proces  $\lambda_t$ , taki że  $\psi(z_{t+1}) + \lambda_{t+1}$  jest zmienną losową o warunkowym standardowym rozkładzie normalnym względem miary  $\mathbf{Q}$ ,
- 3)  $E^{\mathbf{Q}} \left[ \frac{S_t}{S_{t-1}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \exp(r_{t,t+1})$ .

Pierwsze założenie jest czysto technicznym wymogiem zapewniającym, że miary  $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{Q}$  mają te same zbiory miary zero. Drugi warunek oznacza, że neutralizacja ryzyka jest niezmiennicza, to znaczy charakter rozkładu przekształconych innowacji pozostaje bez zmian. Proces neutralizacja powoduje jedynie zmiany średniej. Wielkość zmian średniej, czyli  $\lambda_t$ , jest zdeterminowana przez trzeci z warunków.

### **Twierdzenie 3.2.2 (warunki wystarczające dla GLRNVR)**

Jeśli inwestor maksymalizuje oczekiwaną użyteczność i funkcja użyteczności jest czasowo separowalna oraz addytywna, wówczas GLRNVR jest spełnione jeśli zachodzi dowolny z poniższych warunków:

- 1) funkcja użyteczności jest funkcją ze stałą względną awersją do ryzyka i logarytmicznymi zwrotami zagregowanej konsumpcji, to znaczy  $\ln \frac{C_t}{C_{t-1}}$  i przekształcone innowacje  $(\psi(\varepsilon_t))$  są dwuwymiarową zmienną losową o warunkowym (względem  $\mathcal{F}_{t-1}$ ) rozkładzie  $\mathbf{P}$ -normalnym,
- 2) funkcja użyteczności jest funkcją ze stałą bezwzględną awersją do ryzyka i zwrotami zagregowanej konsumpcji, to znaczy  $C_t - C_{t-1}$  oraz przekształcone innowacje  $(\psi(\varepsilon_t))$  są dwuwymiarową zmienną losową o warunkowym (względem  $\mathcal{F}_{t-1}$ ) rozkładzie  $\mathbf{P}$ -normalnym,
- 3) funkcja użyteczności jest liniowa.

Kolejne twierdzenie wynika z podstawienia do modelu (3.18) definicji GLRNVR.

### Twierdzenie 3.2.3

Niech warunek GLRNVR będzie spełniony. Wówczas dla  $t_l \leq t \leq t_u - 1$  i RMM  $\mathbf{Q}$  układ równań umożliwiający wycenę opcji przyjmuje postać:

$$\begin{cases} \tau \left( \frac{S_t}{S_{t-1}}, \delta \right) = \mu_t + \sigma_t \psi^{-1}(\eta_t - \lambda_t) \\ \eta_t \sim N(0,1) \\ \sigma_t^2 = f(\sigma_s, z_t, -\infty < s < t, \theta) \\ z_t = \psi^{-1}(\eta_t - \lambda_t) \end{cases} \quad (3.21)$$

gdzie  $\eta_{t+1}$  jest zmienną losową o warunkowym (względem  $\mathcal{F}_t$ ) rozkładzie  $\mathbf{Q}$ -normalnym, a  $\lambda_t$  jest rozwiązaniem równania:

$$E^{\mathbf{Q}}[\tau^{-1}(\mu_t + \sigma_t \psi^{-1}(\eta_t - \lambda_t), \delta) | \mathcal{F}_{t-1}] = \exp(r_{t-1,t}).$$

Twierdzenia 3.2.1 i 3.2.3 dają podstawy do wyceny dowolnego instrumentu pochodnego, którego instrumentem bazowym jest  $S_t$ . Z układu równań (3.21) wynika, że zdyskontowany proces cen jest martyngałem, można zatem zastosować arbitrażową metodę wyceny. Jeśli wypłata z instrumentu pochodnego jest pewną funkcją  $g(S_T)$ , to przy założeniu, że stopa procentowa wolna od ryzyka jest stała, cena tej derywatywy w chwili  $t$  wyraża się wzorem:

$$\pi_t = \exp[-r(T-t)] E^{\mathbf{Q}}[g(S_T) | \mathcal{F}_t]. \quad (3.22)$$

Wzór (3.22) wynika wprost z punktu 2) twierdzenia 3.2.1 i z prawa iterowanych oczekiwań (patrz dodatek C, twierdzenie C.1). Ponieważ dynamika  $S_t$  względem miary  $\mathbf{Q}$  jest określona w twierdzeniu 3.2.3 problem wyceny opcji sprowadza się do wyliczenia wartości oczekiwanej.

Odmienne podejście od zaprezentowanego powyżej zaproponowali Kallsen i Taqqu<sup>23</sup>, którzy użyli ciągłej wersji modelu o cechach modelu ARCH, uzyskując ten sam wynik. Istnieją również prace, w których wykorzystanie modeli GARCH do wyceny opcji nie wymaga symulacji, np. Heston, Nandi<sup>24</sup> wyprowadzili analityczny (wymagający jednak wyznaczenia w sposób numeryczny całki z funkcji zespolonej) wzór oparty na modelu GARCH(1,1). Z kolei Duan, Gauthier, Simonato<sup>25</sup> oraz Duan, Gauthier, Sasseville, Simonato<sup>26</sup> przedstawili wyceny wykorzystujące modele GARCH, EGARCH i GJR-GARCH, w których cena opcji jest aproksymowana. Modele te nie były wykorzystywane w tej pracy ze względu na narzucony *a priori* typ modelu zmienności na podstawie, którego wyceniane są opcje. W Polsce wyceną europejskiej opcji kupna zajmowali się Osiewalski i Pipień<sup>27</sup>. Autorzy Ci zastosowali podejście bayesowskie.

### 3.3 Modele przełącznikowe

Jednym z najpopularniejszych modeli przełącznikowych jest zaproponowany przez Hamiltona<sup>28</sup> model przełącznikowy typu Markowa. W modelu tym zakłada się, że reżim występujący w chwili  $t$  jest określony przez nieobserwowalny proces  $s_t$ , który przyjmuje  $M$  wartości:  $\{1, 2, \dots, M\}$ . Proces  $s_t$  jest procesem Markowa rzędu pierwszego, zatem bieżący reżim  $s_t$  zależy jedynie od reżimu poprzedniego  $s_{t-1}$ , co formalnie można zapisać następująco:

$$P(s_t = a_t | s_{t-1} = a_{t-1}, \dots, s_1 = a_1, s_0 = a_0) = P(s_t = a_t | s_{t-1} = a_{t-1}),$$

gdzie  $a_i$  przyjmuje wartość ze zbioru  $\{1, 2, \dots, M\}$ .

Model jest więc opisany przez prawdopodobieństwa przejść pomiędzy poszczególnymi stanami. Model ma następującą postać ogólną:

$$r_t - \mu(s_t) = \varphi_1(r_{t-1} - \mu(s_{t-1})) + \dots + \varphi_p(r_{t-p} - \mu(s_{t-p})) + y_t, \quad (3.23)$$

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad (3.24)$$

<sup>23</sup> Kallsen J., Taqqu M. [1998], *Option Pricing in ARCH-Type Models*, Mathematical Finance 8, ss. 13-26

<sup>24</sup> Heston S.L., Nandi, S. [2000], *A Closed-Form GARCH Option Valuation Model*. Review of Financial Studies 13(3), ss. 585–625

<sup>25</sup> Duan J.-C., Gauthier G., Simonato J.-G. [1998], *An Analytical Approximation for the GARCH Option Pricing Model*, Working paper, Rotman School of Management, University of Toronto

<sup>26</sup> Duan J.-C., Gauthier G., Sasseville C., Simonato, J.-G. [2006], *Approximating the GJR-GARCH and EGARCH Option Pricing Models Analytically*, Journal of Computational Finance 9, ss. 41-69

<sup>27</sup> Osiewalski J., Pipień M. [2005], *Bayesian Pricing of an European Call Option using a GARCH Model with Assymetrics*, w: Milo W., Wdowiński P., [red.], *Rynki Finansowe. Prognozy a decyzje*, Zeszyt Naukowy Folia Oeconomica 177, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, ss. 219-238

<sup>28</sup> Hamilton J.D. [1989], *A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time series and the Business Cycle*, Econometrica 57, ss. 357-384

$$\sigma_t^2 = \sigma(s_t) \left( 1 + \frac{\alpha_1 y_{t-1}^2}{\sigma(s_{t-1})} \right) + \dots + \frac{\alpha_p y_{t-p}^2}{\sigma(s_{t-p})}, \quad (3.25)$$

gdzie:

- $r_t$  - procentowy zwrot logarytmiczny,
- $p$  - rząd opóźnienia,
- $\varepsilon_t \sim D(0,1)$ ,
- $\mu(s_t), \sigma(s_t)$  oraz  $\alpha_i, \varphi_i$  to parametry, które należy wyestymować.

Estymowane są również prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy stanami (ze stanu  $i$  do stanu  $j$ ):

$$P(s_t = j | s_{t-1} = i) = p_{ij}. \quad (3.26)$$

Ponieważ parametry  $p_{ij}$  interpretowane są jako prawdopodobieństwa, to powinny być one nieujemne oraz spełniać warunek - dla każdego  $i$ :

$$\sum_{j=1}^M p_{ij} = 1.$$

Model opisany równaniami (3.23)-(3.25) należy do klasy AR( $p$ )-ARCH( $p$ ). Najczęściej wykorzystywanym w praktyce modelem przełącznikowy typu Markowa jest model z dwoma reżimami. Zatem zmienna  $s_t$  w równaniach (3.23-3.25) jest procesem Markowa o dwóch stanach przyjmujących wartości 1 i 2 (czyli jest to ciąg 1 i 2). Najczęściej przyjmowaną interpretacją jest traktowanie jednego reżimu jako stanu wysokiej aktywności rynku, a drugiego jako rynku uspokojonego. Dla dwóch reżimów i opóźnienia  $p$  rzędu pierwszego model opisany równaniami (3.23-3.25) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} r_t - \mu(s_t) &= \varphi_1 (r_{t-1} - \mu(s_{t-1})) + y_t, \\ y_t &= \sigma_t \varepsilon_t, \end{aligned}$$

$$\sigma_t^2 = \sigma(s_t) \left( 1 + \frac{\alpha_1 y_{t-1}^2}{\sigma(s_{t-1})} \right).$$

Natomiast prawdopodobieństwa przejścia (3.28) są oznaczane następująco:

$$P(s_t = 1 | s_{t-1} = 1) = p_{11},$$

$$P(s_t = 2 | s_{t-1} = 1) = p_{12},$$

$$P(s_t = 1 | s_{t-1} = 2) = p_{21},$$

$$P(s_t = 2 | s_{t-1} = 2) = p_{22},$$

gdzie  $p_{11} + p_{12} = 1$  oraz  $p_{21} + p_{22} = 1$ .

Możliwe jest również wyznaczenie prawdopodobieństw bezwarunkowych  $P(s_t = i)$ , oznaczających prawdopodobieństwo znajdowania się procesu w poszczególnych reżimach.



Jeśli proces Markowa sterujący zmianą reżimów jest nieprzywiedlny i nieokresowy (patrz dodatek C, definicja C.3) to prawdopodobieństwa bezwarunkowe  $P(s_t = i)$  przebywania procesu w  $i$ -tym reżimie, dla  $i = 1, 2$ , wyznaczone jest w sposób jednoznaczny:

$$P(s_t = 1) = P(1) = \frac{1 - p_{22}}{2 - p_{11} - p_{22}},$$

$$P(s_t = 2) = P(2) = \frac{1 - p_{11}}{2 - p_{11} - p_{22}}.$$

Odwrotność prawdopodobieństwa  $P(s_t = i)$ , oznaczana symbolem  $m(i)$  może być interpretowana jako średni czas powrotu procesu do reżimu  $i$ . Natomiast oczekiwany dalszy czas trwania systemu w reżimie  $i$ , wyraża się wzorem:

$$d(i) = \frac{1}{1 - p_{ii}} = \frac{1}{p_{ij}}.$$

Oczekiwany dalszy czas trwania umożliwia ocenę średniego okres pozostawania w tym samym reżimie, co jak zostanie pokazane w dalszej części pracy, ma istotne znaczenie przy wycenie opcji.

Prognoza zmienności na  $h$  dni naprzód, wyliczana za pomocą modelu przełącznikowego wyraża się wzorem:

$$\hat{\sigma}_{t+h|t}^2 = \sum_{j_0=1}^2 \dots \sum_{j_p=1}^2 P(s_{t+h} = j_0, \dots, s_{t+h-p} = j_p | \mathcal{F}_t) \sigma(j_0) \left( 1 + \sum_{n=1}^p \alpha_n \frac{\hat{\sigma}_{t+h-n|t}^2}{\sigma(j_n)} \right),$$

gdzie  $\hat{\sigma}_s^2 = y_s^2$  dla  $s \leq t$ .

### 3.4 Wycena opcji w oparciu o modele przełącznikowe

Próbie wykorzystania modeli przełącznikowych do wyceny opcji podjęli już w 1994 roku Di Masi, Kabanov i Runggaldier<sup>29</sup>. Swoje rozważania oparli na budowie strategii hedgingowej dostosowywanej do zmieniającej się średniej i wariancji w poszczególnych reżimach. Ciekawe rozwiązanie zaproponowali Duan, Popova i Ritchken<sup>30</sup>, zastosowali oni model przełącznikowy z przełączeniami między parametrami modeli GARCH. Do wyceny opcji w oparciu o modele przełącznikowe Bollen<sup>31</sup> użył z kolei drzew dwumianowych i symulacji, natomiast Buffington, Elliott<sup>32</sup> rozwiązali w tym celu odpowiednie stochastyczne cząstkowe równania różniczkowe (nie uzyskali jednak wzoru analitycznego – rozwiązanie

<sup>29</sup> Di Masi G.B., Kabanov Y.M., Runggaldier W.J. [1994], *Mean-variance hedging of options on stocks with Markov volatility*, Theory of Probability and Its Applications 39, ss.173-181

<sup>30</sup> Duan J.C., Popova I., Ritchken P. [2002], *Option pricing under regime switching*, Quantitative Finance 2, ss. 116-132

<sup>31</sup> Bollen N.P.B. [1998], *Valuing options in regime-switching models*, Journal of Derivatives 6, ss. 38-49

<sup>32</sup> Buffington J., Elliott R.J. [2002], *American options with regime switching*, International Journal of Theoretical and Applied Finance 5, ss. 497-514

jest numeryczne). Podejście Buffingtona i Elliotta rozwinęli Yan, Yin i Zhang<sup>33</sup> - również rozwiązyali system cząstkowych równań różniczkowych, ale wygładzili warunek brzegowy. Uzyskali dzięki temu wzór analityczny na cenę opcji, który jest aproksymacją (wykazali jednocześnie, że ta aproksymacja jest zbieżna z ceną sprawiedliwą). Wreszcie Guo<sup>34</sup> oraz Fuh, Wang i Cheng<sup>35</sup> wyprowadzili analityczny wzór na cenę opcji europejskiej, wychodząc od dwustanowego procesu dyfuzji. Zaproponowali również wzór przybliżający w przypadku większej liczby reżimów. Prezentowane poniżej podejście pochodzi z prac Guo oraz Fuh *et. al.*

Niech dynamika ceny instrumentu bazowego będzie określona równaniem:

$$dS_t = \mu(s_t)S_t dt + \sigma(s_t)S_t dW_t, \quad (3.26)$$

gdzie:

$s_t$  - proces Markowa,

$W_t$  - standardowy proces Wienera, niezależny od  $s_t$ ,

$\mu(s_t), \sigma(s_t)$  - średnia i zmienność o wartościach uzależnionych od stanu rynku.

Wzór (3.26) różni się od klasycznego podejścia zaproponowanego przez Blacka i Scholesa<sup>36</sup> wprowadzeniem dwóch różnych wartości średniej i zmienności charakterystycznych dla poszczególnych stanów rynku. Ze względu na dodatkowy proces  $s_t$  model jest niezupełny. Jednym ze sposobów na jednoznaczne wskazanie RMM jest zaproponowana przez Duffie'ego<sup>37</sup> metoda uzupełnienia rynku. Uzupełnienie rynku sprowadza się do wprowadzenia teoretycznego papieru wartościowego, który wypłaca właścicielowi jednostkę pieniężną w najbliższej chwili zmiany reżimu:

$$\tau(t) = \inf\{u > t | s_u \neq s_t\}.$$

Po wypłacie kontrakt staje się bezwartościowy i emitowany jest następny gwarantujący płatności przy najbliższej zmianie stanu rynku, i tak dalej. Kontrakt taki można interpretować jako ubezpieczenie kompensujące właścicielowi straty związane ze zmianą reżimu, stąd nazwa tego teoretycznego instrumentu finansowego – kontrakt zmiany reżimu (*change-of-state contract*, COS).

<sup>33</sup> Yan H., Yin G., Zhang Q. [2006], *A Regime-Switching Model For European Option Pricing*, w: Zhang Q. (red.) *Stochastic Processes, Optimization, and Control Theory Applications in Financial Engineering, Queueing Networks, and Manufacturing Systems*, Springer, 2006, ss. 281-300

<sup>34</sup> Guo X. [2001], *Information and option pricings*, *Quantitative Finance*, 1, ss. 38-44

<sup>35</sup> Fuh, C. D., Wang, R. H. and Cheng, J. C. [2002], *Option pricing in a Black-Scholes model with Markov switching*. Technical report, Institute of Statistical Science, Academia Sinica, no. C-10.

<sup>36</sup> Black F., Scholes M., *The Pricing...* op. cit.

<sup>37</sup> Duffie D., Huang C.F. [1986], *Multiperiod security markets with differentia information*, *Journal of Mathematical Economics* 15, ss.283-303

Brak arbitrażu i zupełność rynku implikują istnienie dokładnie jednej RMM  $\mathbf{Q}$ , względem której dynamika cen  $X_t$  jest określona równaniem:

$$dX_t = (r - k(s_t))X_t dt + \sigma(s_t)X_t d\tilde{W}_t, \quad (3.27)$$

gdzie

$\tilde{W}_t$  - jest  $\mathbf{Q}$ -procesem Wienera,

$k(s_t) = r - \mu(s_t)$  - koszt zmiany reżimu.

### Twierdzenie 3.4.1

Oznaczmy  $T_i$  całkowity czas pomiędzy 0 i  $T$ , podczas którego  $s_i = 0$ , gdy stanem początkowym jest stan  $i$  (dla  $i = 1, 2$ ). Niech dynamika cen będzie określona równaniem (3.27), na rynku oferowany jest COS, a stopa wolna od ryzyka jest równa  $r$ . Wówczas cena europejskiej opcji kupna z czasem do wygaśnięcia  $T$  i ceną wykonania  $K$  jest określona wzorem:

$$\begin{aligned} c_i(T, K, r) &= \exp(-rT) E^{\mathbf{Q}}[\max\{S_T - K, 0\} | s_t = i] = \\ &= \exp(-rT) \int_0^\infty \int_0^T \frac{y}{y + K} \rho(\ln(y + K), m(t), v(t)) f_i(t, T) dt dy, \end{aligned} \quad (3.28)$$

gdzie

$\rho(x, m(t), v(t))$  jest funkcją gęstości rozkładu normalnego o średniej  $m(t)$  i wariancji  $v(t)$ ,

$$m(t) = \ln(S_0) + \left( k(2) - k(1) - \frac{1}{2}(\sigma^2(2) - \sigma^2(1)) \right) t + \left( r - k(1) - \frac{1}{2}\sigma^2(1) \right) T,$$

$$v(t) = (\sigma^2(2) - \sigma^2(1))t + \sigma^2(1)T,$$

oraz

$$\rho(x, m(t), v(t)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi v(t)}} \exp\left[-\frac{(x - m(t))^2}{2 v(t)}\right],$$

$$f_1(t, T) = \exp[-P(2)T + (P(1) - P(2))t] \cdot 2(-P(2)P(1)Tt + P(2)P(1)T^2)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left( \frac{T-t}{P(2)P(1)} t \right)^{\frac{1}{2}} I_0 + P(2)I_1 \right\},$$

$$f_2(t, T) = \exp[-P(1)T + (P(2) - P(1))t] \cdot 2(-P(2)P(1)Tt + P(2)P(1)T^2)^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \left( \frac{T-t}{P(2)P(1)} t \right)^{\frac{1}{2}} I_0 + P(2)I_1 \right\},$$

$I_0$  oraz  $I_1$  jest zmodyfikowaną funkcją Bessela:

$$I_a(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}}{k! \Gamma(k+a+1)}.$$

Jeśli  $\mu(1) = \mu(2)$ ,  $\sigma(1) = \sigma(2)$  oraz  $m(t)$  i  $v(t)$  są niezależne to wzór (3.28) redukuje się do wzoru Blacka-Scholesa. Należy zaznaczyć, że wzór daje nam dwie ceny opcji w zależności od stanu początkowego rynku. Ponieważ nie jest możliwe zidentyfikowanie stanu rynku w momencie wyceny (z racji nieobserwowalności procesu  $s_t$  kierującego zmianą reżimów), to do wyznaczenia jedynej ceny opcji wykorzystuje się średnią ważoną prawdopodobieństwami przebywania w poszczególnych stanach.

### 3.5 Modele zmienności stochastycznej

Modele zmienności stochastycznej (*stochastic volatility* - SV) swój początek biorą w matematyce i ekonometrii finansowej. Powszechnie uważa się, że historia modeli SV bierze swój początek w latach 70 dwudziestego wieku - po raz pierwszy tego typu procesy pojawiły się w pracy Clarka<sup>38</sup>.

W modelach SV zakłada się, że istnieją dwa niezależne od siebie źródła losowości. Jedno z nich wpływa na stopę zwrotu instrumentu finansowego, a drugie na zmienność ceny instrumentu bazowego. Obecność dodatkowego procesu innowacji zwiększa elastyczność modelu SV, jednocześnie bardzo utrudniając estymację parametrów i obliczanie prognoz zmienności. W trudnościach tych należy upatrywać utrzymującej się przez długi czas niewielkiej popularności modelu. Model SV uznawany był za mniej atrakcyjny od konkurencyjnych modeli, a zwłaszcza modeli GARCH. Dopiero rozwój ekonometrycznych technik estymacji jaki miał miejsce w drugiej połowie lat 90 ubiegłego wieku umożliwił pełniejsze wykorzystanie modelu.

Przy modelowaniu zmienności za pomocą modeli zmienności stochastycznej badany jest szereg

$$y_t = r_t - \mu_t, \tag{3.32}$$

gdzie  $\mu_t = E(r_t | \mathcal{F}_{t-1})$  jest średnią warunkową, przy czym  $\mathcal{F}_{t-1}$  jest zbiorem informacji na temat  $r_t$  dostępnej do dnia  $t - 1$  włącznie. W badaniach empirycznych średnia warunkowa jest pomijana jako nieistotna lub zakłada się, że przyjmuje stałą wartość  $\mu$ . By zapewnić poprawne określenie wariancji warunkowej ( $\sigma_t^2 > 0$ ) modeluje się, zamiast samej zmienności

---

<sup>38</sup> Clark P.K. [1973], *A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative price*, *Econometrica*, 41, ss.135-155

$\sigma_t^2$ , jej logarytm  $\ln \sigma_t^2$ . Podstawowy model SV, zaproponowany przez Melino i Turnbulla<sup>39</sup> oraz Taylora<sup>40</sup> określony jest następującymi równaniami:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t, \quad (3.33)$$

$$\sigma_t^2 = \sigma \exp(h_t), \quad (3.34)$$

$$h_t = \phi h_{t-1} + \sigma_\eta \eta_t, \quad (3.35)$$

gdzie  $\varepsilon_t$  i  $\eta_t$  mają standardowy rozkład normalny oraz są wzajemnie i szeregowo niezależne,  $h_t$  to ukryta, nieobserwowalna w rzeczywistości zmienna, a  $\phi$ ,  $\sigma$ ,  $\sigma_\eta$  to parametry. Zmienność  $\sigma_t^2$  jest więc nie tylko funkcją zbioru informacji  $\mathcal{F}_{t-1}$ , ale zależy również od dodatkowych zaburzeń  $\eta_t$ . Najczęstsza interpretacja modelu SV jest taka, że  $\eta_t$  reprezentują zaburzenia intensywności napływu nowych informacji, natomiast  $\varepsilon_t$  reprezentują zaburzenia związane z treścią tych informacji. W przypadku gdy  $\varepsilon_t$  i  $\eta_t$  będą skorelowane ze sobą, powyższy model umożliwia uwzględnienie często występującej w szeregach czasowych asymetryczności<sup>41</sup>. Jeśli  $|\phi| < 1$ , to  $h_t$  jest stacjonarnym procesem autoregresyjnym rzędu pierwszego (AR(1)) takim, że  $h_t$  ma rozkład normalny o średniej  $E(h_t) = 0$  i wariancji  $V(h_t) = \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}$ . Zatem  $\sigma_t$  ma rozkład log-normalny ze średnią

$$E(\sigma_t^2) = \sigma \exp\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\sigma_\eta^2}{1-\phi^2}\right). \quad (3.36)$$

Również parametrom modelu można nadać pewne interpretacje. Jeśli bezwzględna wartość parametru  $\phi$  jest bliska 1, to świadczy to o persystencji zmienności. Wysokie wartości parametru skalującego  $\sigma$  wskazują z kolei na wysoki poziom zmienności. Natomiast małe wartości  $\phi$  przy jednocześnie dużym  $\sigma_\eta^2$  oznaczają niską prognozowalność procesu.

Ogólna postać ciągłego modelu SV może być zapisana następująco<sup>42</sup>:

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t(h_t) S_t dW_t, \quad (3.37)$$

$$dh_t = \gamma(t, h_t) dt + \delta(t, h_t) dW_t^h, \quad (3.38)$$

$$dW_t dW_t^h = \rho_t dt, \quad (3.39)$$

gdzie, podobnie jak w modelu dyskretnym,  $h_t$  jest nieobserwowalną, ukrytą zmienną, która generuje zmienność ceny instrumentu bazowego.  $W_t$  i  $W_t^h$  to dwa standardowe procesy Wienera, które mogą być skorelowane i zachodzi relacja  $cov(dW_t, dW_t^h) = \rho_t dt$ . Jeżeli  $\mathcal{F}_t$

<sup>39</sup> Melino A., Turnbull S.M. [1990], *Pricing foreign currency options with stochastic volatility*, Journal of Econometrics 45, ss. 239-265

<sup>40</sup> Taylor S.J. [1994], *Modeling stochastic volatility: a review and comparative study*, Mathematical Finance 4, ss. 183-204

<sup>41</sup> Dla ujemnego współczynnika korelacji możliwe jest uchwycenie efektu dźwigni (*leverage effect*)

<sup>42</sup> Jiang G.J. [2002], *Stochastic volatility and option pricing*, w: Knight J., Satchell S. [red.], *Forecasting volatility in the financial markets*, Elsevier, Oxford, ss. 47-98

jest naturalną filtracją, która odzwierciedla wszystkie dostępne informacje do chwili  $t$  włącznie, to zakładamy że  $\mu_t, \sigma_t, \gamma, \delta$  i  $\rho_t$  są adaptowane do  $\mathcal{F}_t$ . Analogicznie jak w modelu dyskretnym zmienna  $h_t$  jest opisana przez własne stochastyczne równanie różniczkowe (3.38). Specyfikacja tego równania mogą być różne, podobnie jak różne mogą być założenia dotyczące  $\rho_t$  i postaci funkcji  $\sigma_t(h_t)$ . Poniżej przedstawiono najczęściej wykorzystywane modele.

– Model Hulla i White’a<sup>43</sup>:  $\rho_t = 0$ ,  $\sigma_t(h_t) = \sqrt{h_t}$ ,

$$dh_t = \gamma h_t dt + \delta h_t dW_t^h. \quad (3.40)$$

Zatem proces  $h_t$  jest geometrycznym ruchem Browna.

– Model Scotta<sup>44</sup>:  $\rho_t = 0$ ,  $\sigma_t(h_t) = \sigma \exp\left(\frac{h_t}{2}\right)$ ,

$$dh_t = -\beta h_t dt + \sigma_\eta dW_t^h. \quad (3.41)$$

Proces  $h_t$  jest więc procesem Ornsteina-Uhlenbacka.

– Model Hestona<sup>45</sup>:  $\sigma_t(h_t) = \sigma \sqrt{h_t}$ ,

$$dh_t = (\alpha - \beta h_t) dt + \sigma_\eta \sqrt{h_t} dW_t^h \quad (3.42)$$

W tym modelu  $\rho_t \neq 0$  i najczęściej przyjmuje się, że  $\rho_t < 0$ .

Należy podkreślić, że powyższe modele były wprowadzane ze względu na potrzebę wierniejszego opisu przebiegu cen instrumentów finansowych. Niemniej dobre własności matematyczne, a zwłaszcza możliwość otrzymania wzorów analitycznych na cenę instrumentów pochodnych często były ważniejsze od realistycznego odzwierciedlenia procesu cen. Odpowiednikiem modelu (3.40) dla procesów z czasem dyskretnym jest model:

$$y_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha + \phi \ln \sigma_{t-1}^2 + \sigma_\eta \eta_t,$$

w której procesy  $\varepsilon_t, \eta_t$  są wzajemnie niezależne i  $\varepsilon_t, \eta_t \sim \text{iid } N(0,1)$ . Model ten jest równoważny z modelem SV zdefiniowanym równaniami (3.33)-(3.35).

Naturalny związek modeli SV z procesami dyfuzji wskazuje na możliwość wykorzystania tych modeli do opisu ewoluującej w czasie zmienności.

<sup>43</sup> Hull J., White A. [1987], *The pricing of options on assets with stochastic volatilities*, Journal of Finance 42, ss. 281-300

<sup>44</sup> Scott, L.O. [1987], *Option pricing when the variance changes randomly: theory, estimation and an application*, Journal of Financial Quantitative Anal. 22, ss. 419-438.

<sup>45</sup> Heston S.A. [1993], *A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options*, Review of Financial Studies 6, ss.327-343

### 3.6 Wycena opcji w oparciu o modele zmienności stochastycznej

Modele zmienności stochastycznej są modelami niezupełnymi. Jednym ze sposobów na wybranie jednej RMM jest sparametryzowanie zbioru miar martyngałowych za pomocą pewnego procesu stochastycznego nazywanego rynkową ceną ryzyka.

Zbiór wszystkich możliwych równoważnych miar martyngałowych jest określony przez pochodną Radona-Nikodyna względem miary rzeczywistej  $\mathbf{P}$ :

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t (\gamma_1^2(u) + \gamma_2^2(u))du - \int_0^t \gamma_1(u)dW_u - \int_0^t \gamma_2(u)dW_u^h\right], \quad (3.43)$$

gdzie  $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$  jest rynkową ceną ryzyka.

Hull i White<sup>46</sup> zakładając (3.40) oraz  $\gamma_2 = 0$  (co jest równoważne stwierdzeniu, że systematyczne ryzyko zmienności wynosi zero) uzyskali następujący wzór na wycenę europejskiej opcji kupna:

$$\begin{aligned} c_{HW} &= \exp(-r(T-t))E^{\mathbf{Q}}(H|\mathcal{F}_t) = \\ &= \exp(-r(T-t))E^{\mathbf{Q}}(E^{\mathbf{Q}}(H|\sigma(h_t)_{t \leq u < T})|\mathcal{F}_t) = \\ &= \exp(-r(T-t))E^{\mathbf{Q}}(E^{\mathbf{Q}}(H|\sigma(h_t)_{t \leq u < T})|\mathcal{F}_t) = \\ &= \exp(-r(T-t))E^{\mathbf{Q}}\left(c_{BS}\left(t, \left(\frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma^2(h_u)du\right)^{\frac{1}{2}}\right)|\mathcal{F}_t\right), \end{aligned} \quad (3.44)$$

gdzie  $c_{BS}(t, V)$  oznacza cenę ze standardowego modelu Blacka i Scholesa będącą funkcją czasu i stałego współczynnika zmienności  $V$ . Równoważnie wzór (3.44) można zapisać następująco:

$$c_{HW} = E^{\mathbf{Q}}\left(S_t \Phi(d_{1t}) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_{2t})\right), \quad (3.45)$$

gdzie

$$\begin{aligned} d_{1t} &= \frac{\ln\frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{1}{2}V_t^T\right)(T-t)}{\sqrt{V_t^T(T-t)}}, & d_{2t} &= d_{1t} - \sqrt{V_t^T(T-t)}, \\ V_t^T &= \frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma^2(h_u)du, \end{aligned}$$

a  $\Phi$  jest dystrybuantą rozkładu normalnego. W przypadku, gdy zmienność warunkowa jest stała wzór (3.45) redukuje się do wzoru Blacka i Scholesa.

<sup>46</sup> Hull J., White A. [1987], *The pricing...*op. cit.

Jeszcze dalej idącym rozszerzeniem modelu Blacka i Scholesa są modele wyceny opcji, w których rezygnuje się z założenia o stałości stopy wolnej od ryzyka – jest ona również procesem stochastycznym. Wzór na wycenę europejskiej opcji kupna w takim modelu został podany między innymi przez Amina i Nga<sup>47</sup>:

$$c_{AN} = E^Q \left( S_t \Phi(d_{1t}) - K \exp \left( - \sum_{\tau=t}^{T-1} r_{\tau} \right) \Phi(d_{2t}) \right), \quad (3.46)$$

gdzie:  $\Phi$  jest dystrybuantą rozkładu normalnego oraz

$$d_{1t} = \frac{\ln \frac{S_t}{K \exp(-\sum_{\tau=t}^{T-1} r_{\tau})} + \frac{1}{2} \sum_{\tau=1}^T \sigma_{\tau}}{\sqrt{\sum_{\tau=t+1}^T \sigma_{\tau}}}, \quad d_{2t} = d_{1t} - \sum_{\tau=t+1}^T \sigma_{\tau}.$$

Porównując powyższy wzór ze wzorem (3.45) łatwo zauważyć wspomniane osłabienie założenia o stałości stopy wolnej od ryzyka. Ponadto model został sformułowany dla czasu dyskretnego.

Amin i Ng podkreślali, że pojawiające się w literaturze wzory na wycenę opcji są szczególnymi przypadkami wzoru (3.46):

- dla modelu Blacka i Scholesa zakłada się stałą stopę procentową i zmienność cen instrumentu bazowego,
- dla modelu Hulla i White’a zakłada się stałą stopę procentową, a zmienność cen instrumentu bazowego jest procesem stochastycznym,
- dla modelu Turnbulla i Milne zakłada się stałą zmienność i stochastyczną stopę procentową.

---

<sup>47</sup> Amin K.I., Ng V. [1993], *Option Valuation with systematic stochastic volatility*, Journal of Finance 48, ss. 881-910



## Rozdział IV

### Własności badanych szeregów czasowych

Finansowe szeregi czasowe wykazują odmienne własności od narzucanych im *a priori* w wielu modelach wyceny. Identyfikacja cech jest kluczowa dla dopasowania do danego szeregu właściwego modelu zmienności. W niniejszym rozdziale przedstawiono najczęściej przywoływane w literaturze cechy finansowych szeregów czasowych. Następnie zweryfikowano, które z tych własności dotyczą rynku polskiego i sprawdzono tym samym czy stosowanie metod wyceny opartych o modele zmienności jest uzasadnione.

#### 4.1 Specyfika finansowych szeregów czasowych.

Obiektem badań analizy finansowych szeregów czasowych są szeregi stóp zwrotu (lub krócej zwroty) instrumentów finansowych. Formułowane są dwa podstawowe powody, dla których analizie poddaje się zwroty zamiast cen. Po pierwsze, dla przeciętnego inwestora rynki finansowe są bliskie rynkowi doskonałemu, na którym wielkość inwestycji nie ma wpływu na poziom zmiany cen. Z tego wynika, że stopa zwrotu jest pełną i niezależną od wielkości inwestycji informacją umożliwiającą podjęcie decyzji inwestycyjnej. Po drugie, szeregi zwrotów mają pewne, bardzo użyteczne własności statystyczne, jak ergodyczność i stacjonarność, których to własności wyjściowe szeregi cen nie posiadają<sup>1</sup>.

Badane zwroty są zwrotami logarytmicznymi, zatem zwrot za okres od chwili  $t - 1$  do  $t$  określony jest wzorem:

$$r_t = 100 \cdot \ln(\ln S_t - \ln S_{t-1}) = 100 \cdot \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right).$$

gdzie  $S_t$  oznaczę cenę instrumentu bazowego w chwili  $t$ . Tak określone zwroty są powszechnie używane w badaniach finansowych szeregów czasowych. Do najczęściej wymienianych argumentów uzasadniających stosowanie zwrotów logarytmicznych należą:

- łatwość wyliczania zwrotu za okres dłuższy przez agregację (sumowanie) zwrotów z podokresów,
- przyjmowanie przez zwrot logarytmiczny wartości z całej osi rzeczywistej,
- proces logarytmu ceny występuje w stochastycznych równaniach różniczkowych, które są podstawą modelowania zmienności.

---

<sup>1</sup> Campbell J.Y., Lo A.W., MacKinlay A.C [1997], *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, New Jersey, s. 9

W niniejszej pracy omawiane i wykorzystywane są modele wyceny opcji oparte o stochastyczne równania różniczkowe, stąd wybór zwrotów logarytmicznych. Niemniej, jeśli wartości bezwzględne analizowanych zwrotów nie są zbyt wysokie, to z rozwinięcia funkcji  $\ln(1+x)$  w szereg potęgowy wynika, że różnica między zwrotem logarytmicznym a zwrotem prostym jest niewielka<sup>2</sup>.

Wspomniana powyżej stacjonarność zwrotów instrumentów finansowych wymaga formalnej definicji, ponieważ w założeniach części opisywanych w pracy modeli pojawia się właśnie stacjonarność.

Szereg  $r_t$  nazywa się ściśle stacjonarnym, jeśli łączny rozkład zmiennej wielowymiarowej  $(r_{t_1}, r_{t_2}, \dots, r_{t_k})$  jest identyczny z rozkładem zmiennej  $(r_{t_1+h}, r_{t_2+h}, \dots, r_{t_k+h})$  dla każdego  $h$  i dowolnego skończonego ciągu indeksów  $(t_1, t_2, \dots, t_k)$ . Ścisła stacjonarność oznacza, że łączny rozkład zmiennej wielowymiarowej  $(r_{t_1}, r_{t_2}, \dots, r_{t_n})$  jest stały ze względu na przesunięcia w czasie. Jest to bardzo silne założenie, trudne do weryfikacji w praktyce. W przypadku słabej stacjonarności zakłada się stałość, ze względu na przesunięcia w czasie, wartości oczekiwanej  $E(r_t) = \mu$  i kowariancji  $cov(r_t, r_{t-l}) = \gamma_l$  (które zależą jedynie od  $l$ )<sup>3</sup>. Mimo, że w literaturze dotyczącej finansów zwykle przyjmuje się, że szeregi zwrotów (logarytmicznych) instrumentów finansowych są słabo stacjonarne, to istnieją badania, w których odrzucono hipotezę o słabej stacjonarności<sup>4</sup>.

Analiza statystyczna ujawnia znaczne zróżnicowanie finansowych szeregów zwrotów logarytmicznych. Niemniej jednak, liczne badania empiryczne<sup>5</sup> wskazują na występowanie charakterystycznych dla nich cech. W literaturze anglosaskiej własności te noszą miano *stylized facts*. Poniżej zestawiono listę najczęściej przytaczanych faktów empirycznych:

- 1) **Grube ogony rozkładów i leptokurtoza.** Prawdopodobieństwo wystąpienia nietypowych zmian kursów jest większe niż w przypadku, gdyby miały one rozkład normalny. Typowe oszacowania kurtozy<sup>6</sup> mieszczą się w przedziale od 1 do 50, co świadczy o dużych odstępstwach od rozkładu normalnego (dla którego kurtoza wynosi 0). Indeks ogona rozkładu rozumiany jako rząd  $k$  najwyższego momentu bezwzględnego, który jest skończony, lub  $k = \infty$ , gdy wszystkie momenty są skończone przyjmuje

<sup>2</sup> Z wzoru Maclaurina wynika, że dla niewielkich  $x$   $\ln(1+x) \approx x$ .

<sup>3</sup> Tsay R.S. [2002], *Analysys of Financial Time Series*, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley&Sons, New York, s.23

<sup>4</sup> więcej Doman M, Doman R. [2004], *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, AE Poznań, ss. 97-98

<sup>5</sup> Cont R. [2001], *Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues*, Quantitative Finance, vol.1, ss. 223-236

<sup>6</sup> W pracy mianem kurtozy określa się czwarty moment centralny pomniejszony o 3 (w literaturze określanej jako *excess kurtosis*)

zwykle wartości pomiędzy 2 a 5. To wyklucza nie tylko rozkład normalny, ale również rozkłady stabilne.

- 2) **Asymetria spadków i wzrostów.** W szeregach notowań akcji i indeksów giełdowych wartości bezwzględne znacznych spadków są większe od wartości znacznych wzrostów. Cecha ta na ogół nie dotyczy kursów walutowych.
- 3) **Brak autokorelacji.** Autokorelacja w szeregach zwrotów jest na ogół statystycznie nieistotna (wyjątek stanowią zwroty sróddzienne, dla których pojawia się efekt mikrostruktury rynku). Występowanie istotnej autokorelacji może być podstawą do zastosowania prostej strategii – tzw. strategii statystycznego arbitrażu, dla której wartość oczekiwana zysków będzie dodatnia.
- 4) **Grupowanie zmienności.** Niezależnie od stosowanej miary zmienności typowe jest występowanie okresów podwyższonej zmienności, po których następują okresy zmienności obniżonej. Wiąże się to z występowaniem dodatniej autokorelacji w szeregach zmienności.
- 5) **Wahania zmienności.** Niezależnie od skali czasu zwroty wykazują wysoki poziom wahań zmienności. Przejawia się to między innymi poprzez występowanie okresów podwyższonej zmienności niezależnie od sposobu jej estymowania.
- 6) **Powracanie zmienności do średniej.** Istnieje przekonanie, że po okresie podwyższonej lub obniżonej zmienności następuje jej powrót do pewnego „normalnego” poziomu. W długim okresie zmienność powinna powracać do określonego średniego poziomu. Uważa się, że jest to charakterystyczna cecha zmienności. Niestety nie jest jasny sposób wyznaczania tego normalnego poziomu oraz czy jest on stały w czasie.
- 7) **Grube ogony rozkładów warunkowych.** Rozkłady warunkowe zwrotów również cechują się grubymi ogonami. Własność ta nie zanika po skorygowaniu szeregu ze względu na zgrupowania zmienności (na przykład przez zastosowanie modeli typu GARCH) - szeregi reszt nadal wykazują grube ogony, jednak już w mniejszym stopniu.
- 8) **Powolne zanikanie autokorelacji w szeregach zwrotów bezwzględnych.** Funkcja autokorelacji szeregów bezwzględnych stóp zwrotu wolno maleje, w tempie funkcji potęgowej o wykładniku z przedziału od -0,6 do -0,2. Czasem interpretuje się ten fakt jako oznakę występowania zależności długookresowej.
- 9) **Korelacja między zmiennością a wielkością obrotu.** Wielkość obrotu jest skorelowana ze wszystkimi miarami zmienności, przy czym nie można wskazać dominującego kierunku korelacji. W badaniach empirycznych zaobserwowano zarówno dodatnią jak i ujemną korelację.

10) **Korelacja między zmiennością a stopą zwrotu.** Dla większości stosowanych miar zmienność jest ujemnie skorelowana z wielkością zwrotu. Oznacza to asymetryczny wpływ informacji negatywnych i pozytywnych na poziom zmienności. Dobre informacje powodują spadek zmienności, natomiast po złych następuje wzrost zmienności. Ujemna korelacja między zmiennością a stopą zwrotu często jest utożsamiana z efektem dźwigni finansowej – spadek ceny instrumentu finansowego zwiększa dźwignię finansową, co czyni ten instrument bardziej ryzykownym i w konsekwencji powoduje wzrost zmienności<sup>7</sup>.

#### 4.2 Opis wykorzystywanych w pracy szeregów czasowych

Szeregi czasowe wykorzystywane w niniejszej pracy pochodzą z GPW i dotyczą instrumentów bazowych, na jakie mogą być wystawiane na tej giełdzie opcje. Są to zatem indeks WIG20 oraz akcje spółek: koncernu paliwowego PKN Orlen, banku Pekao S.A., firmy telekomunikacyjnej TP S.A., koncernu górniczego KGHM Polska Miedź i firmy informatycznej Prokom<sup>8</sup>. Analizowane szeregi dotyczą zwrotów dziennych i pochodzą z okresu od 17 listopada 2000 do 21 lipca 2006 (1425 obserwacji). Jako początek okresu, w którym badane są wymienione spółki oraz indeks wybrano datę wprowadzenia nowego systemu transakcyjnego – WARSET. System ten zmienił organizację obrotu i znacząco wpłynął na dynamikę rynku.

W tabeli 4.1 zebrane zostały podstawowe statystyki opisowe analizowanych szeregów. Średnie dzienne zwroty są bliskie zeru, dla większości szeregów dodatnie - za wyjątkiem TPS (-0,0103) i PKM (-0,0235), wartość tych dwóch spółek spadła bowiem w badanym okresie odpowiednio o 12% i 26%. Odchylenia standardowe przyjmują wartości z przedziału od 1,4 do 2,6 i są największe dla KGH (2,5353) i PKM (2,4085) a najmniejsze dla WIG20 (1,4687). Jest to ściśle związane z rozpiętością między maksymalną i minimalną wartością zwrotu – jest ona największa dla KGH i PKM (odpowiednio ponad 23 i 22) a najmniejsza dla WIG20 (około 11). Cztery szeregi (WIG20, PKN, PEO, TPS) wykazują prawostronną skośność, dla pozostałych (KGH i PKM) wartość tego parametru jest ujemna, ale bezwzględna wartość skośności jest stosunkowo niewielka - największa dla KGH (0,3587), najmniejsza dla PKM

---

<sup>7</sup> Istnieją badania, które pokazują, że reakcja zmienności na zmiany stóp jest zbyt duża, aby mogła być wyjaśniona wyłącznie poprzez efekt dźwigni. Jako dodatkowe źródło ujemnej korelacji zmienności i stóp zwrotu wskazuje się na zmieniającą się w czasie premię za ryzyko, por. Christie A.A. [1982], *The Statistic Behaviour of Common Stock Variances: Value, Leverage and Interest Rate Effects*, Journal of Financial Economics 10, ss. 407-432 oraz Campbell J.Y., Hentschel L. [1992], *No News is Good News: An Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock Returns*, Journal of Financial Economics 31, ss 281-318.

<sup>8</sup> Od 1 kwietnia 2008 roku firma Prokom przestała istnieć po przejęciu przez spółkę Asseco Poland. Dzień 28 marca 2008 roku był ostatnim dniem notowań tej spółki na GPW.

(0,0360). Badane szeregi charakteryzują się umiarkowaną kurtozą, dla większości szeregów zawartą między 1 a 2. Wyjątkiem jest KGH, dla którego wartość kurtozy jest największa (2,1536).

Tabela 4.1. Statystyki opisowe wykorzystywanych szeregów czasowych

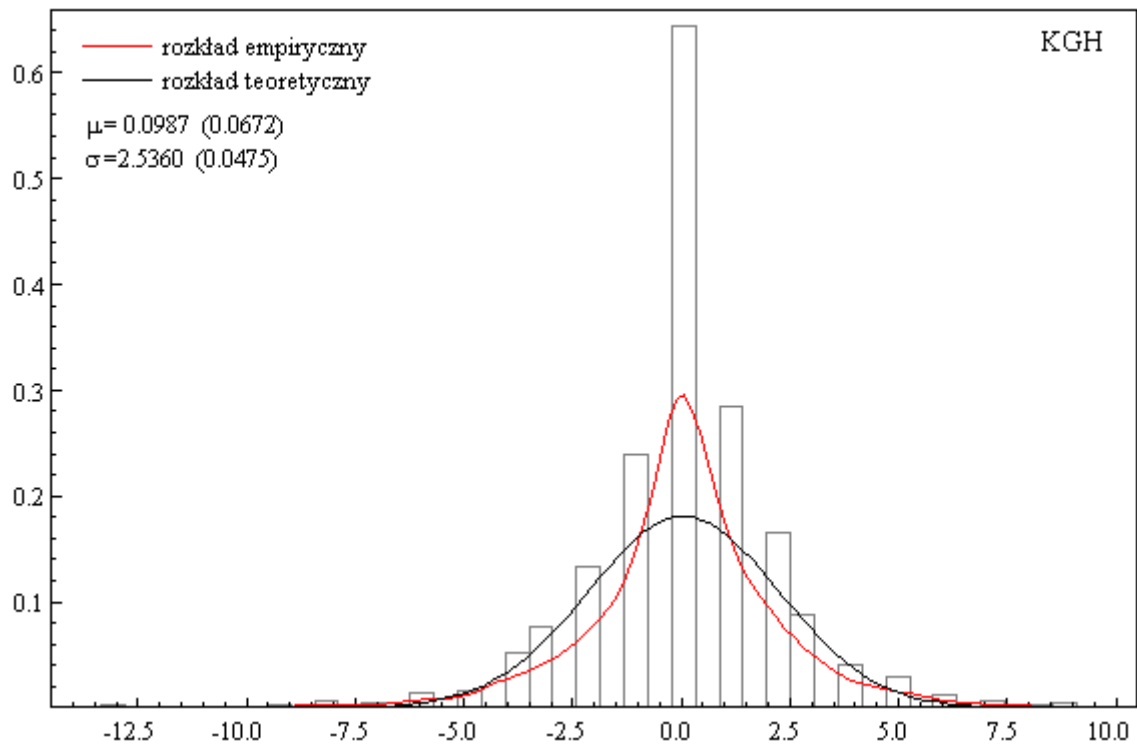
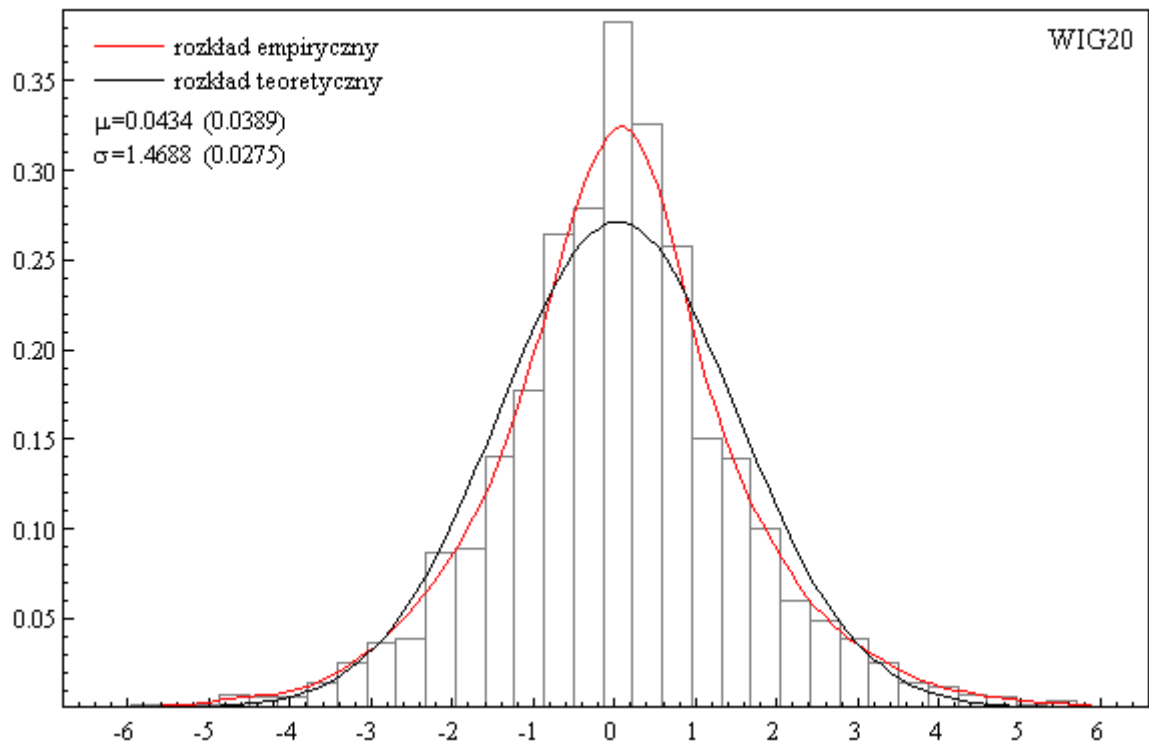
instrument bazowy	nazwa szeregu	średnia	odchylenie standardowe	maksimum	minimum	skośność	kurtoza
WIG 20	WIG20	0,0434	1,4687	5,4830	-5,7306	0,0547	1,0343
KGHM	KGH	0,0987	2,5353	9,6511	-13,5282	-0,3587	2,1536
Pekao SA	PEO	0,0898	1,9745	11,9189	-7,0759	0,2536	1,7114
PKN Orlen	PKN	0,0734	1,8999	8,4557	-9,2976	0,0582	1,2908
Prokom	PKM	-0,0235	2,4085	8,7011	-13,6132	-0,0360	1,6772
TP SA	TPS	-0,0103	2,1623	10,1783	-8,3587	0,1919	1,1683

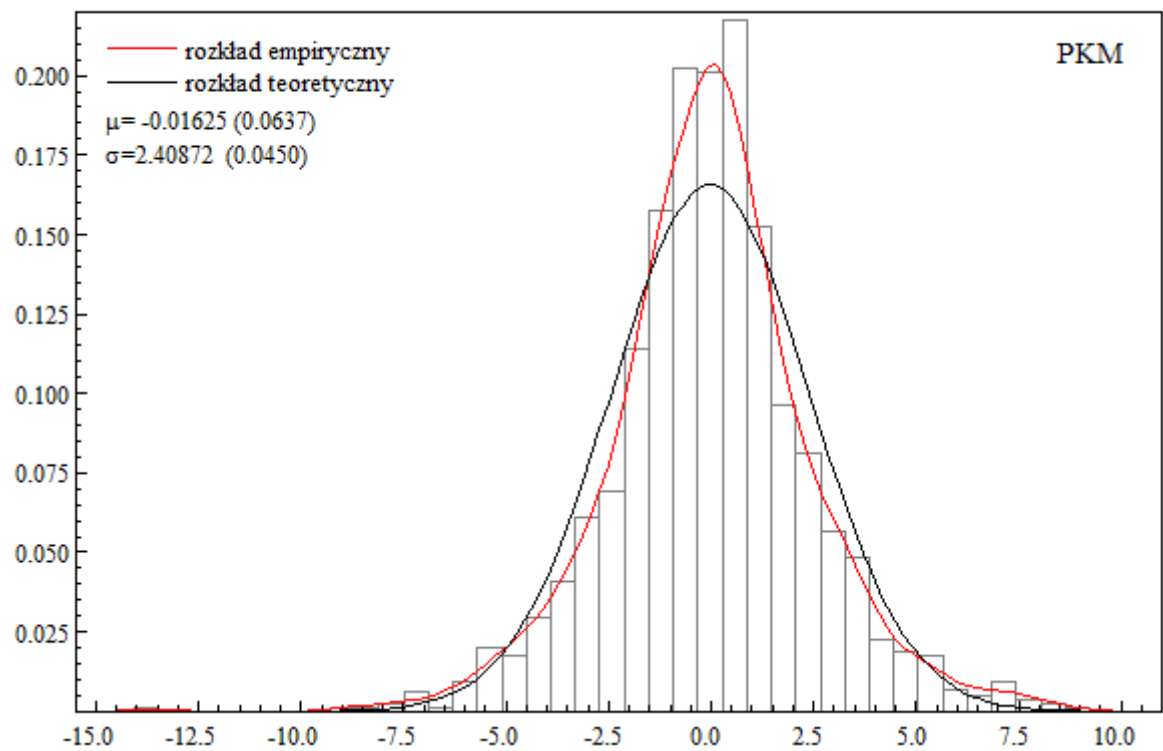
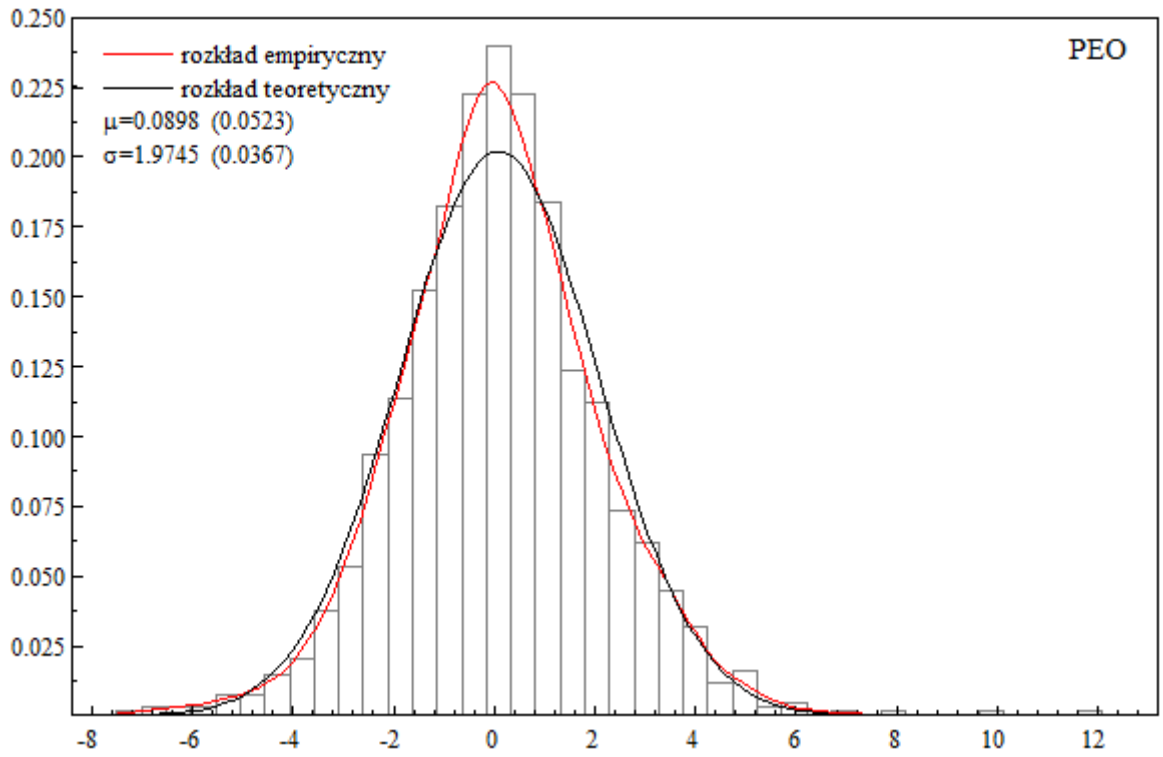
Źródło: Opracowanie własne

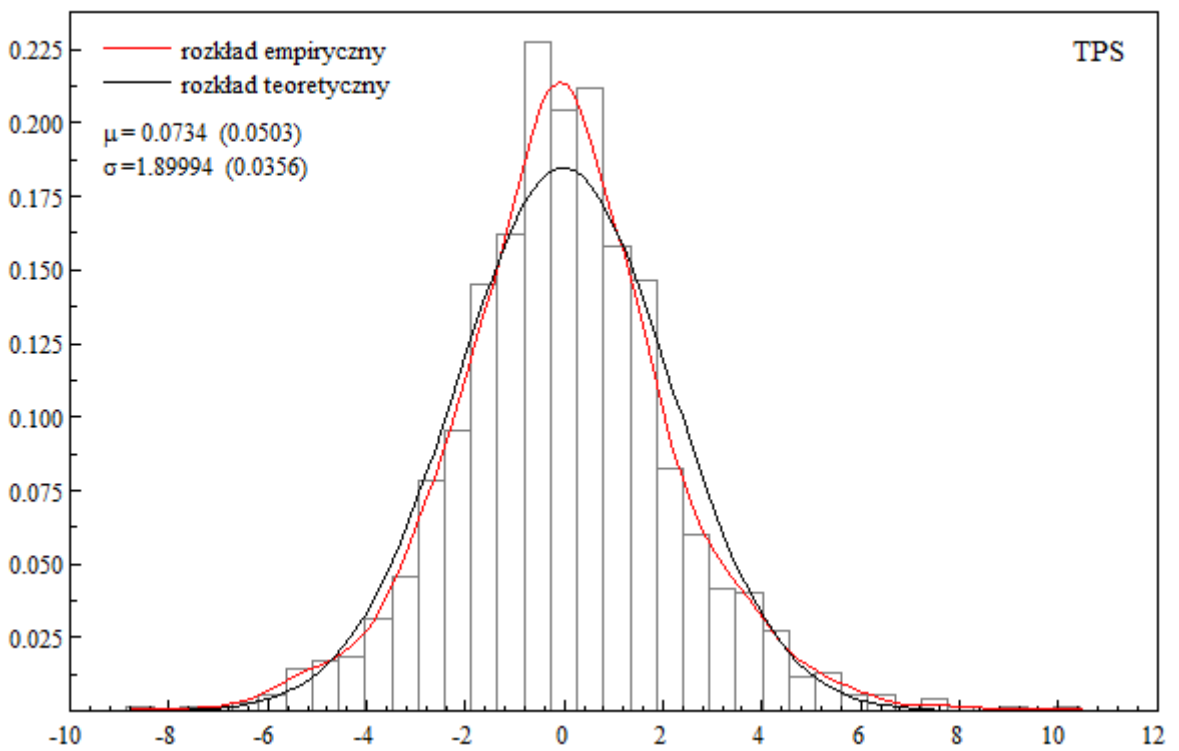
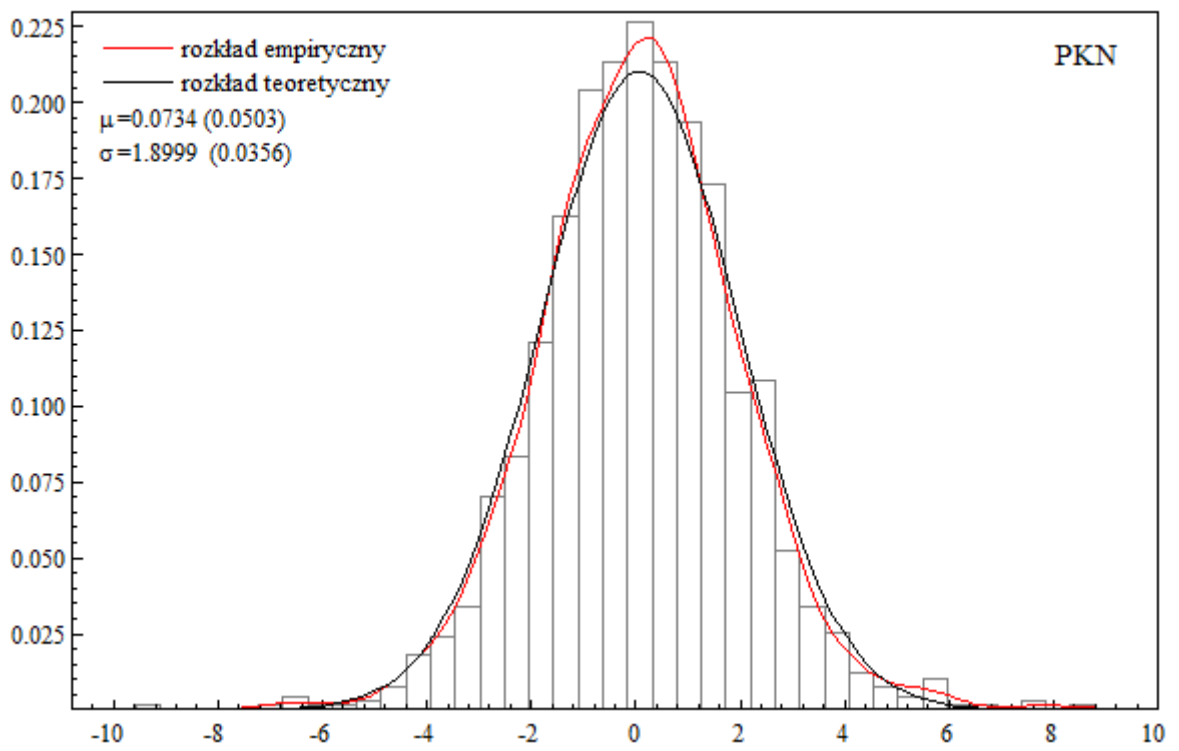
Wyliczone kurtozy nie odbiegają od wartości przytaczanych w literaturze jako typowe dla szeregów czasowych, potwierdzają występowanie leptokurtyczności rozkładów. Na rysunkach przedstawiających histogramy i estymatory jądrowe gęstości prawdopodobieństwa (rysunek 4.1) wyraźnie widać większe, niż wynikałoby to z rozkładu normalnego, grupowanie się zwrotów wokół średniej. Liczebność przedziałów w otoczeniu wartości średniej jest zdecydowanie wyższa niż pozostałych przedziałów. Wykresy kwantyl-kwantyl dla rozkładu normalnego (*quantile-quantile plot*) nie pozostawiają wątpliwości, co do istnienia grubych ogonów (rysunek 4.2). Duże rozbieżności pomiędzy kwantylami teoretycznymi a kwantylami empirycznymi pojawiają się dla wszystkich z badanych szeregów, zwłaszcza na obszarach znacznie oddalonych od mediany.

Analiza wykresów zwrotów logarytmicznych (rysunek 4.3) wskazuje na istnienie asymetrii spadków i wzrostów dla KGH, PEO, PKN, PKM i TPS. Przy czym dla PEO i TPS zależność jest odwrotna niż ta obserwowana na rozwiniętych rynkach - wartości bezwzględne znacznych wzrostów są znacznie większe od wartości bezwzględnych spadków. Taki wynik jest nieoczekiwany zwłaszcza dla TPS. Jak wspomniano wcześniej, spółka ta w badanym okresie miała ujemną stopę zwrotu, co należy wiązać z postępującą w tym czasie deregulacją rynku telekomunikacyjnego i rozpoczęcia działalności konkurencyjnych operatorów.

Rysunek 4.1. Histogramy i estymatory jądrowe gęstości prawdopodobieństwa na tle gęstości rozkładu normalnego.



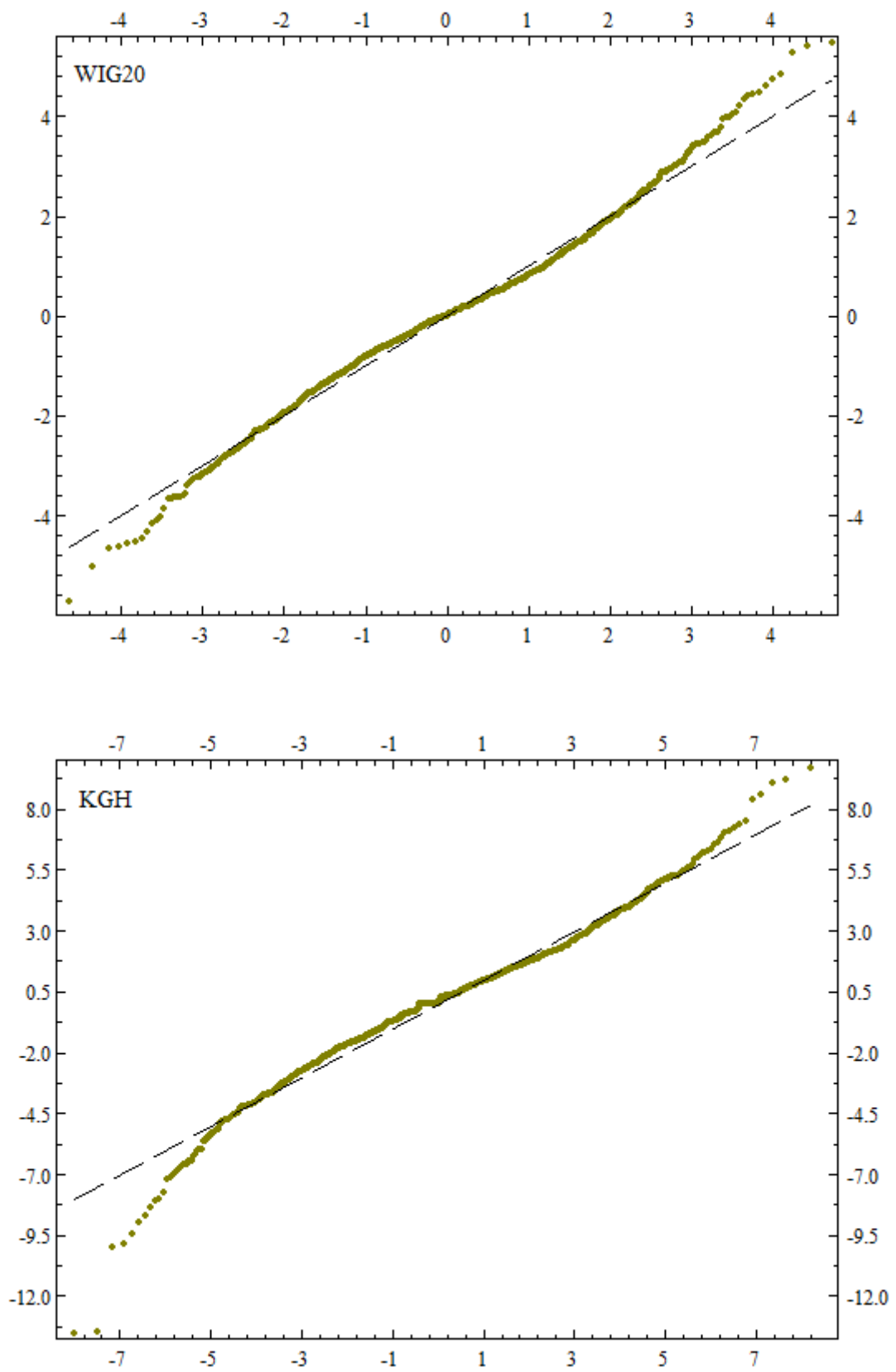


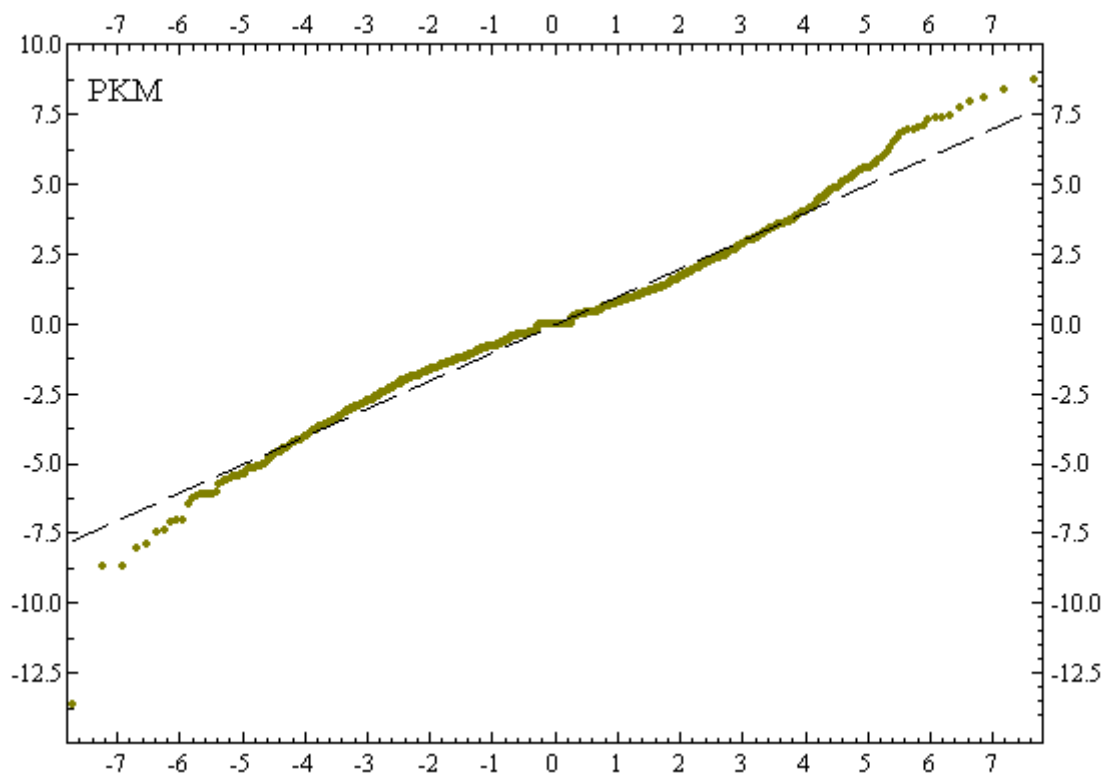
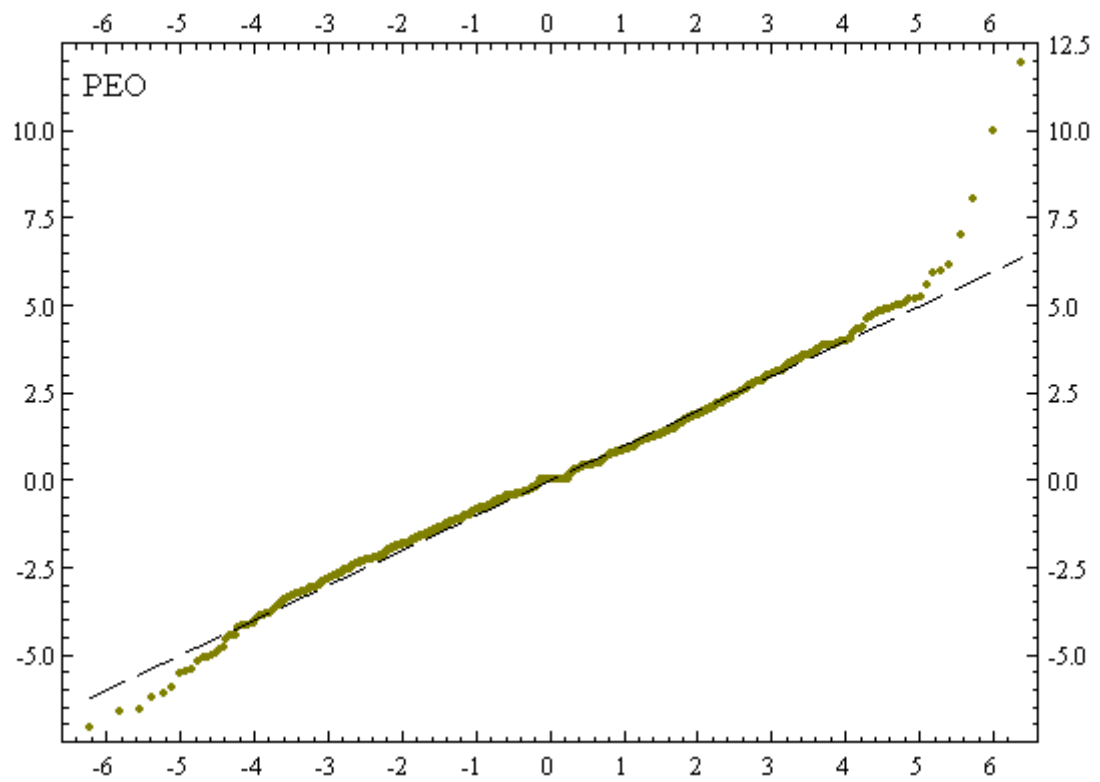


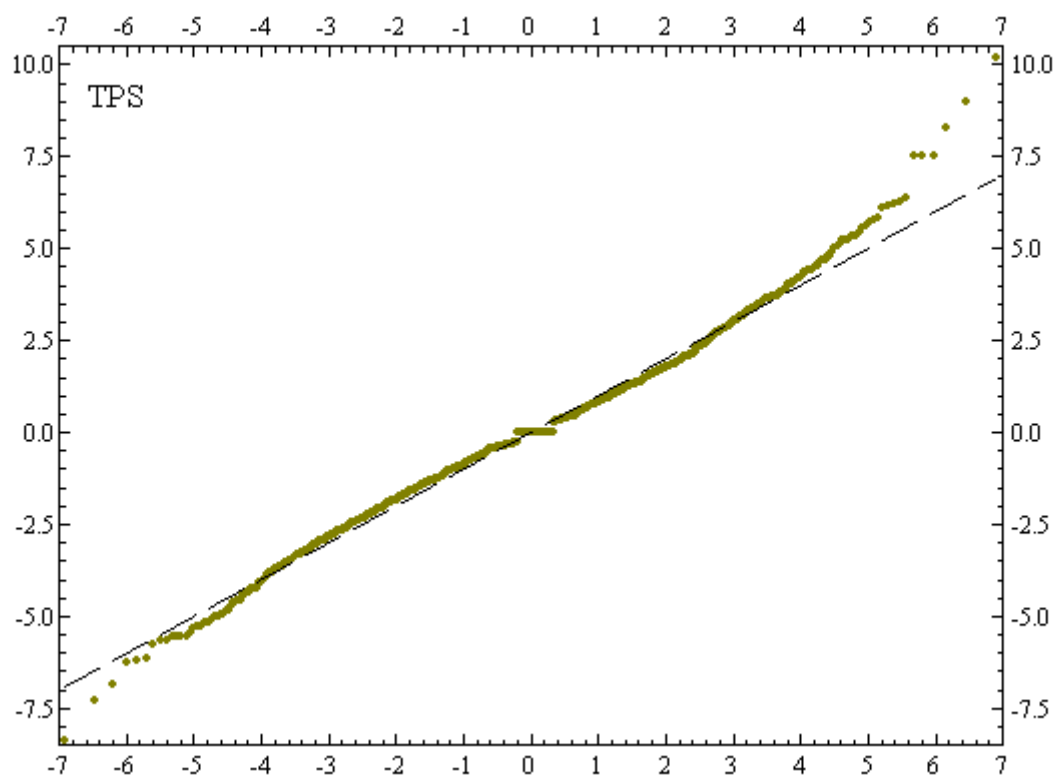
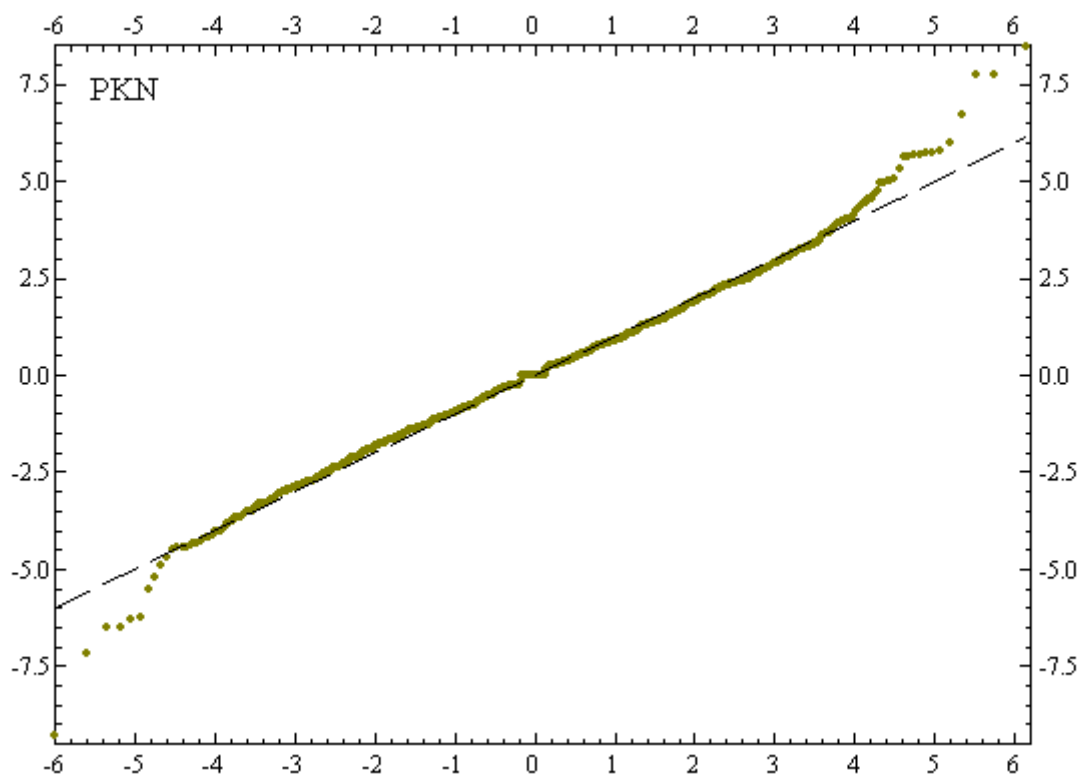
Źródło: Opracowanie własne



Rysunek 4.2. Wykresy kwanty-kwantyl dla rozkładu normalnego.

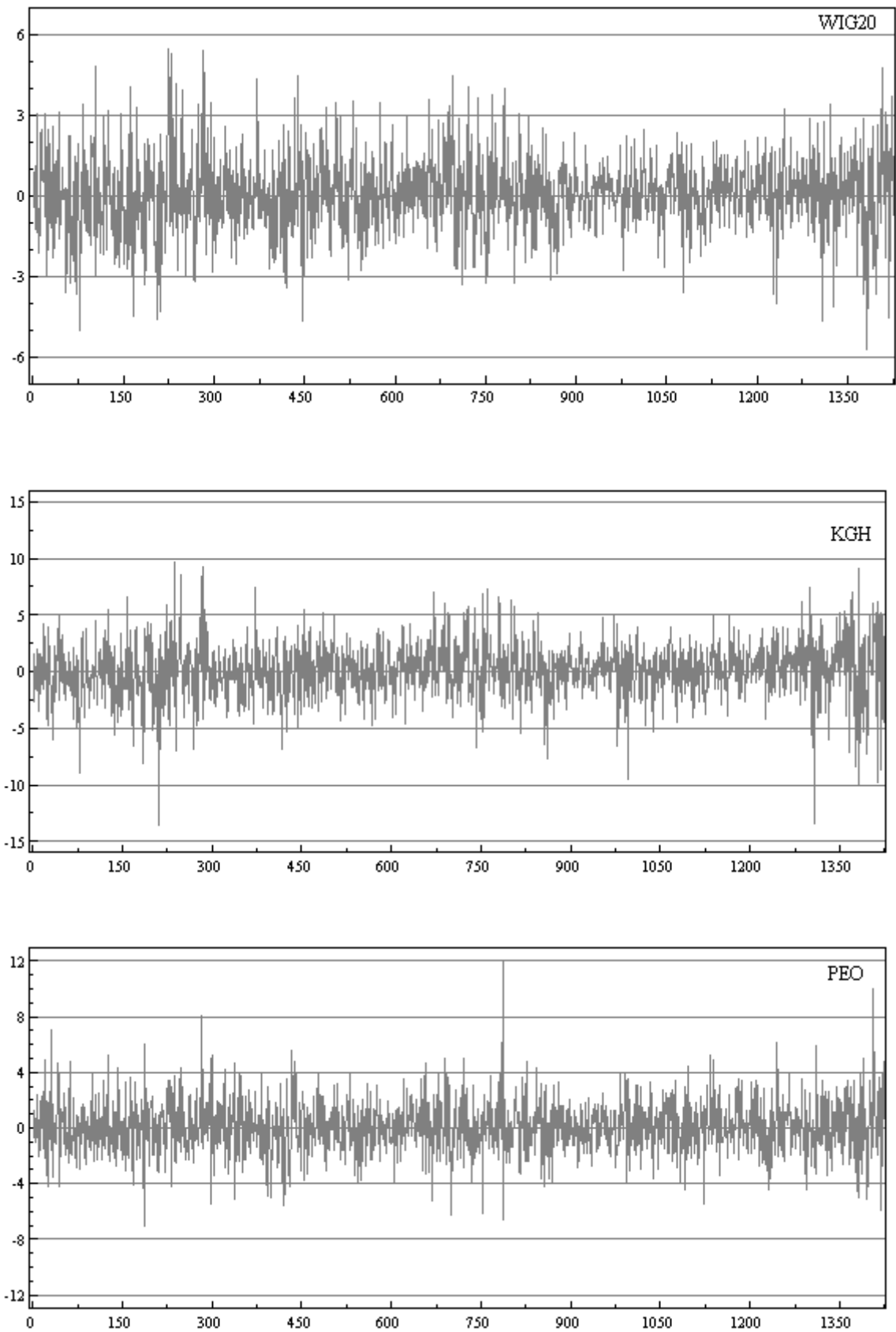


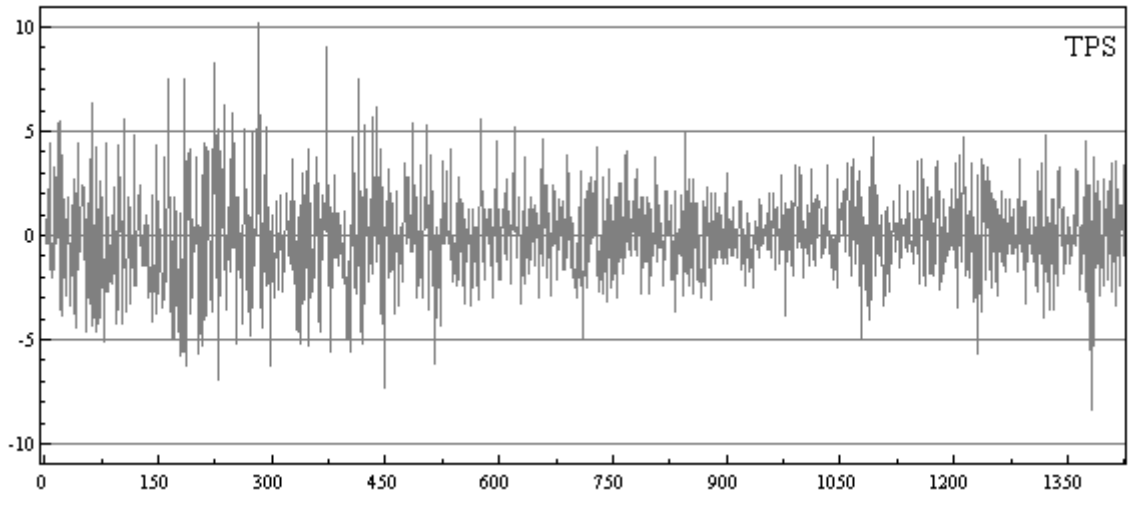
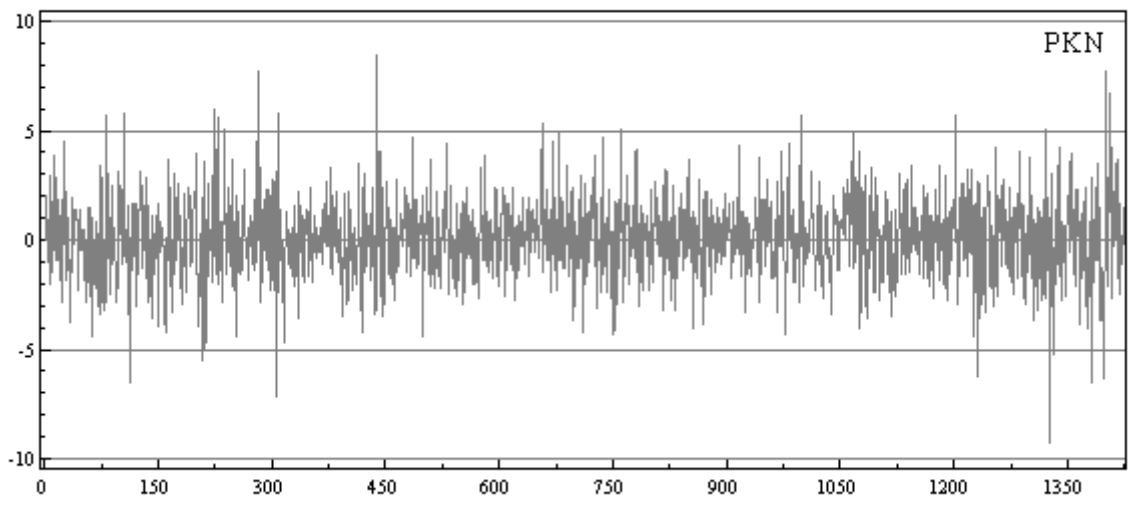
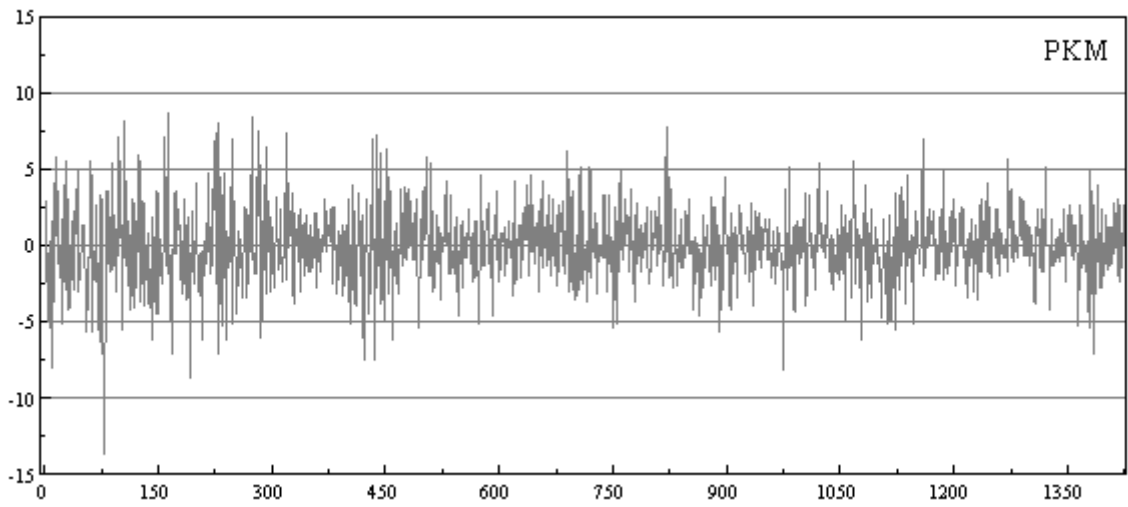




Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 4.3. Zwroty logarymiczne badanych szeregów.





Źródło: Opracowanie własne

Na rysunku 4.4 można zaobserwować, że badane szeregi nie wykazują występowania autokorelacji. Wartości współczynnika korelacji na ogół nie przekraczają poziomu statystycznej istotności, a ewentualne przekroczenia tego poziomu są nieznaczne. W literaturze tematu autokorelacja przywoływana jest w kontekście efektywności rynku i jej brak może świadczyć o efektywności GPW<sup>9</sup>.

By zbadać grupowanie się zmienności można wyznaczyć autokorelacje zwrotów bezwzględnych lub ich kwadratów<sup>10</sup>. Na rysunku 4.5 zamieszczono autokorelacje zwrotów bezwzględnych wraz z dopasowaną linią trendu. Dla większości szeregów autokorelacje te przyjmują znaczące, dodatnie wartości, następnie zmniejszają się, osiągając wartości ujemne dla znacznych opóźnień. Wyjątek stanowi szereg PEO i PKN, dla którego autokorelacja bardzo szybko (już dla opóźnienia rzędu drugiego) spada do wartości bliskich statystycznie nieistotnym i oscyluje wokół nich. Dla pozostałych szeregów, zaobserwowane na rysunkach własności świadczą o grupowaniu się zmienności, a linie trendu potwierdzają zanikanie autokorelacji w szeregach zwrotów bezwzględnych w tempie funkcji potęgowej. Niemniej tempo zanikania jest relatywnie szybkie, wartości bezwzględne wykładników funkcji potęgowej są stosunkowo duże. Jedynie dla szeregu TPS wykładnik tej funkcji (-0,5177) należy do typowego dla rynków rozwiniętych przedziału (-0.6,-0.2).

Rysunek 4.6 przedstawia zmienność wyestymowaną dla poszczególnych szeregów za pomocą modelu GARCH(1,1). Widoczne są na nim wahania zmienności, okresy podwyższonej zmienności przeplatają się z okresami niższej zmienności. Szczególnie duże fluktuacje można zaobserwować dla PKM i KGH, mniejsze dla WIG20 oraz PKN.

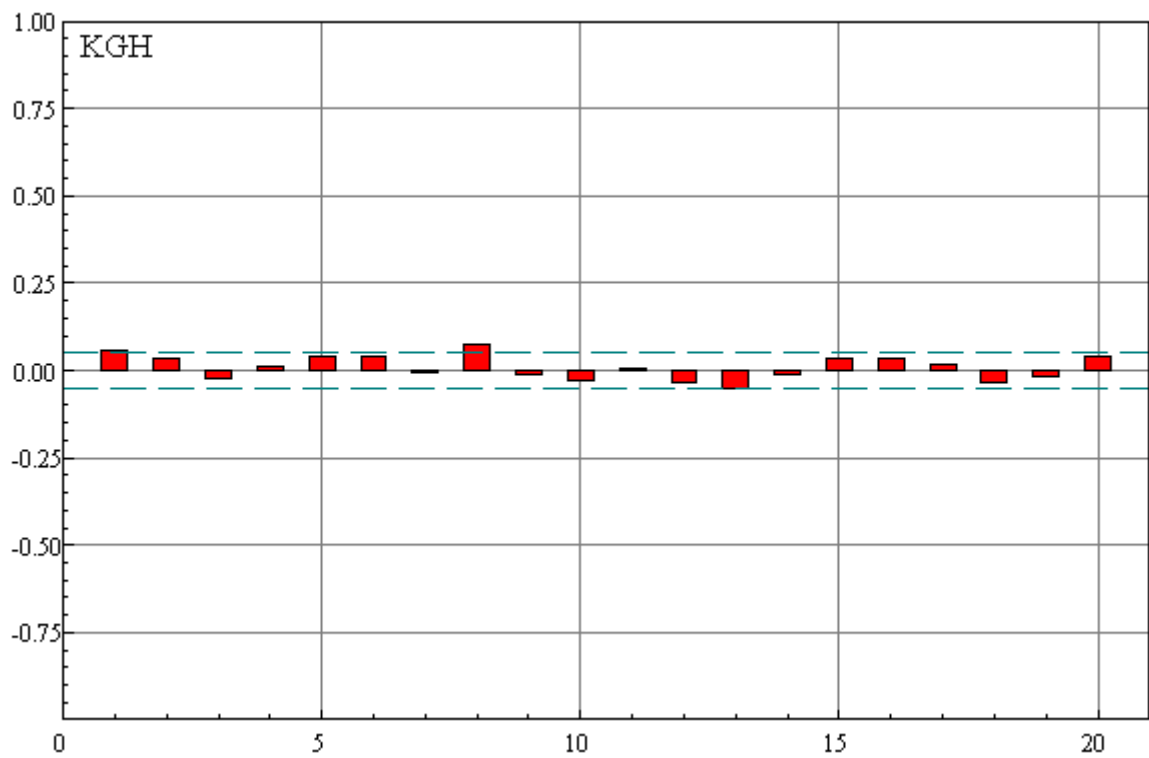
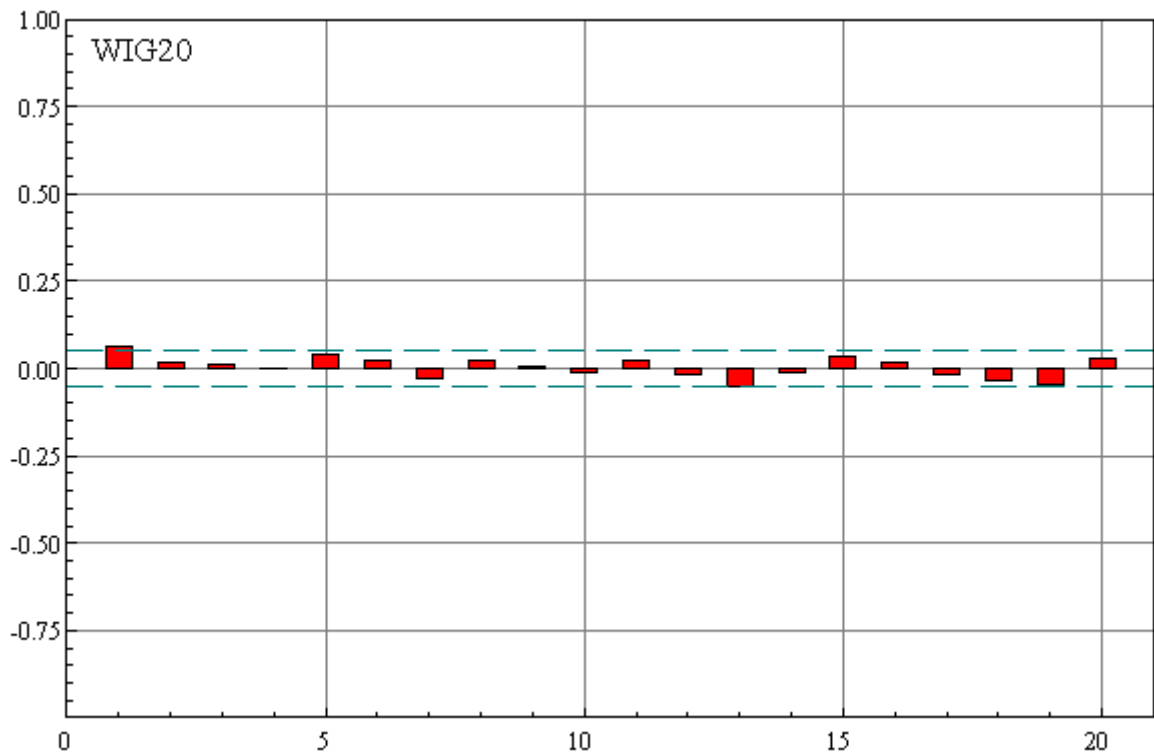
Przeprowadzona analiza korelacji pomiędzy wielkością obrotu a zmiennością również wyestymowaną za pomocą modelu GARCH(1,1) wskazuje na silną zależność między tymi wielkościami dla wszystkich analizowanych szeregów (rysunek 4.7), zwłaszcza dla PKN (współczynniki korelacji osiągają niemal 0,35) Przy czym dla KGH, PEO, PKM i PKN współczynnik korelacji jest dodatni (co wskazywałoby na wzrost zmienności wraz ze wzrostem obrotów), a dla WIG20 i TPS ujemny. Nie ma natomiast regularności dotyczącej rzędu opóźnień dla którego badana korelacja przyjmuje maksymalne wartości. Dla szeregu WIG20 i TPS współczynnik korelacji rośnie wraz z rzędem opóźnień, dla pozostałych szeregów współczynnik korelacji jest największy dla niewielkich opóźnień i maleje wraz ze wzrostem ich rzędu.

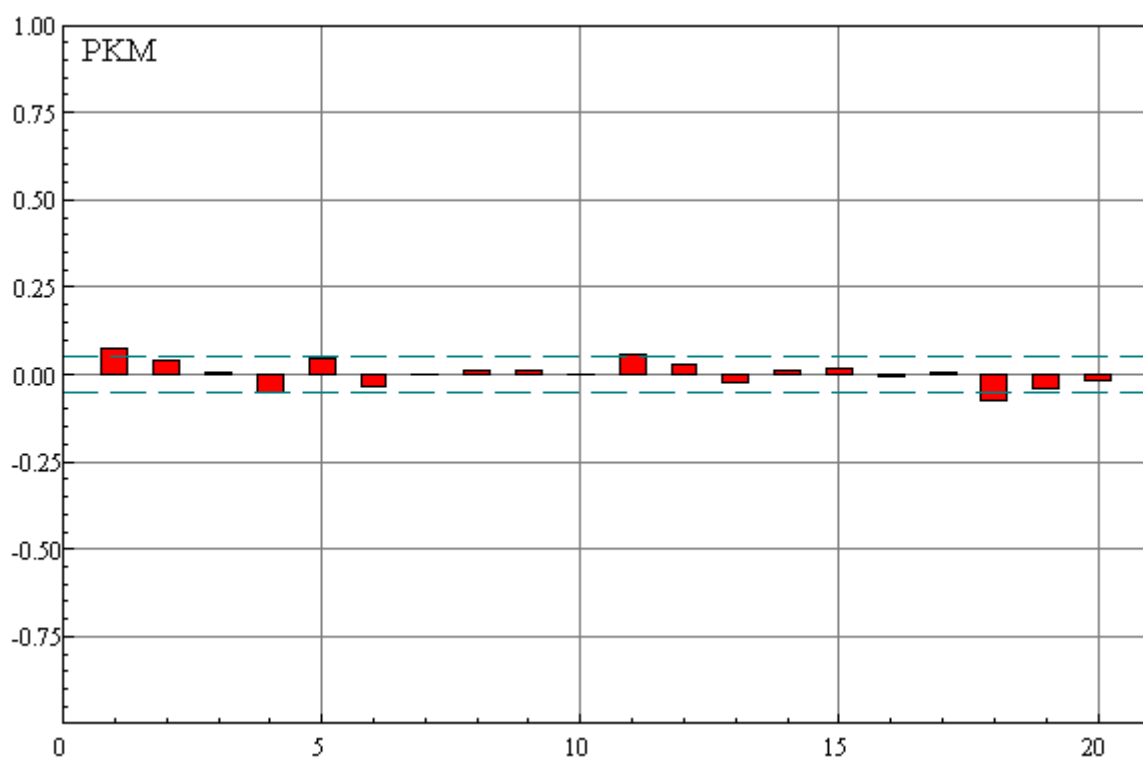
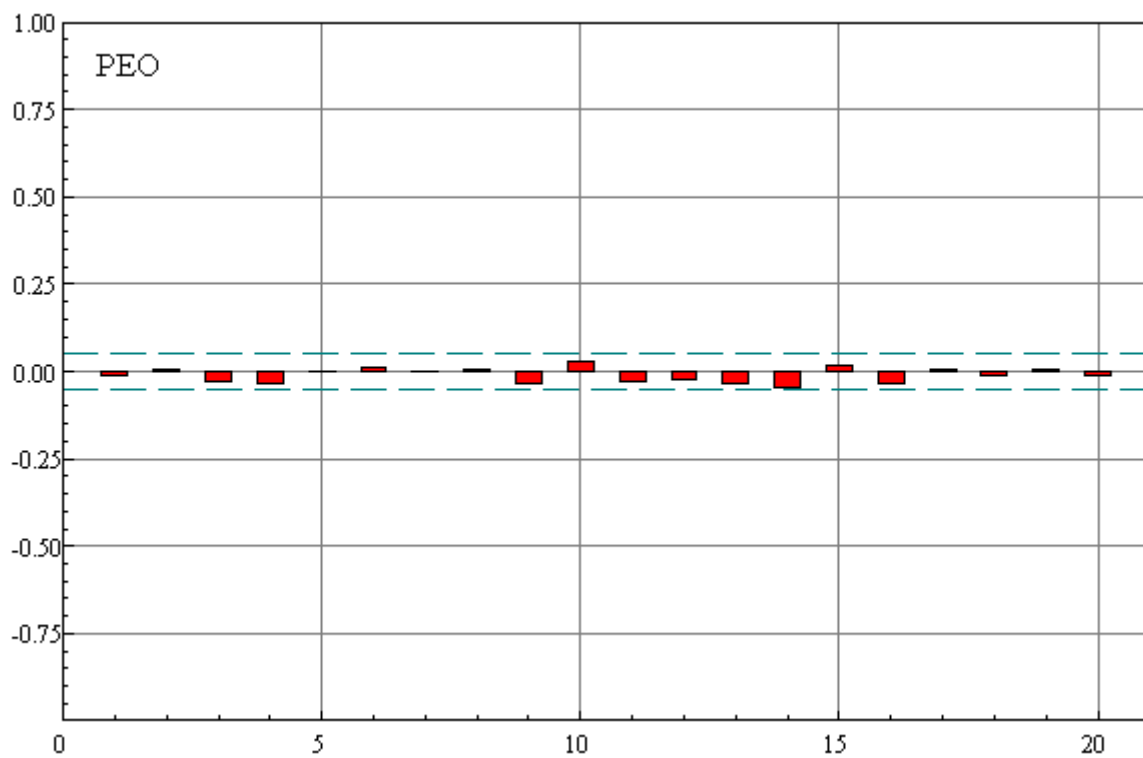
---

<sup>9</sup> por. Szyszka A. [2003], *Efektywność GPW w Warszawie na tle rynków dojrzałych*, Wydawnictwo AE Poznań, Poznań, s. 38

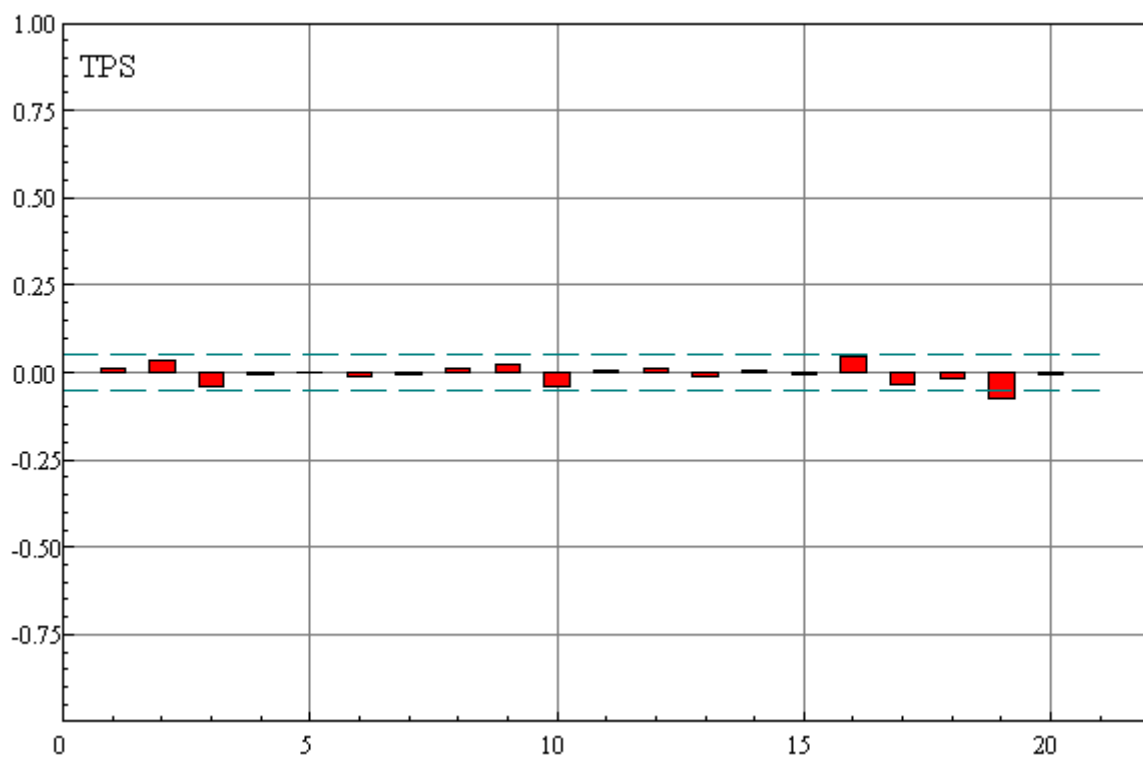
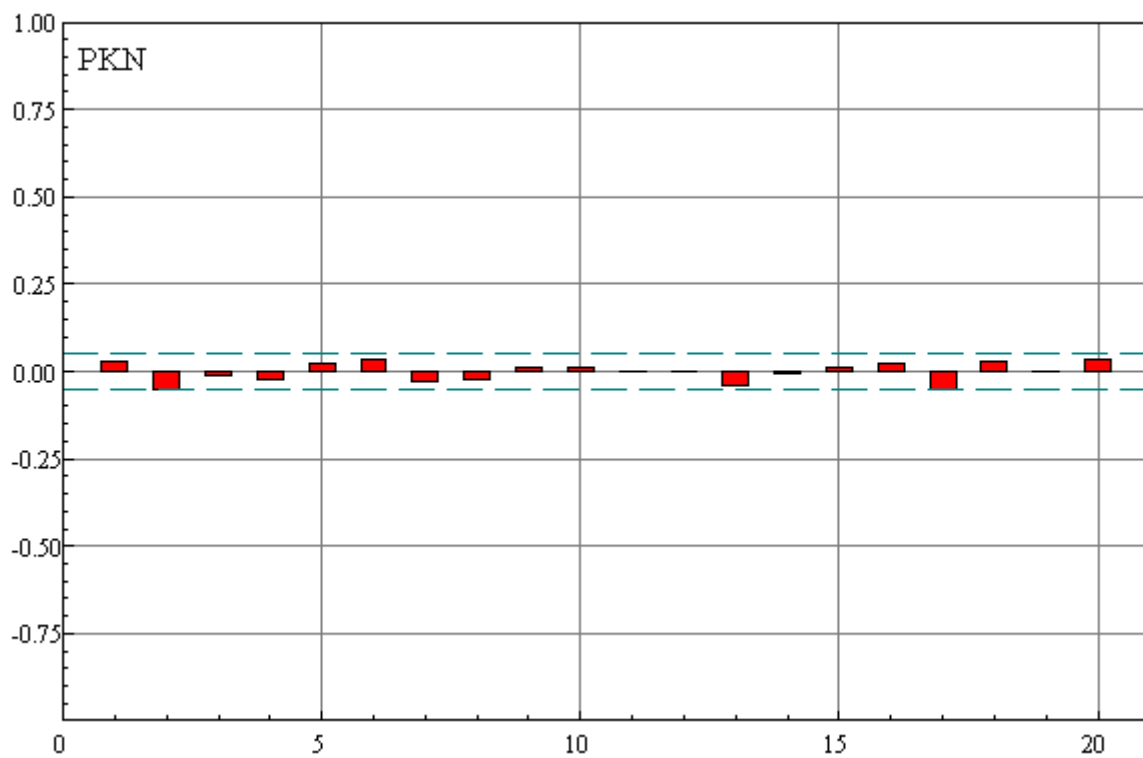
<sup>10</sup> Cont R. *Empirical...* op.cit. s.230

Rysunek 4.4. Badanie autokorelacji w szeregach zwrotu.



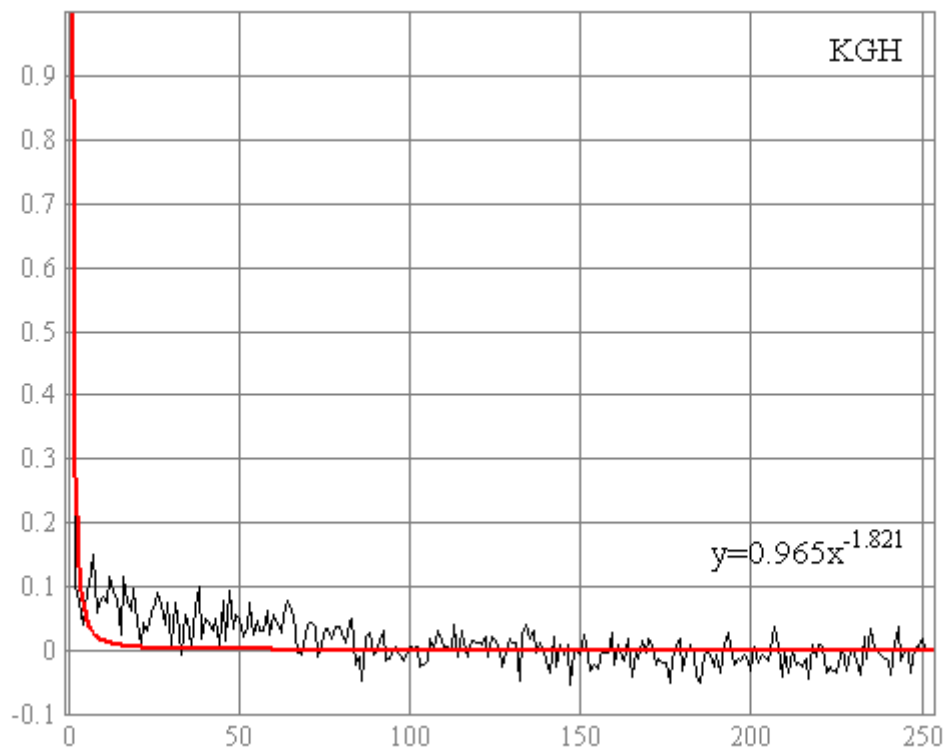
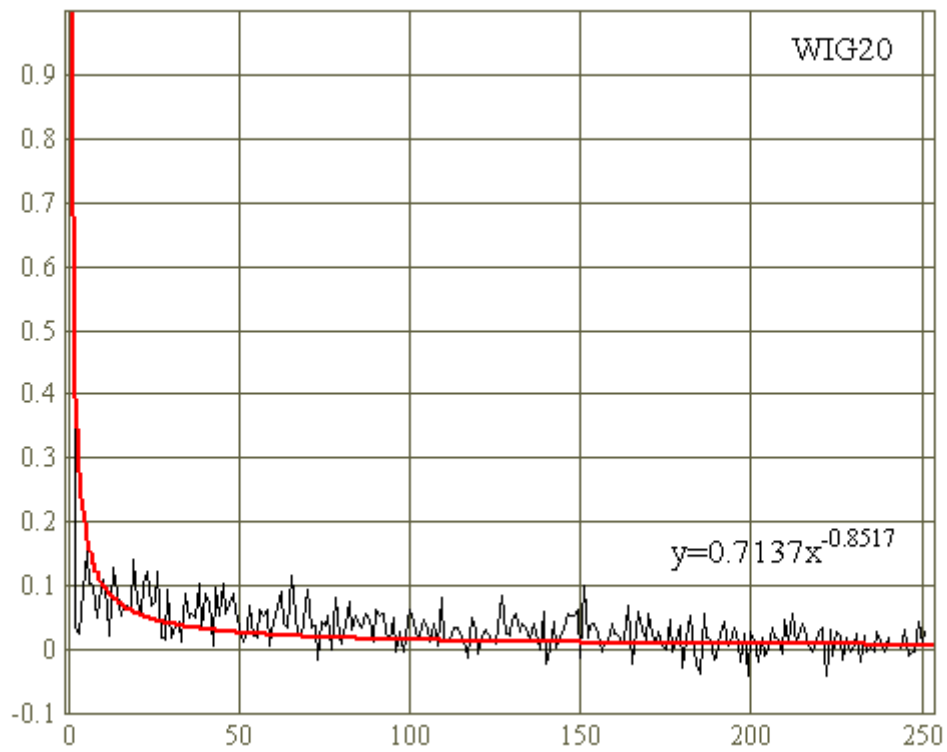


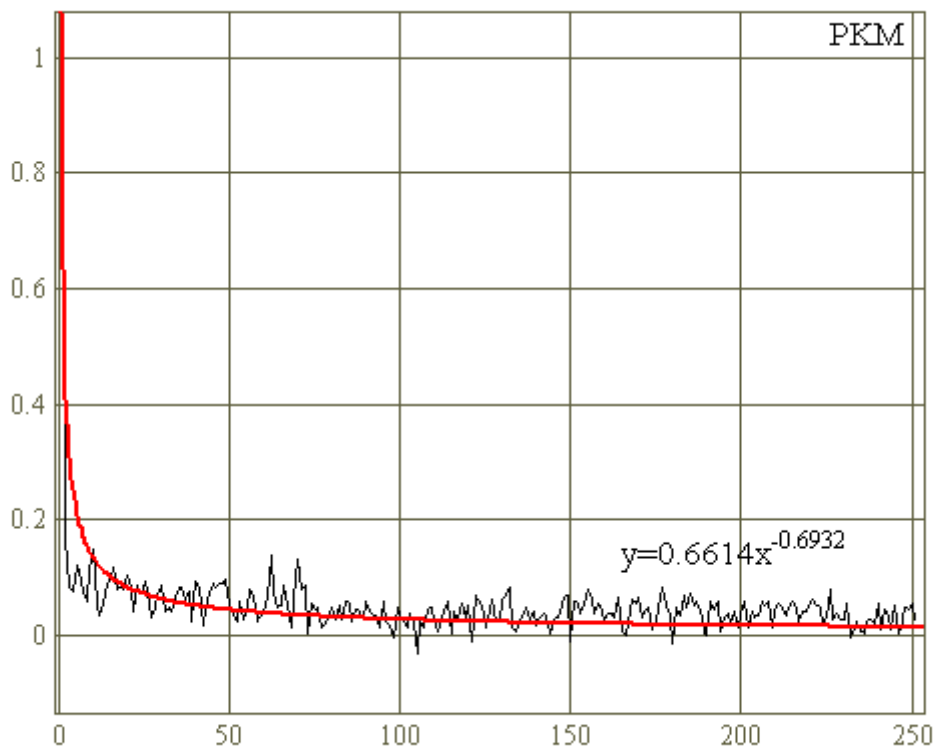
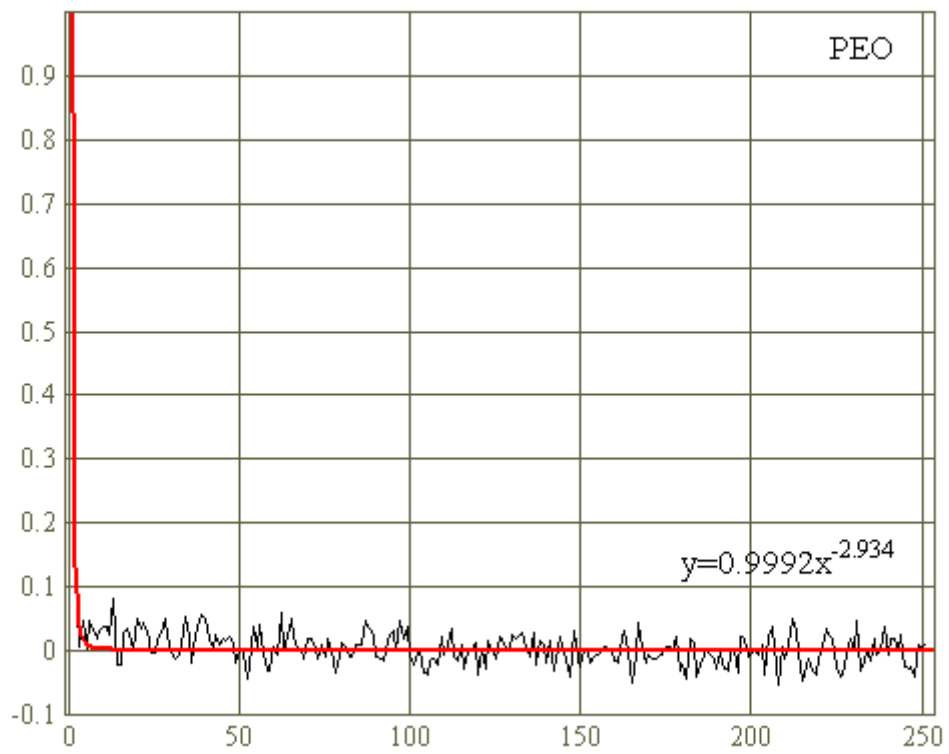


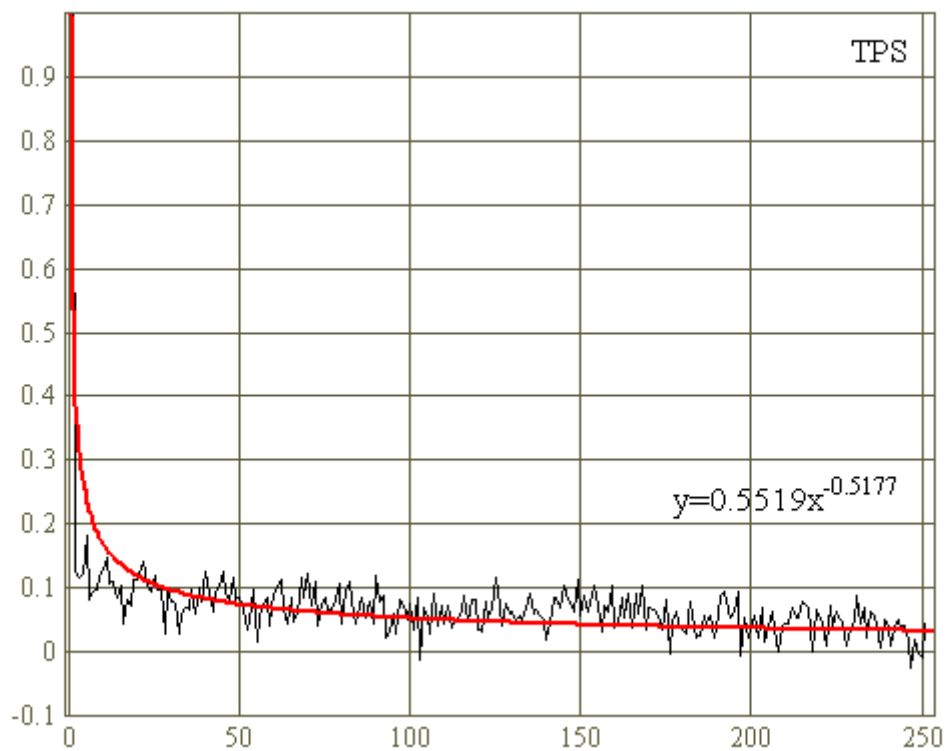
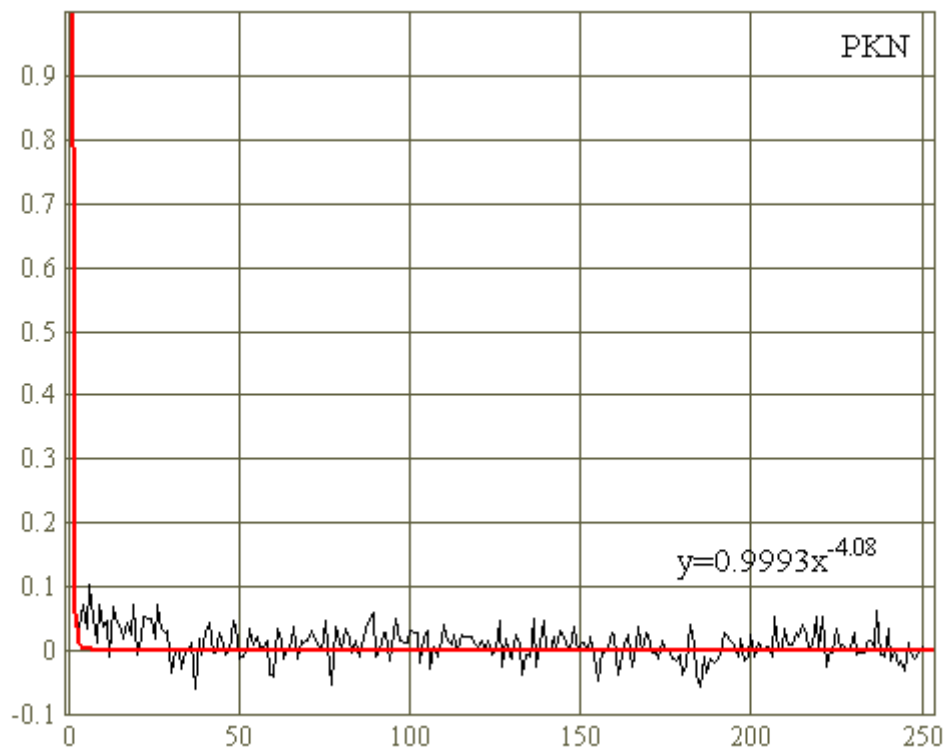


Źródło: opracowanie własne

Rysunek 4.5. Autokorelacje zwrotów bezwzględnych.

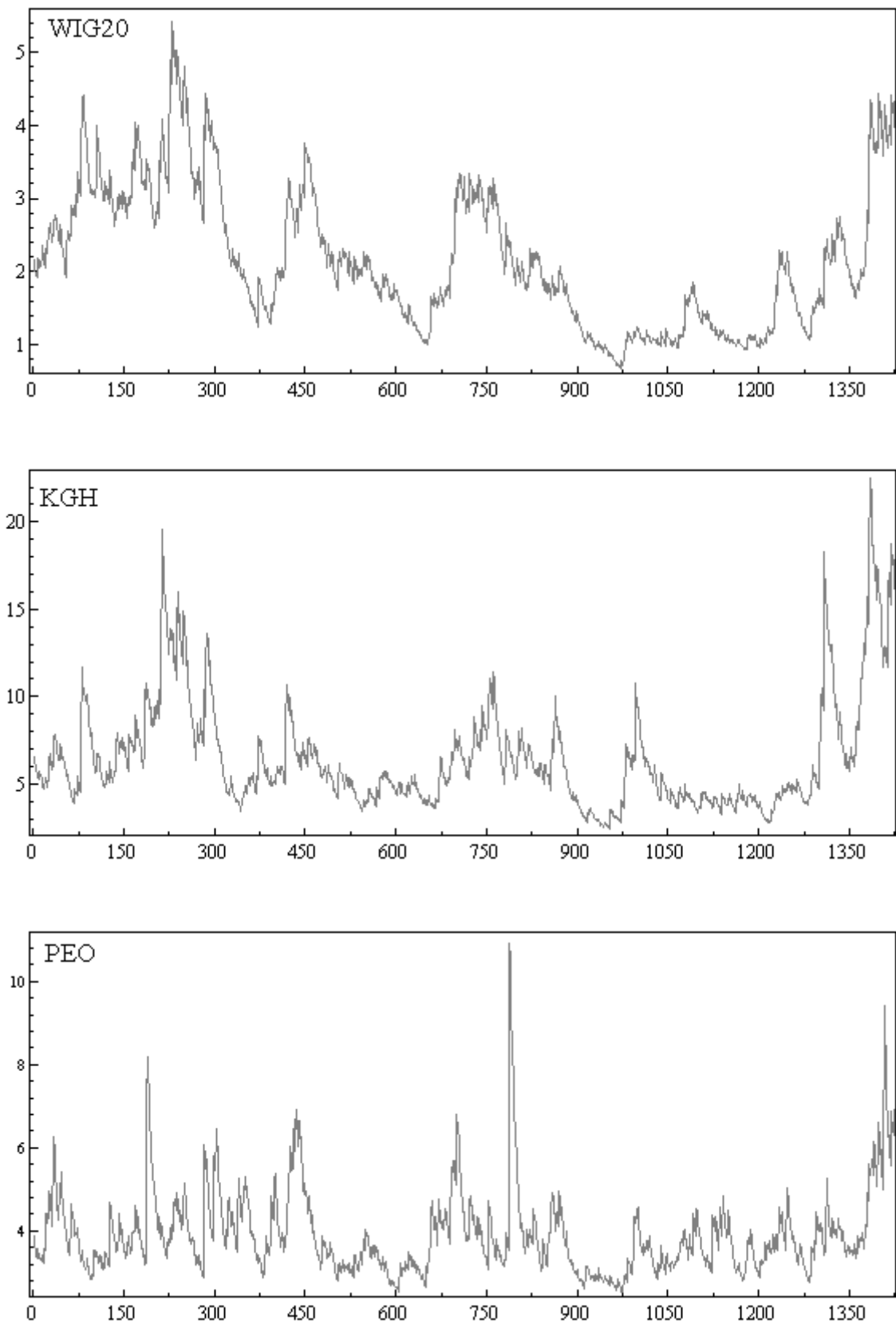


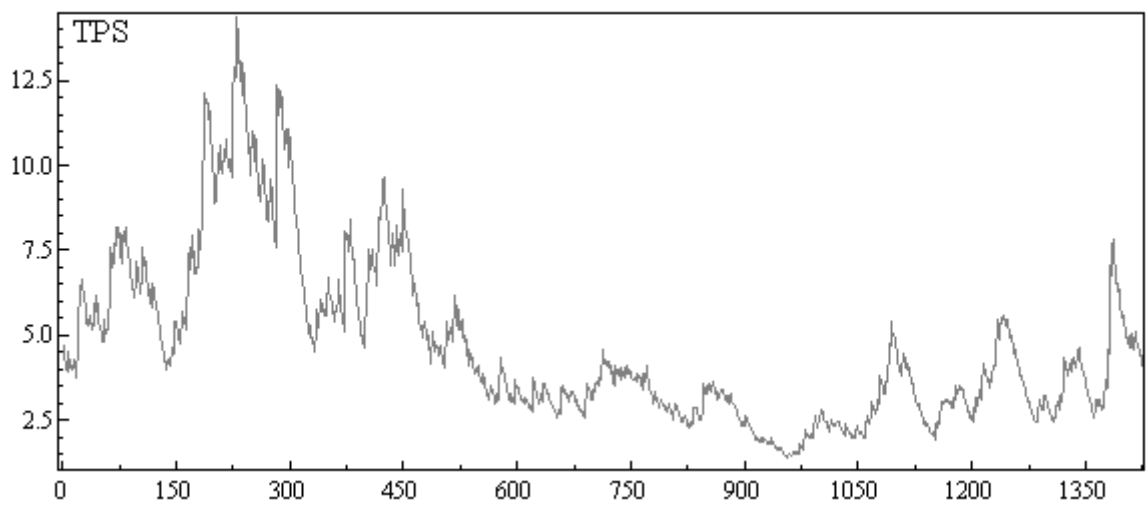
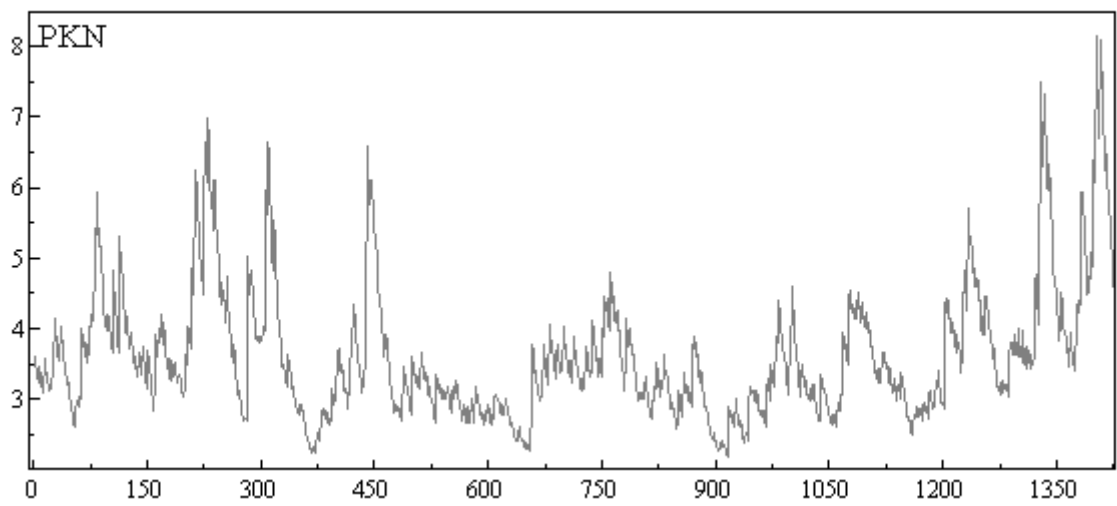
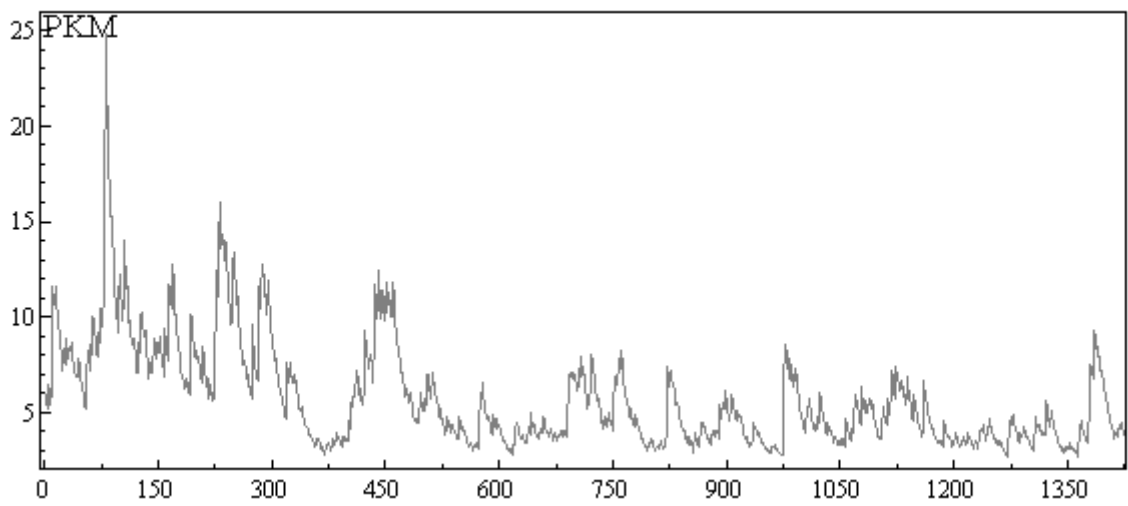




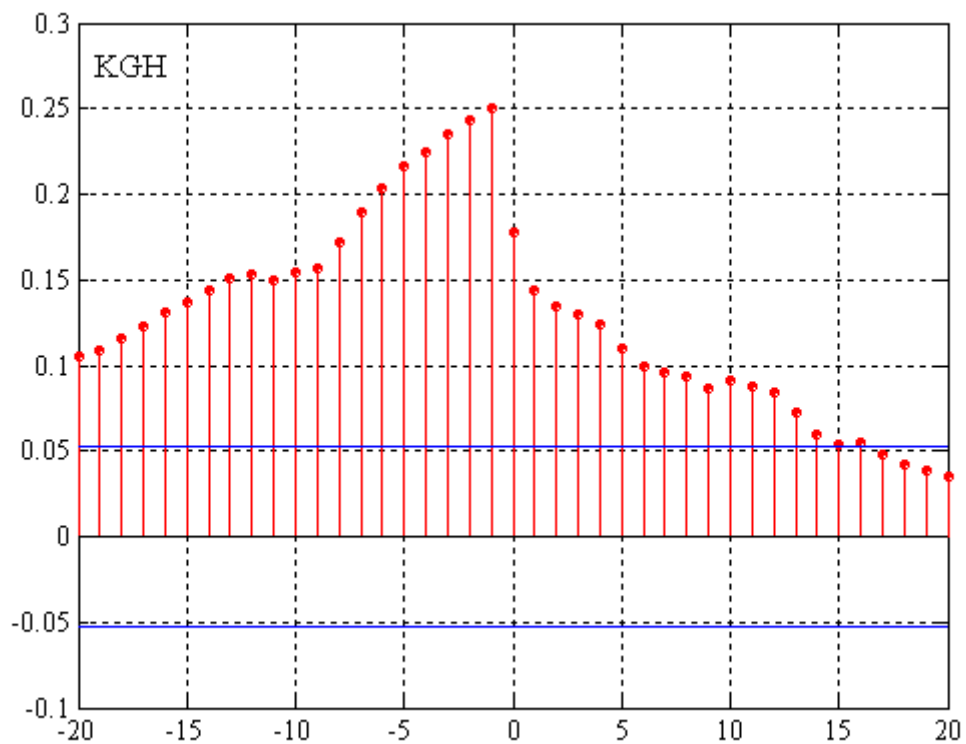
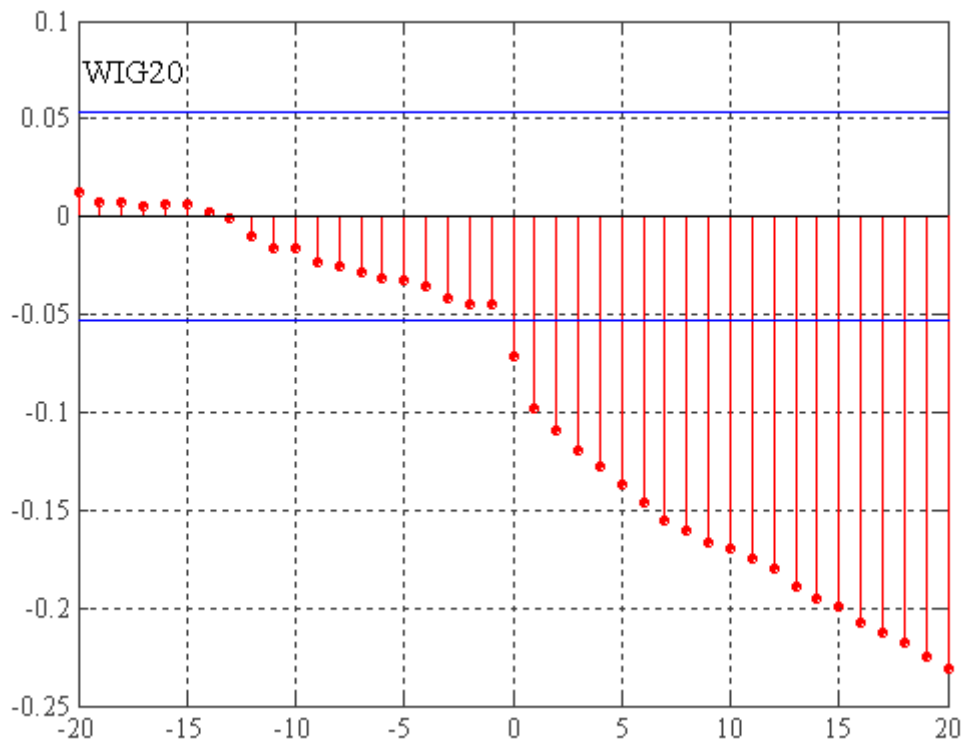
Źródło: opracowanie własne

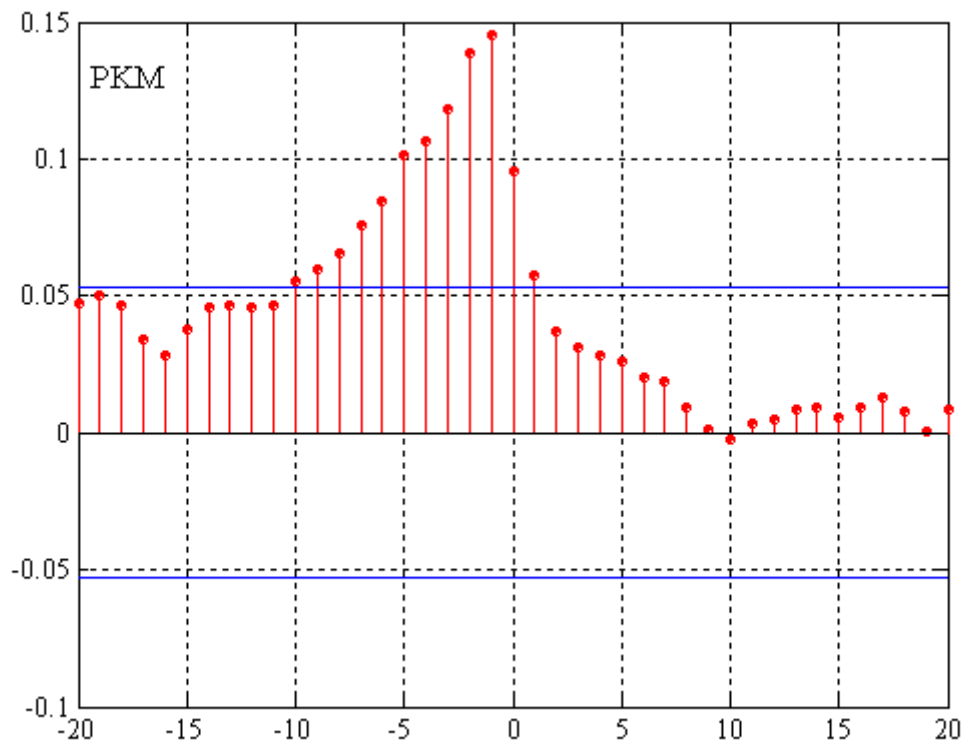
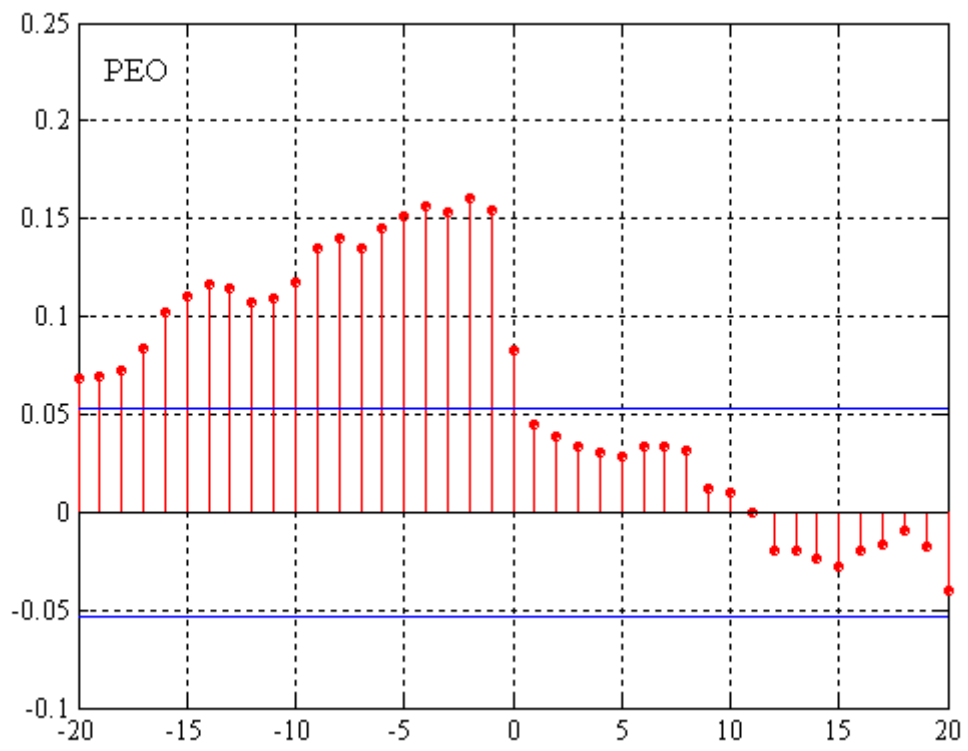
Rysunek 4.6. Zmienność wyestymowana za pomocą modelu GARCH.



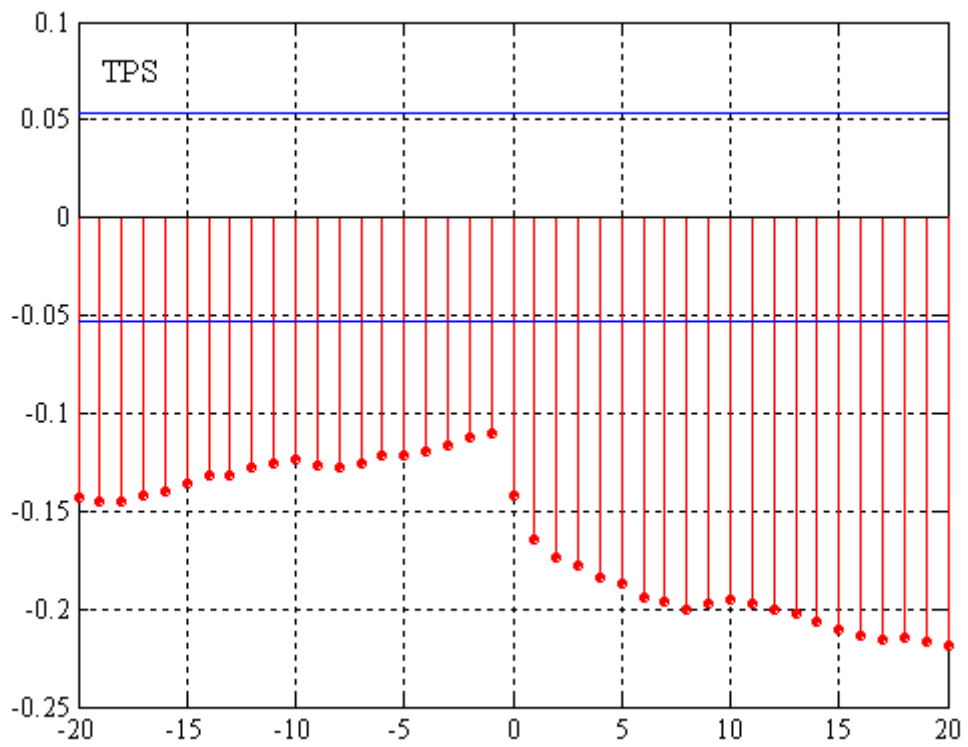
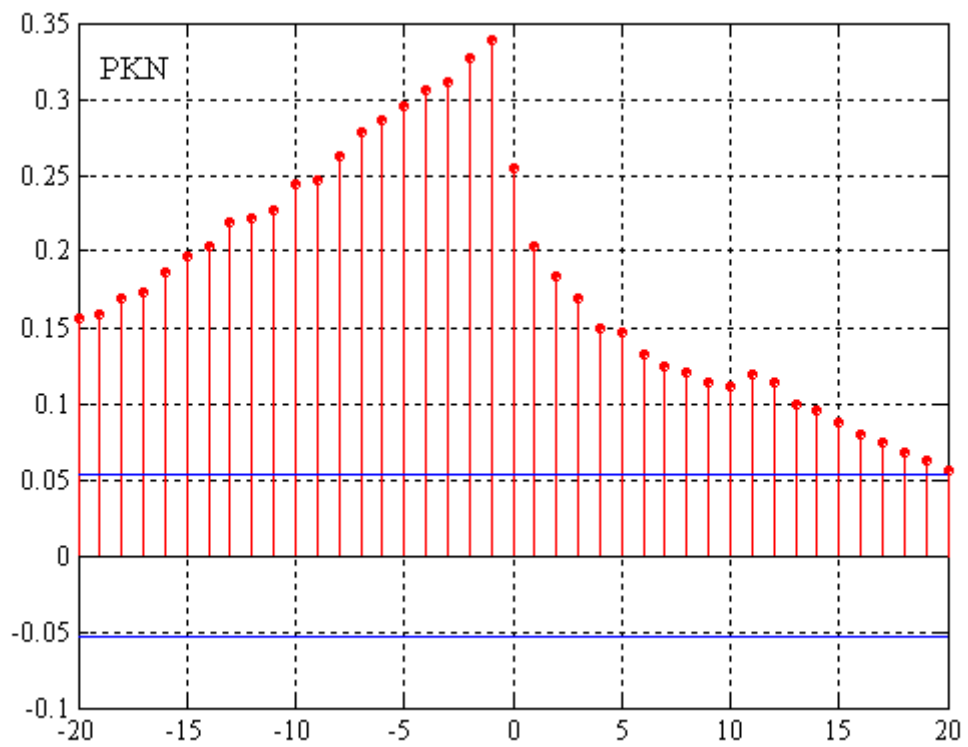


Rysunek 4.7. Korelacja między wielkością obrotów a zmiennością wyestymowaną za pomocą modelu GARCH.



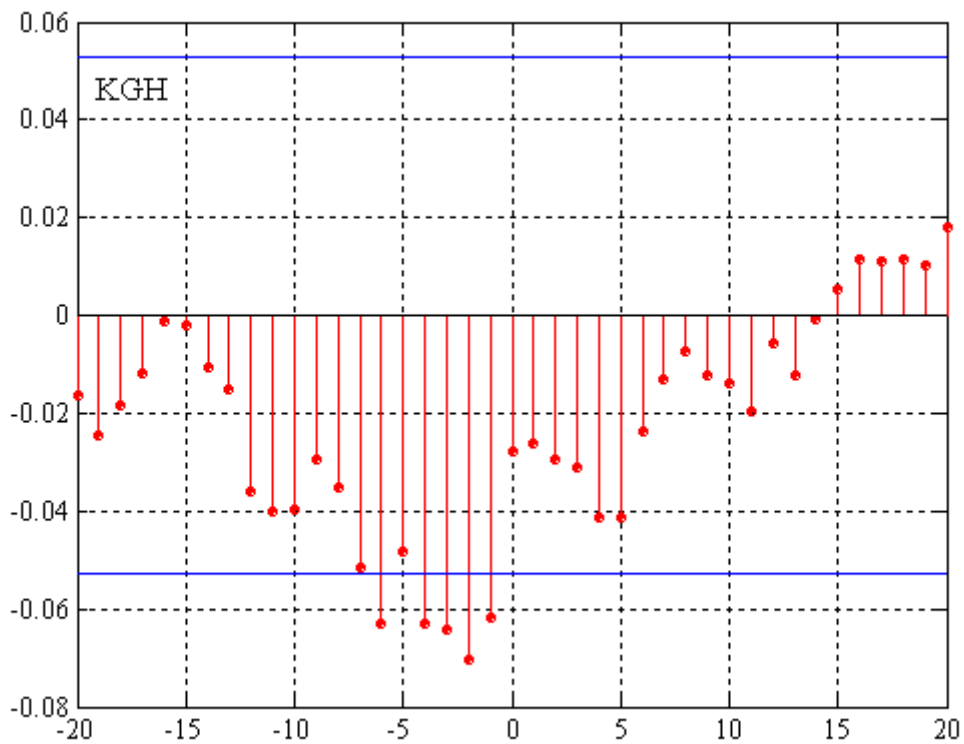
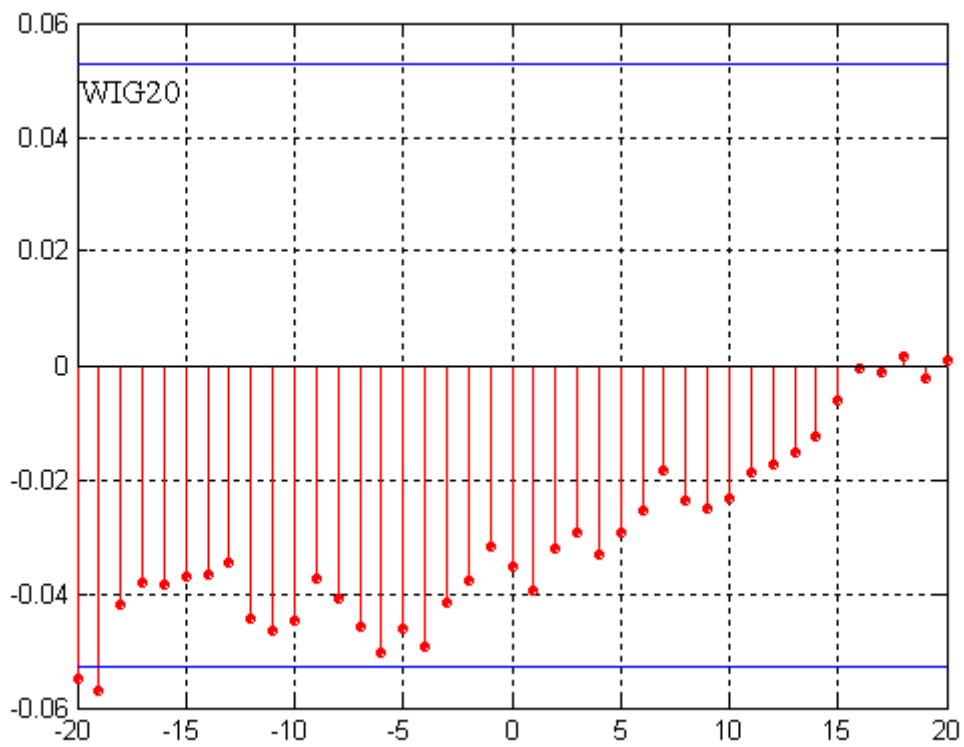


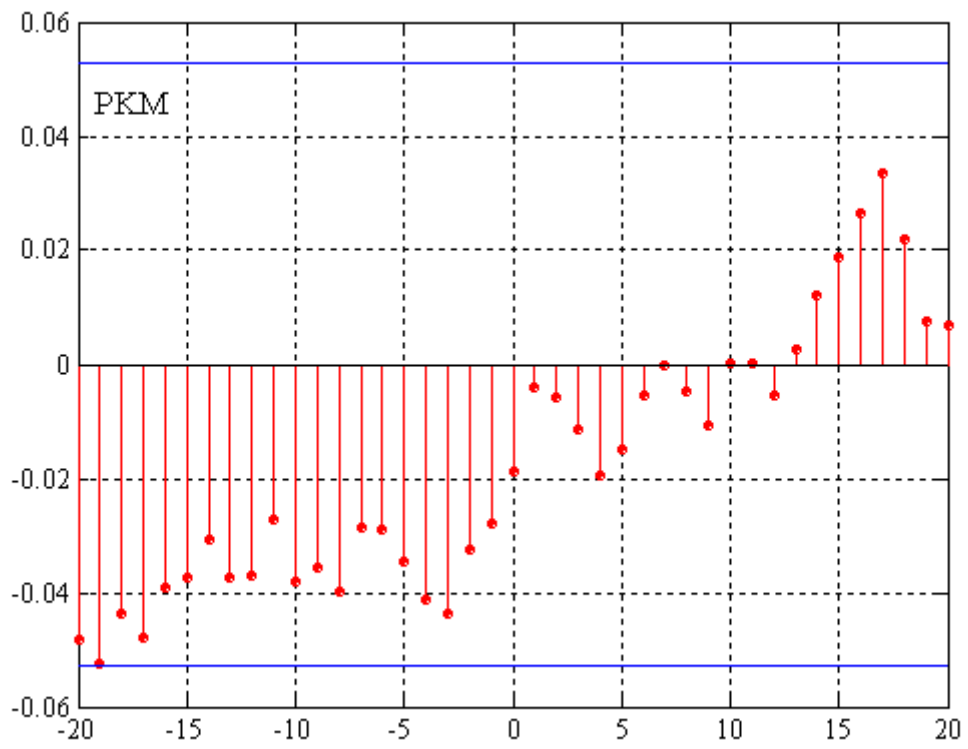
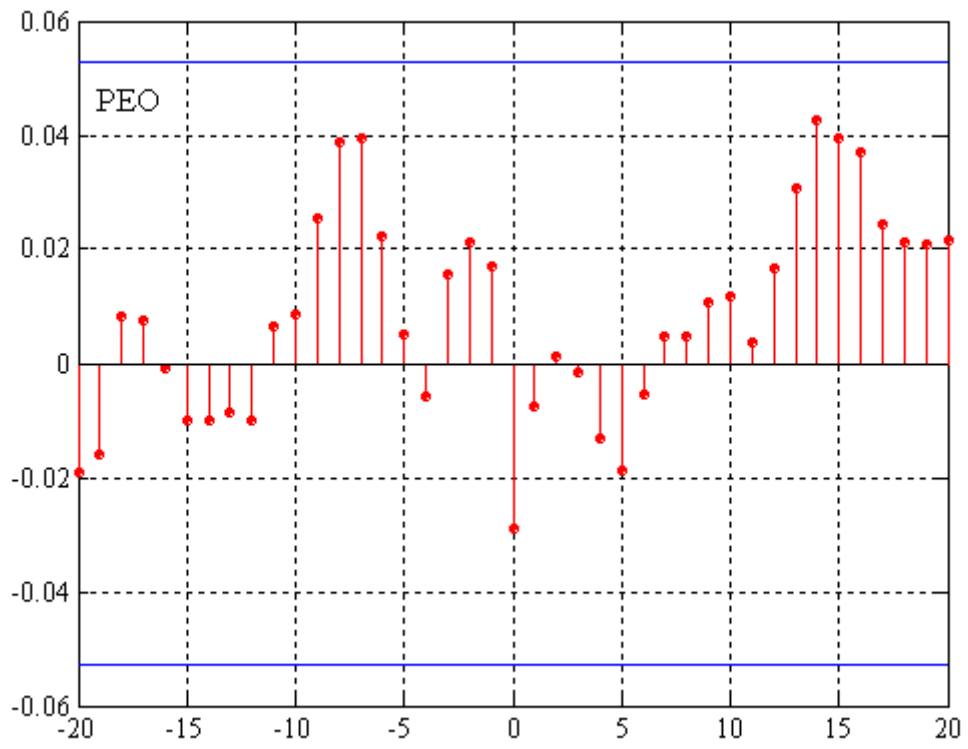


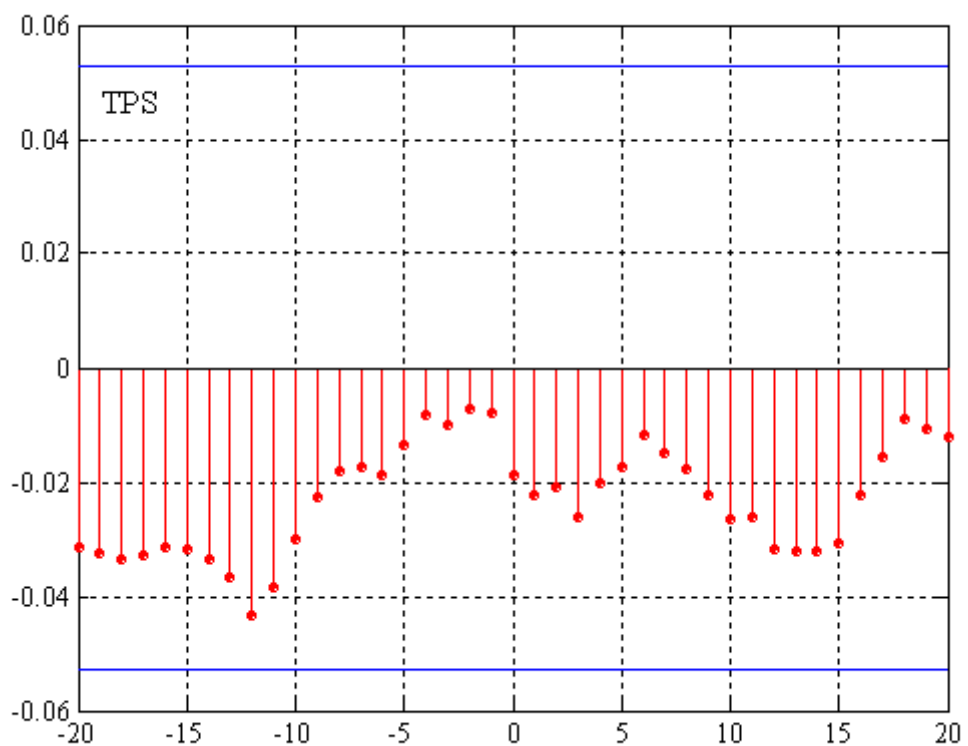
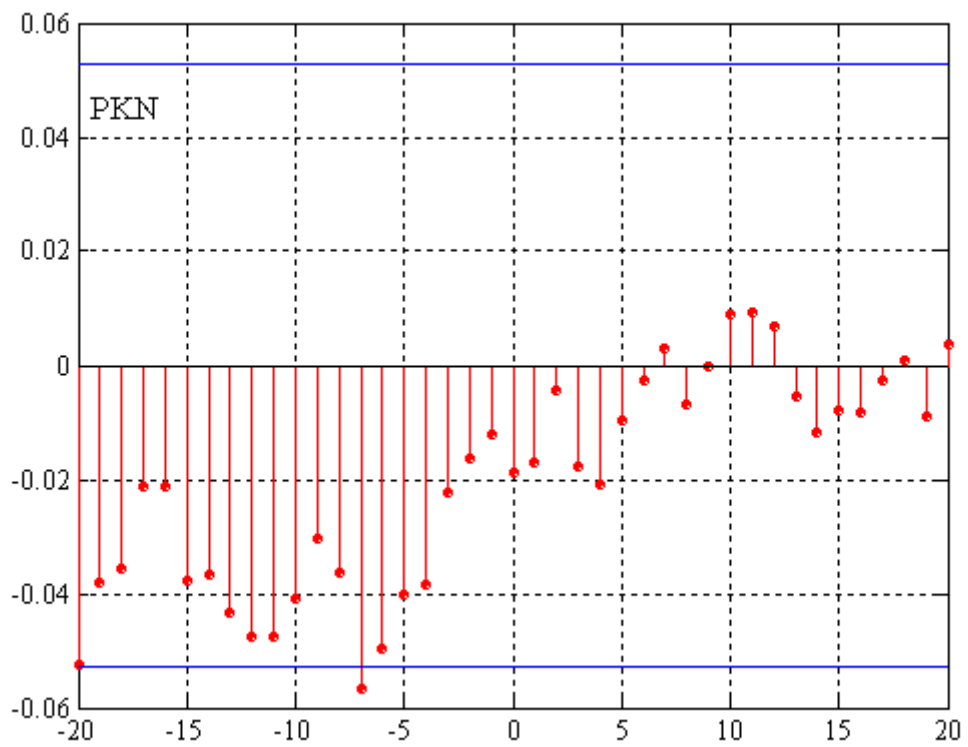


Źródło: opracowanie własne

Rysunek 4.8. Korelacja między wielkością zwrotów a zmiennością wyestymowaną za pomocą modelu GARCH.







Źródło: opracowanie własne

Badanie zależności pomiędzy wielkością zwrotów a zmiennością wyestymowaną z użyciem modelu GARCH(1,1), wykazało brak efektu dźwigni (rysunek 4.8). Okresy podwyższonej zmienności nie rozpoczynają się od dużych zwrotów ujemnych, zatem dodatnie i ujemne zwroty nie wywierają asymetrycznego wpływu na poziom zmienności. Jedynie dla szeregu KGH można dopatrzeć się istotnej statystycznie zależności pomiędzy wspomnianymi wielkościami dla niektórych rzędów opóźnień, ale jest to słaba zależność.

Przeprowadzona analiza szeregów zwrotów potwierdziła występowanie jedynie niektórych charakterystycznych cech. Na wciąż rozwijającym się polskim rynku kapitałowym szeregi czasowe mają inne własności niż szeregi obserwowane na rynkach dojrzałych. Informacje uzyskane w tym rozdziale posłużą do możliwie najlepszego dopasowania badanych modeli wyceny opcji.

## Rozdział V

### Wycena opcji notowanych na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie

W rozdziale tym dokonano estymacji modeli zmienności i odrzucono te, których parametry są nieistotne. Następnie wybrano modele najlepiej dopasowane do badanych szeregów. W tym celu posłużono się kryterium informacyjnym Schwarzera i jakością generowanych przez model prognoz. Do oceny jakości prognoz wykorzystano błędy prognoz (odnoszone do zmienności zrealizowanej), które umożliwiły budowę rankingów modeli. Tak wyselekcjonowane modele posłużyły do wyceny opcji. Uzyskane wyniki porównano z cenami rynkowymi i cenami uzyskanymi z modelu  $\mathcal{M}^{BS}$ .

#### 5.1 Estymacja i wybór modeli zmienności

Dla danych omówionych w poprzednim rozdziale estymowano modele o przedstawionej w rozdziale trzecim specyfikacji i rozkładach. Do obliczeń wykorzystano działające w środowisku Ox programy TSM 4.2 Davidsona oraz svmodel.ox, towarzyszącemu pakietowi SsfPack autorstwa Koopmana, Shepparda i Doornika. W przypadku modeli GARCH badano około 300 różnych specyfikacji. Spośród nich tylko nieliczne miały istotne parametry. Tabela 5.1 przedstawia ich listę. Dla PEO i PKN takich modeli jest tylko 9, dla WIG20, KGH i PKM odpowiednio 17, 12 i 20. Wyjątkowo dużo (42) na tle pozostałych szeregów udało się wyestymować dla szeregu TPS. Zaskakujący jest fakt, że dla szeregu PEO, wśród modeli o istotnych parametrach nie było najprostszych, a jedynie modele wykładnicze GARCH i jeden model APARCH. Natomiast dla szeregu TPS dużo jest modeli, dla których rząd opóźnień  $p$  jest równy 0 (co oznacza, że modele te redukują się do ARCH( $q$ )), a rząd opóźnień  $q$  osiąga wartości aż do 4 włącznie.

Z przedstawionego zbioru modeli wybrany został model najlepszy ze względu na kryterium informacyjne Schwarzera, nazywane też bayesowskim kryterium informacyjnym (*Bayesian Information Criterion* – *BIC*). Zdecydowano się na to kryterium ze względu na karę nakładaną za nadmierną złożoność modelu. Kara jest równa logarytmowi naturalnemu z długości próby pomnożonemu przez liczbę estymowanych w modelu parametrów. Kryterium *BIC* preferuje więc modele prostsze. Zatem kryterium informacyjne Schwarzera jest wyznaczane ze wzoru:

$$BIC = L - \frac{1}{2} \cdot k \ln n, \quad (5.1)$$

gdzie:

$L$  – maksimum logarytmu funkcji wiarygodności,

$k$  – liczba estymowanych parametrów,

$n$  – długość szeregu czasowego (liczba obserwacji).

Wartości kryterium Schwarza w estymowanych modelach przedstawia tabela 5.2. Najwyższe wartości kryterium  $BIC$  uzyskały modele stosunkowo proste. Dla WIG20, PKM i TPS najlepszym modelem okazał się być model GARCH(1,1) z rozkładem GED, a więc jeden z najprostszych modeli uwzględniających leptokurtyczność. Dla KGH największą wartość kryterium Schwarza miał model GARCH(1,1) z rozkładem Studenta. W rozdziale trzecim pokazano, że w sytuacji gdy zwroty logarymiczne są modelowane jako zmienna losowa o warunkowym rozkładzie Studenta, to wartość oczekiwana zwrotu prostego nie istnieje (jest nieskończona). Dlatego też do wyceny opcji wybrano pierwszy w kolejności model, który nie sprawia takich problemów: AR(1)-GARCH(1,1) z rozkładem normalnym. Model ten zajmuje dopiero 7 miejsce, ale przy wartości kryterium tylko nieznacznie mniejszym (niepełna 0,5%). Podobnie postąpiono dla szeregów PEO i PKN. W ich przypadku najlepszymi okazały się modele bardziej złożone - odpowiednio EGARCH(2,1) i EGARCH(1,1) z rozkładem Studenta. Modele te zostały zastąpione modelami o tej samej specyfikacji, ale z rozkładem GED. Warto zaznaczyć, że różnice wartości  $BIC$  między najlepiej i najgorzej dopasowanym modelem są stosunkowo nieduże od niespełna 1% dla szeregów KGH, PEO, PKN, do nieznacznie przekraczających ten poziom w przypadku WIG20 i PKM. Jedynie dla TPS różnice przekraczają 2% co wynika przede wszystkim z dużej ilości modeli, które udało się dla tego szeregu wyestymować.

Dla każdego z szeregów wybrano również model najlepszy ze względu na jakość prognoz. Do oceny jakości prognoz użyto 100 obserwacji (od 27 lutego do 21 lipca 2006). Prognozy odnoszone są do opartej na zwrotach śróddziennych (5 minutowych) zmienności zrealizowanej. Jako miarę zmienności zrealizowanej przyjęto zaproponowaną przez Andersena, Bollersleva, Diebolda i Ebensa<sup>1</sup> sumę kwadratów zwrotów śróddziennych bez uwzględniania zwrotu nocnego:

$$RV = \sum_{d=1}^D r_{t,d}^2, \quad (5.2)$$

gdzie  $r_{t,d}$  to zwroty śróddzienne ( $t$  oznacza numer dnia,  $d$  numer kolejnego zwrotu w ciągu dnia), a  $D$  jest liczbą notowań śróddziennych o danej częstotliwości.

---

<sup>1</sup> Andersen T. G., Bollerslev T., Diebold F. X., Ebens H. [2001], *The distribution of realized stock return volatility*, Journal of Financial Economics 61, ss. 43-76

Tabela 5.1. Lista modeli GARCH o istotnych parametrach.

Szereg			
WIG20	KGH	PEO	PKM
model			
1. GARCH(1,1) GED	1. GARCH(1,1) Studenta	1. EGARCH(2,1) studenta	1. GARCH(1,1) GED
2. APARCH(1,1) GED	2. AR(1)-GARCH(1,1) Studenta	2. EGARCH(1,1) studenta	2. APARCH(1,1) GED
3. GARCH(1,1) Studenta	3. APARCH(1,1) Studenta	3. EGARCH(2,1) GED	3. GARCH(1,1) Studenta
4. GARCH(1,1) skośny Studenta	4. AR(1)-APARCH(1,1) Studenta	4. EGARCH(2,1) skośny studenta	4. APARCH(1,1) Studenta
5. APARCH(1,1) Studenta	5. EGARCH(1,1) Studenta	5. EGARCH(1,1) GED	5. EGARCH(1,1) GED
6. AR(1)-GARCH(1,1) Studenta	6. AR(1)-EGARCH(1,1) Studenta	6. EGARCH(1,1) skośny studenta	6. AR(1)-GARCH(1,1) Studenta
7. GARCH(1,1) normalny	7. AR(1)-GARCH(1,1) normalny	7. EGARCH(2,1) normalny	7. EGARCH(2,1) GED
8. EGARCH(1,1) GED	8. GARCH(1,1) normalny	8. APARCH(2,1) normalny	8. AR(1)-APARCH(1,1) Studenta
9. AR(1)-APARCH(1,1) Studenta	9. AR(1)-APARCH(1,1) normalny	9. EGARCH(1,1) normalny	9. EGARCH(1,1) Studenta
10. AR(1)-GARCH(1,1) skośny Studenta	10. APARCH(1,1) normalny		10. EGARCH(2,1) Studenta
11. APARCH(1,1) normalny	11. EGARCH(1,1) normalny		11. AR(1)-EGARCH(1,1) Studenta
12. AR(1)-GARCH(1,1) normalny	12. AR(1)-EGARCH(1,1) normalny		12. AR(1)-EGARCH(2,1) Studenta
13. EGARCH(1,1) Studenta			13. GARCH(1,1) normalny
14. AR(1)-EGARCH(1,1) Studenta			14. APARCH(1,1) normalny
15. AR(1)-APARCH(1,1) normalny			15. AR(1)-GARCH(1,1) normalny
16. EGARCH(1,1) normalny			16. AR(1)-APARCH(1,1) normalny
17. AR(1)-EGARCH(1,1) normalny			17. EGARCH(1,1) normalny
			18. EGARCH(2,1) normalny
			19. AR(1)-EGARCH(1,1) normalny
			20. AR(1)-EGARCH(2,1) normalny

Źródło: Opracowanie własne



Tabela 5.1. Lista modeli GARCH o istotnych parametrach. (c.d.)

Szereg		
PKN		TPS
model		
1. EGARCH(1,1) Studenta	1. GARCH(1,1) GED	22. APARCH(0,3) GED
2. GARCH(1,1) Studenta	2. GARCH(1,1) skośny Studenta	23. APARCH(0,3) Studenta
3. APARCH(1,1) Studenta	3. GARCH(1,1) Studenta	24. GARCH(0,2) Studenta
4. EGARCH(1,1) GED	4. APARCH(1,1) GED	25. EGARCH(0,3) GED
5. GARCH(1,1) GED	5. APARCH(1,1) skośny Studenta	26. APARCH(0,4) normalny
6. APARCH(1,1) GED	6. APARCH(1,1) Studenta	27. APARCH(0,3) skośny Studenta
7. EGARCH(1,1) normalny	7. GARCH(1,1) normalny	28. APARCH(0,2) GED
8. GARCH(1,1) normalny	8. APARCH(1,1) normalny	29. EGARCH(0,2) GED
9. APARCH(1,1) normalny	9. EGARCH(1,1) skośny Studenta	30. GARCH(0,2) skośny Studenta
	10. EGARCH(1,1) Studenta	31. EGARCH(0,3) Studenta
	11. EGARCH(1,1) GED	32. APARCH(0,2) Studenta
	12. EGARCH(1,1) normalny	33. EGARCH(0,2) Studenta
	13. GARCH(0,4) GED	34. EGARCH(0,3) skośny Studenta
	14. GARCH(0,4) Studenta	35. APARCH(0,2) skośny Studenta
	15. GARCH(0,4) skośny Studenta	36. EGARCH(0,2) skośny Studenta
	16. APARCH(0,4) Studenta	37. EGARCH(0,2) normalny
	17. GARCH(0,3) GED	38. GARCH(0,3) normalny
	18. GARCH(0,3) Studenta	39. APARCH(0,3) normalny
	19. GARCH(0,4) normalny	40. GARCH(0,2) normalny
	20. GARCH(0,3) skośny Studenta	41. EGARCH(0,3) normalny
	21. GARCH(0,2) GED	42. APARCH(0,2) normalny

Źródło: Opracowanie własne

Tabela 5.2. Wartości kryterium Schwarzera w estymowanych modelach.

WIG20		KGH		PEO	
model	BIC	model	BIC	model	BIC
1. GARCH(1,1) normalny	-2506,27	1. GARCH(1,1) Studenta	-3279,87	1. EGARCH(2,1) studenta	-2967,03
2. AR(1)-GARCH(1,1) normalny	-2509,85	2. AR(1)-GARCH(1,1) Studenta	-3282,18	2. EGARCH(1,1) studenta	-2968,03
3. GARCH(1,1) GED	-2512,26	3. APARCH(1,1) Studenta	-3283,33	3. EGARCH(2,1) GED	-2968,62
4. APARCH(1,1) GED	-2515,79	4. AR(1)-APARCH(1,1) Studenta	-3285,80	4. EGARCH(2,1) skośny studenta	-2969,30
5. APARCH(1,1) normalny	-2515,83	5. EGARCH(1,1) Studenta	-3287,04	5. EGARCH(1,1) GED	-2969,89
6. AR(1)-APARCH(1,1) normalny	-2517,86	6. AR(1)-EGARCH(1,1) Studenta	-3288,46	6. EGARCH(1,1) skośny studenta	-2970,47
7. GARCH(1,1) Studenta	-2519,09	7. AR(1)-GARCH(1,1) normalny	-3295,93	7. EGARCH(2,1) normalny	-2981,18
8. APARCH(1,1) Studenta	-2519,78	8. GARCH(1,1) normalny	-3296,69	8. APARCH(2,1) normalny	-2983,21
9. AR(1)-GARCH(1,1) Studenta	-2520,62	9. AR(1)-APARCH(1,1) normalny	-3299,56	9. EGARCH(1,1) normalny	-2984,79
10. GARCH(1,1) skośny Studenta	-2521,33	10. APARCH(1,1) normalny	-3300,19		
...	...	11. EGARCH(1,1) normalny	-3304,49		
17. AR(1)-EGARCH(1,1) normalny	-2539,49	12. AR(1)-EGARCH(1,1) normalny	-3305,05		
PKM		PKN		TPS	
model	BIC	model	BIC	model	BIC
1. GARCH(1,1) GED	-3191,10	1. EGARCH(1,1) Studenta	-2917,11	1. GARCH(1,1) GED	-3045,63
2. APARCH(1,1) GED	-3195,03	2. GARCH(1,1) Studenta	-2917,39	2. GARCH(1,1) skośny Studenta	-3046,34
3. GARCH(1,1) Studenta	-3197,90	3. APARCH(1,1) Studenta	-2920,33	3. GARCH(1,1) Studenta	-3046,86
4. APARCH(1,1) Studenta	-3201,18	4. EGARCH(1,1) GED	-2920,62	4. APARCH(1,1) GED	-3049,24
5. EGARCH(1,1) GED	-3202,10	5. GARCH(1,1) GED	-2921,05	5. APARCH(1,1) skośny Studenta	-3049,91
6. AR(1)-GARCH(1,1) Studenta	-3203,27	6. APARCH(1,1) GED	-2923,87	6. APARCH(1,1) Studenta	-3050,46
7. EGARCH(2,1) GED	-3203,58	7. EGARCH(1,1) normalny	-2927,74	7. GARCH(1,1) normalny	-3050,98
8. AR(1)-APARCH(1,1) Studenta	-3206,39	8. GARCH(1,1) normalny	-2930,32	8. APARCH(1,1) normalny	-3054,55
9. EGARCH(1,1) Studenta	-3208,33	9. APARCH(1,1) normalny	-2931,16	9. EGARCH(1,1) skośny Studenta	-3057,12
10. EGARCH(2,1) Studenta	-3210,07			10. EGARCH(1,1) Studenta	-3057,17
...	...			...	...
19. AR(1)-EGARCH(1,1) normalny	-3232,24			40. GARCH(0,2) normalny	-3105,48
20. AR(1)-EGARCH(2,1) normalny	-3232,84			41. EGARCH(0,3) normalny	-3108,02
				42. APARCH(0,2) normalny	-3108,56

Zródło: Opracowanie własne

Miara  $RV$  (5.2) została nazwana przez Andersena *et al.* zmiennością dzienną. W niniejszej pracy zrezygnowano z uwzględnienia zwrotu nocnego ze względu na znaczne zanieczyszczenie tego zwrotu szumem losowym<sup>2</sup>. Badania empiryczne przeprowadzone na rozwiniętych rynkach wskazują co prawda, że miara (5.2) daje zaniżone estymacje zmienności zrealizowanej, ale uzyskane w pracy prognozy zmienności, w porównaniu ze zmiennością dzienną, są niedoszacowane. Dlatego też nie wykorzystywano miar zmienności zrealizowanej, które powstają w wyniku przeskalowania miary  $RV$ <sup>3</sup>.

Natomiast wybór zwrotów pięciominutowych wynika z ogólnie przyjętej praktyki. Z teoretycznego punktu widzenia należałoby stosować zwroty obserwowane w możliwie najkrótszych odstępach czasu. Jednak duża częstość obserwacji wiąże się z możliwością zafałszowania oszacowań zmienności w związku z efektami mikrostruktury rynku<sup>4</sup>. Problem wyboru optymalnej częstotliwości jest otwarty – winna ona być dostosowana do płynności i wpływu aktywności animatorów rynku. Panuje jedynie przekonanie, że nie powinno się wykorzystywać zwrotów wyliczanych częściej niż 5 minut i rzadziej niż co godzinę.

Przy ocenie jakości prognoz uwzględnione zostały następujące błędy<sup>5</sup>:

- błąd średniokwadratowy (MSE),
- medianowy błąd kwadratowy (MedSE),
- błąd średni (ME),
- średni błąd bezwzględny (MAE),
- pierwiastek błędu średniokresowego (RMSE),
- współczynnik rozbieżności Theila (TIC),
- średni bezwzględny błąd procentowy (MAPE),
- logarytmiczna funkcja straty  $LL(F)$ ,
- skorygowany średni bezwzględny błąd procentowy (AMAPE).

---

<sup>2</sup> Na polskim rynku finansowym szum jest potęgowany przez napływ dużej ilości informacji gospodarczych, które pojawiają się po zamknięciu GPW (por. Doman M., Doman R. [2004], *Ekonometryczne...* op. cit., s. 182)

<sup>3</sup> por. Martens M. [2002], *Measuring and forecasting S&P 500 index-futures volatility using high-frequency data*, Journal of Futures Markets 22 (2002), ss. 497-518,

Hol E., Koopman S.J. [2002], *Stock Index Volatility Forecasting with High Frequency Data*, Tinbergen Institute Discussion Paper 2002-068/4,

Hol E., Jungbacker B., Koopman S.J. [2004], *Forecasting Daily Variability of the S&P 100 Stock Index using Historical, Realised and Implied Volatility Measurements*, Tinbergen Institute Discussion Paper 2004-016/4

<sup>4</sup> Pod pojęciem efektów mikrostruktury rynku kryją się problemy związane z analizą danych wysokiej częstotliwości dotyczące płynności, zmienności cen, kosztów i zysków transakcyjnych, intensywności procesu napływu informacji, asymetrii informacji, itp., por. Doman M., Doman R. [2004], *Ekonometryczne...* op.cit., ss. 205-210

<sup>5</sup> Definicje użytych błędów można znaleźć w dodatku 2

Dla wszystkich analizowanych szeregów tworzony był ranking według następującej procedury. Dla każdego błędu tworzono oddzielną klasyfikację - najlepszy model uzyskiwał  $k$  pkt., najgorszy 1 pkt., gdzie  $k$  oznacza liczbę modeli o istotnych parametrach dla danego szeregu. Następnie sumowano punkty z rankingów dla poszczególnych błędów. W tabeli 5.3 przedstawiono uporządkowanie estymowanych modeli ze względu na punkty przydzielone według powyższej procedury.

Najlepszym modelem, ze względu na generowane prognozy, niemal dla wszystkich szeregów okazał się wykładniczy model GARCH. Dla WIG20 i KGH był to EGARCH(1,1) odpowiednio z rozkładem GED i z rozkładem Studenta. Z kolei dla PEO najlepsze prognozy generował EGARCH(2,1) z rozkładem normalnym, dla PKM AR(1)-EGARCH(2,1) z rozkładem Studenta, natomiast dla szeregu TPS - EGARCH(0,2) z rozkładem Studenta. Wyjątek stanowił szereg PKN, dla którego najlepsze prognozy uzyskano z modelu APARCH(1,1) z rozkładem GED. Analogicznie do procedury wyboru modelu ze względu na kryterium informacyjne, pominięto modele z rozkładem błędu Studenta (symetrycznym i skośnym), biorąc pierwszy w kolejności model, dla którego wartość oczekiwana zwrotu prostego istnieje. Zatem dla szeregu KGH wybrano AR(1)-GARCH(1,1) z rozkładem normalnym (trzeci w rankingu), a dla szeregu TPS również trzeci w rankingu model EGARCH(0,2) z rozkładem GED. Natomiast dla PKM pierwszym akceptowalnym modelem był dopiero piąty w rankingu model AR(1)-EGARCH(1,1) z rozkładem normalnym. Parametry modeli GARCH, wraz z błędami standardowymi, ostatecznie wybranych do wyceny opcji zamieszczono w tabelach 5.4-5.9.

Warto zaznaczyć, że modele prostsze generowały gorsze prognozy, niż modele bardziej złożone. Ponadto jakość prognoz, nawet dla najlepszych w rankingu modeli, nie jest najwyższa. Na rysunkach 5.1-5.6 zamieszczono wykresy prognoz zmienności na tle zmienności zrealizowanej. Widać na nich, że prognozy w porównaniu ze zmiennością zrealizowaną są niedoszacowane (zwłaszcza w drugiej części analizowanego okresu)<sup>6</sup>. Duży wzrost zmienności, który nastąpił między 55 a 60 obserwacją (co odpowiada okresowi pomiędzy 18 maja 2006 a 26 maja 2006) oraz między obserwacjami 70 i 76 (czyli pomiędzy 8 czerwca 2006 i 18 czerwca 2006) znalazł odzwierciedlenie w prognozach jedynie w przypadku szeregu KGH i TPS. Wspomniany wzrost zmienności był związany z dużą korektą notowań na GPW w Warszawie.

---

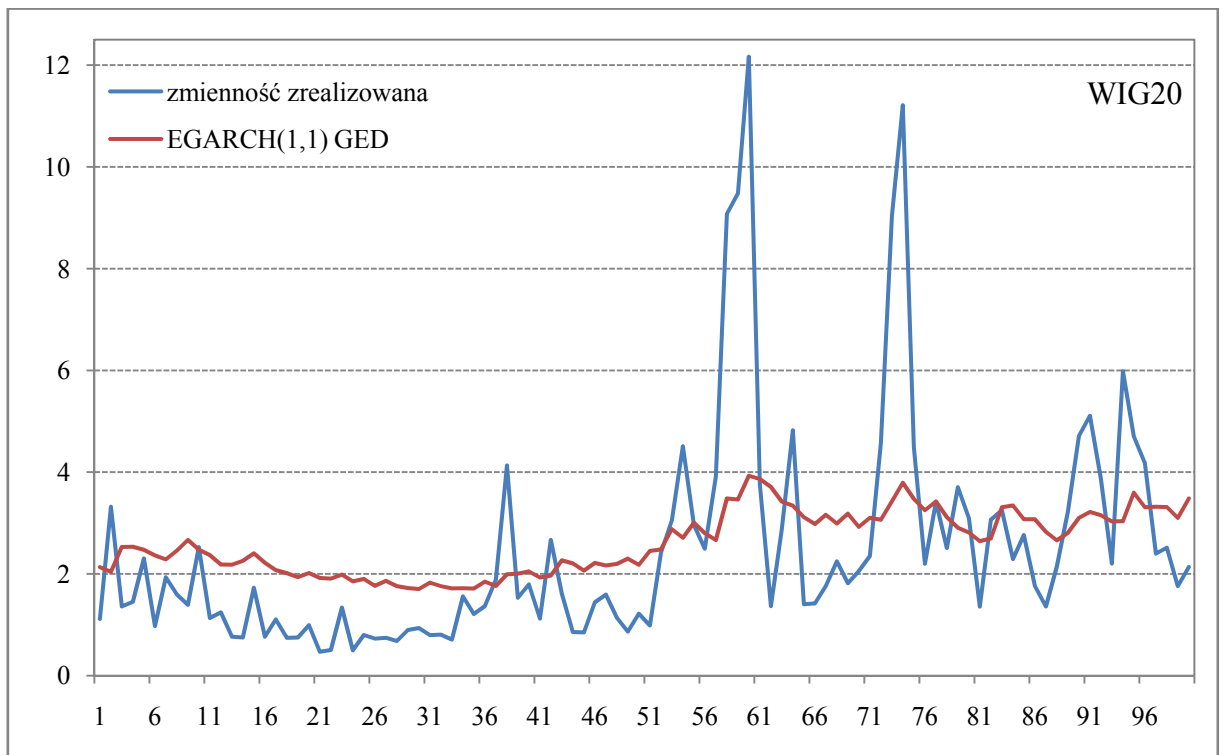
<sup>6</sup> Interesujący jest fakt, że podobne badanie przeprowadzone dla szeregu WIG20 o dwukrotnie większej długości umożliwiło uzyskanie prognozy znacznie lepszej jakości, por. Bartkowiak M. [2008], *Zastosowanie modeli GARCH do wyceny opcji na WIG20*, w: Welfe A. [red.], *Metody ilościowe w naukach ekonomicznych* 8, Wydawnictwo SGH, Warszawa, ss. 31-53

Tabela 5.3. Ranking estymowanych modeli GARCH ze względu na jakość prognoz.

<b>WIG20</b>		<b>KGH</b>		<b>PEO</b>	
model	pkt.	model	pkt.	model	pkt.
1. EGARCH(1,1) GED	126	1. EGARCH(1,1) Studenta	83	1. EGARCH(2,1) normalny	77
2. AR(1)-EGARCH(1,1) Studenta	123	2. AR(1)-EGARCH(1,1) Studenta	79	2. EGARCH(2,1) Studenta	73
3. EGARCH(1,1) normalny	123	3. AR(1)-GARCH(1,1) normalny	70	3. EGARCH(2,1) skośny Studenta	61
4. EGARCH(1,1) Studenta	120	4. AR(1)-APARCH(1,1) normalny	69	4. EGARCH(2,1) GED	59
5. AR(1)-GARCH(1,1) normalny	105	5. APARCH(1,1) normalny	68	5. APARCH(2,1) normalny	42
6. APARCH(1,1) normalny	83	6. AR(1)-APARCH(1,1) Studenta	65	6. EGARCH(1,1) Studenta	37
7. APARCH(1,1) GED	81	7. GARCH(1,1) normalny	63	7. EGARCH(1,1) skośny Studenta	28
8. AR(1)-GARCH(1,1) skośny Studenta	77	8. AR(1)-GARCH(1,1) Studenta	58	8. EGARCH(1,1) GED	19
9. AR(1)-EGARCH(1,1) normalny	77	9. EGARCH(1,1) normalny	42	9. EGARCH(1,1) normalny	9
10. GARCH(1,1) GED	74	10. GARCH(1,1) Studenta	39		
...	...	11. AR(1)-EGARCH(1,1) normalny	38		
15. GARCH(1,1) Studenta	47	12. APARCH(1,1) Studenta	28		
16. AR(1)-APARCH(1,1) normalny	44				
17. AR(1)-APARCH(1,1) Studenta	28				
<b>PKM</b>		<b>PKN</b>		<b>TPS</b>	
model	pkt.	model	pkt.	model	pkt.
1. AR(1)-EGARCH(2,1) Studenta	171	1. APARCH(1,1) GED	57	1. EGARCH(0,2) Studenta	369
2. EGARCH(2,1) Studenta	163	2. APARCH(1,1) Studenta	56	2. EGARCH(0,2) skośny Studenta	356
3. AR(1)-EGARCH(1,1) Studenta	162	3. APARCH(1,1) normalny	50	3. EGARCH(0,2) GED	345
4. EGARCH(1,1) Studenta	154	4. EGARCH(1,1) Studenta	49	4. EGARCH(0,2) normalny	320
5. AR(1)-EGARCH(1,1) normalny	139	5. EGARCH(1,1) GED	42	5. EGARCH(0,3) Studenta	308
6. AR(1)-EGARCH(2,1) normalny	138	6. GARCH(1,1) Studenta	41	6. APARCH(0,2) skośny Studenta	305
7. EGARCH(2,1) GED	130	7. GARCH(1,1) GED	40	7. GARCH(0,2) Studenta	302
8. EGARCH(1,1) GED	119	8. EGARCH(1,1) normalny	35	8. APARCH(0,2) Studenta	297
9. EGARCH(2,1) normalny	112	9. GARCH(1,1) normalny	35	9. EGARCH(0,3) skośny Studenta	297
10. EGARCH(1,1) normalny	107			10. APARCH(0,2) GED	294
...	...			...	...
18. APARCH(1,1) normalny	35			40. GARCH(1,1) GED	44
19. GARCH(1,1) GED	25			41. APARCH(1,1) normalny	41
20. APARCH(1,1) GED	15			42. GARCH(1,1) normalny	40

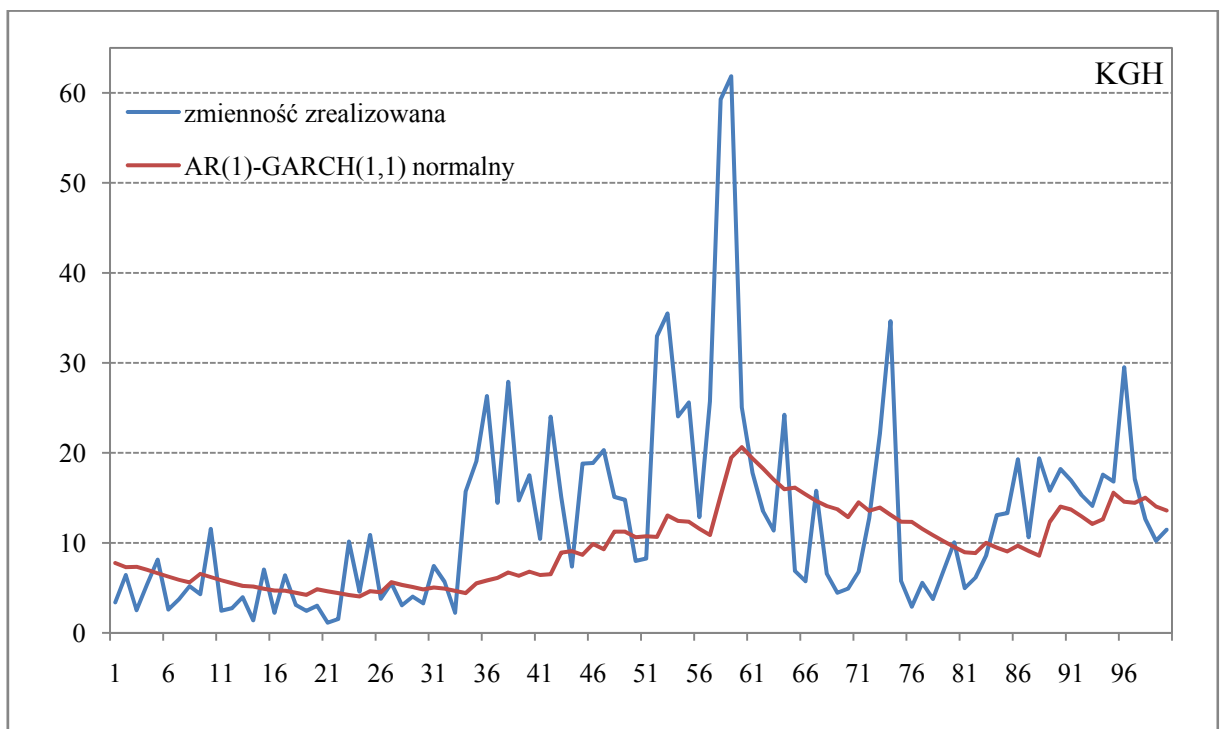
Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.1. Prognoza zmienności indeksu WIG20 uzyskana z modelu GARCH na tle zmienności zrealizowanej.



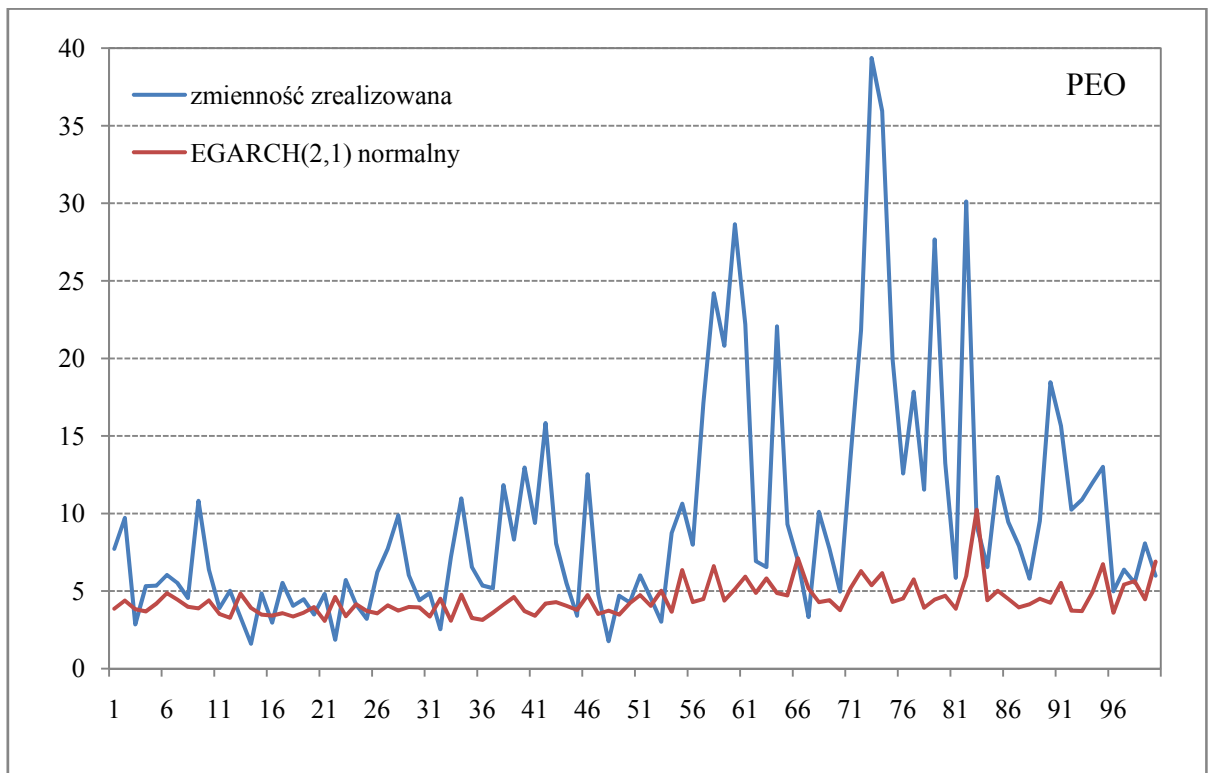
Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.2. Prognoza zmienności spółki KGH uzyskana z modelu GARCH na tle zmienności zrealizowanej.



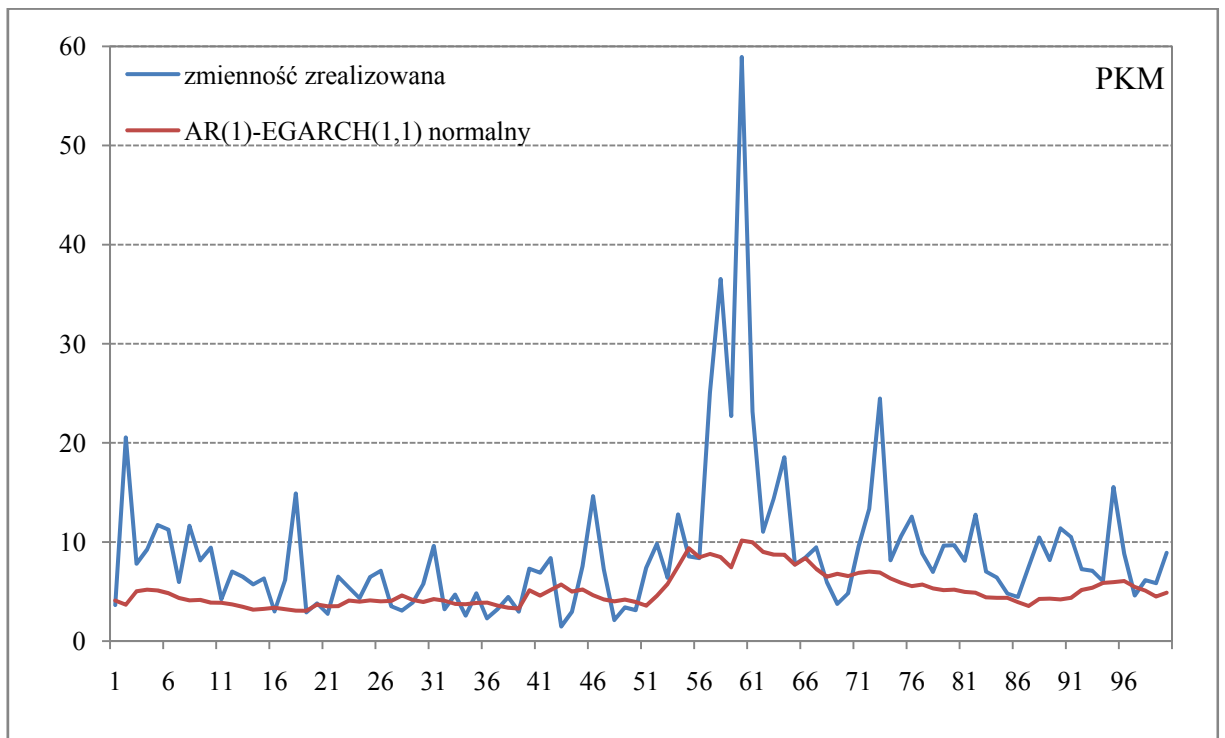
Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.3. Prognoza zmienności spółki PEO uzyskana z modelu GARCH na tle zmienności zrealizowanej.



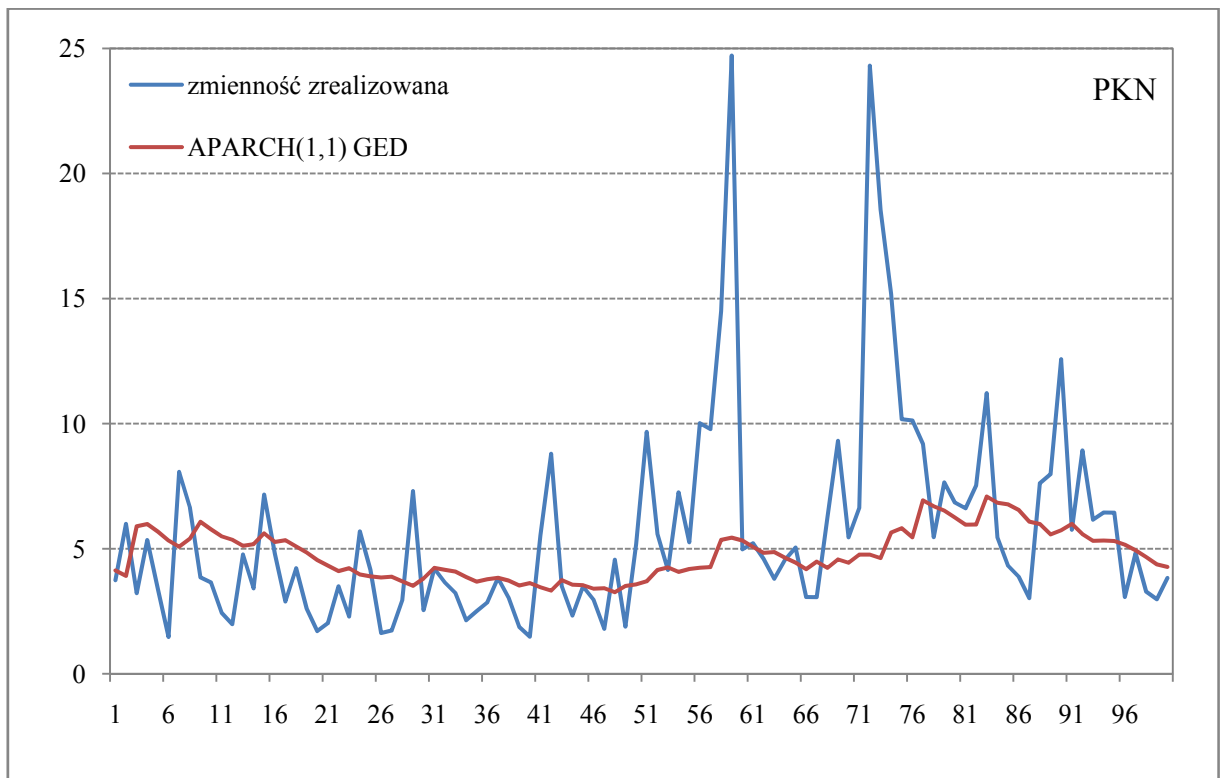
Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.4. Prognoza zmienności spółki PKM uzyskana z modelu GARCH na tle zmienności zrealizowanej.



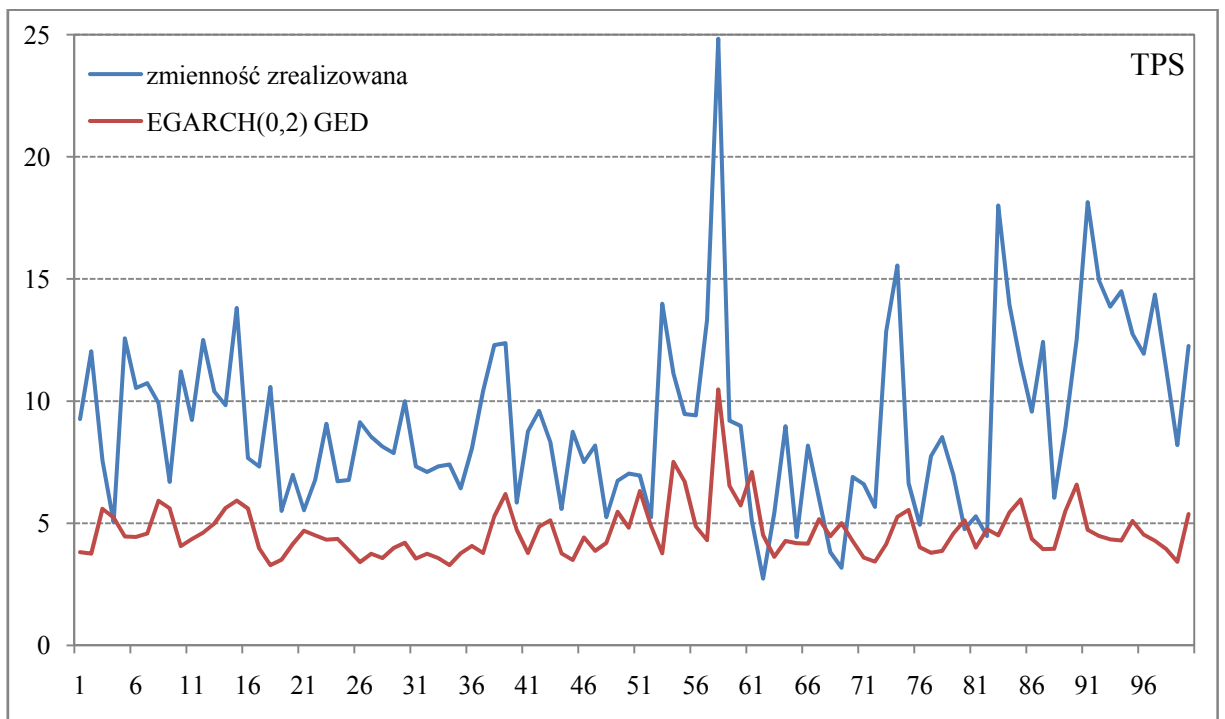
Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.5. Prognoza zmienności spółki PKN uzyskana z modelu GARCH na tle zmienności zrealizowanej.



Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.6. Prognoza zmienności spółki TPS uzyskana z modelu GARCH na tle zmienności zrealizowanej.



Źródło: Opracowanie własne



Tabela 5.4. Parametry modeli GARCH wykorzystanych do wyceny opcji na WIG20.

parametry	$\omega$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\nu$
GARCH(1,1) GED	0,37175 (0,01494)	0,04107 (0,00858)	0,95180 (0,00950)	1,44749 (0,0772)
EGARCH(1,1) GED	1,09494 (0,4162)	0,10708 (0,02167)	0,95606 (0,03923)	1,38992 (0,0728)

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 5.5. Parametry modeli wykorzystanych do wyceny opcji na KGH.

parametry	$\omega$	$\alpha_1$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\delta$	$\nu$
GARCH(1,1) GED	1,517356 (0,06032)	-	0,05063 (0,01560)	0,93523 (0,02249)	-	1,44059 (0,0,0781)
AR(1)-APARCH(1,1) normalny	1,968633 (0,2163)	0,05165 (0,0275)	0,05615 (0,01578)	0,92105 (0,02244)	1,9397 (0,2876)	-

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 5.6. Parametry modeli wykorzystanych do wyceny opcji na PEO.

parametry	$\omega$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\nu$
EGARCH(2,1) GED	0,26708 (0,21950)	0,29093 (0,06390)	0,73831 (0,06168)	0,19009 (0,06204)	1,48596 (0,11470)
EGARCH(2,1) normalny	0,3099 (0,21419)	0,29167 (0,06614)	0,74078 (0,06324)	0,19182 (0,06418)	-

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 5.7. Parametry modeli wykorzystanych do wyceny opcji na PKM.

parametry	$\omega$	AR(1)	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\nu$
GARCH(1,1) GED	1,52473 (0,03901)	-	0,05199 (0,02194)	0,92877 (0,03284)	1,32435 (0,0797)
AR(1)-EGARCH(1,1) normalny	0,3856 (0,35416)	0,06151 (0,02939)	0,0907 (0,0158)	0,8901 (0,0273)	-

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 5.8. Parametry modeli wykorzystanych do wyceny opcji na PKN.

parametry	$\omega$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\delta$	$\nu$
EGARCH(1,1) GED	0,3304 (0,3308)	0,09620 (0,02678)	0,93984 (0,01623)	-	1,57922 (0,0919)
APARCH(1,1) GED	1,0165 (0,2529)	0,04914 (0,0154)	0,92887 (0,03172)	1,29883 (0,3887)	1,57597 (0,0921)

Źródło: Opracowanie własne.

Tabela 5.9. Parametry modeli wykorzystanych do wyceny opcji na TPS.

parametry	$\omega$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_1$	$\nu$
GARCH(1,1) GED	0,93677 (0,02686)	0,05458 (0,01496)	-	0,93258 (0,01925)	1,57135 (0,0988)
EGARCH(0,2) GED	1,1957 (0,0804)	0,17554 (0,04837)	0,25561 (0,06787)	-	1,37357 (0,0914)

Źródło: Opracowanie własne.

W analogiczny sposób do wyboru modeli GARCH dokonano selekcji modeli przełącznikowych. Dla każdego szeregu estymowano około 16 modeli – brano pod uwagę przełączenia średniej, wariancji oraz obu tych parametrów jednocześnie, przy różnych rozkładach błędów. Ponadto estymacje przeprowadzono dla 2 i 3 reżimów. Tabela 5.10 zawiera listę modeli przełącznikowych o istotnych parametrach wraz kryterium informacyjnym Schwarz. W modelach o 3 stanach reżimy były bardzo niestabilne – prawdopodobieństwa przejścia pomiędzy poszczególnymi stanami były wysokie. Ponadto błędy standardowe dla estymowanych parametrów przekraczały ich wartości. Ostatecznie dla szeregu WIG20 i PKN udało się wyestymować jedynie dwa modele przełącznikowe – z przełączeniami wariancji i z rozkładem błędu Studenta oraz normalnym. Z kolei dla szeregu KGH i PEO, oprócz dwóch wymienionych wyżej modeli, istotne parametry miał również model z przełączeniami wariancji i rozkładem błędu skośnym Studenta. Modele z przełączeniami średniej wariancji pojawiły się jedynie przy szeregach PKM i TPS. Podobnie jak dla modeli GARCH największy zbiór modeli przełącznikowych o istotnych parametrach uzyskano dla szeregu TPS. Co ciekawe, w tabeli 5.10 nie ma modelu z uogólnionym rozkładem błędu.

Najlepiej dopasowanymi modelami ze względu na kryterium informacyjne były modele z przełączeniami wariancji i rozkładami błędu: normalnym (dla szeregu WIG20, PEO, TPS) i Studenta (dla szeregu PKM oraz PKN). Tylko dla szeregu KGH największą wartość kryterium *BIC* miał model z rozkładem błędu skośnym Studenta. Różnice pomiędzy wartościami kryterium informacyjnego są niewielkie – niemal dla wszystkich szeregów są mniejsze 0,5%, jedynie dla WIG20 różnica przekracza 1%.

Ranking modeli ze względu na jakość prognoz przedstawia tabela 5.11. Dla szeregu WIG20 i PKM modele najlepiej dopasowane generowały prognozy o najlepszej jakości. Dla szeregu KGH i PKN najlepsze prognozy uzyskano z modelu z przełączeniami wariancji i normalnym rozkładem błędu, natomiast dla PEO był to taki sam model z rozkładem błędu Studenta. Na tym tle znów wyróżnia się szereg TPS, dla którego najwięcej punktów w rankingu zdobył model najbardziej złożony – z przełączeniami średniej i wariancji oraz rozkładem błędu skośnym Studenta. Wykresy prognoz zmienności na tle zmienności zrealizowanej zamieszczono na rysunkach 5.7-5.12. Prognozy, które uzyskano są jeszcze gorsze niż w przypadku modeli GARCH. Dla większości szeregów są one niedoszacowane, tylko w przypadku WIG20 dla początkowych obserwacji prognoza jest przeszacowana.

Tabela 5.10. Lista modeli przełącznikowych o istotnych parametrach wraz z wartościami kryterium informacyjnego Schwarzera.

<b>WIG20</b>			<b>KGH</b>			<b>PEO</b>		
<b>model</b>			<b>model</b>			<b>model</b>		
przełączenia	rozkład	BIC	przełączenia	rozkład	BIC	przełączenia	rozkład	BIC
1.wariancja 2.wariancja	normalny Studenta	-2523,23 -2553,74	1. wariancja 2. wariancja 3. wariancja	skośny Studenta Studenta normalny	-3289,48 -3290,66 -3291,55	1. wariancja 2. wariancja 3. wariancja	normalny Studenta skośny Studenta	-2971,13 -2973,03 -2975,47
<b>PKM</b>			<b>PKN</b>			<b>TPS</b>		
<b>model</b>			<b>model</b>			<b>model</b>		
przełączenia	rozkład	BIC	przełączenia	rozkład	BIC	przełączenia	rozkład	BIC
1.wariancja 2.średnia i wariancja 3.wariancja 4.średnia i wariancja 5.średnia i wariancja	Studenta Studenta normalny skośny Studenta normalny	-3201,49 -3206,46 -3207,32 -3208,97 -3213,21	1. wariancja 2. wariancja	Studenta normalny	-2923,05 -2923,68	1. wariancja 2. wariancja 3. wariancja 4. średnia i wariancja 5. średnia i wariancja 6. średnia i wariancja	normalny skośny Studenta Studenta normalny skośny Studenta Studenta	-3057,39 -3058,46 -3060,16 -3063,22 -3063,33 -3066,03

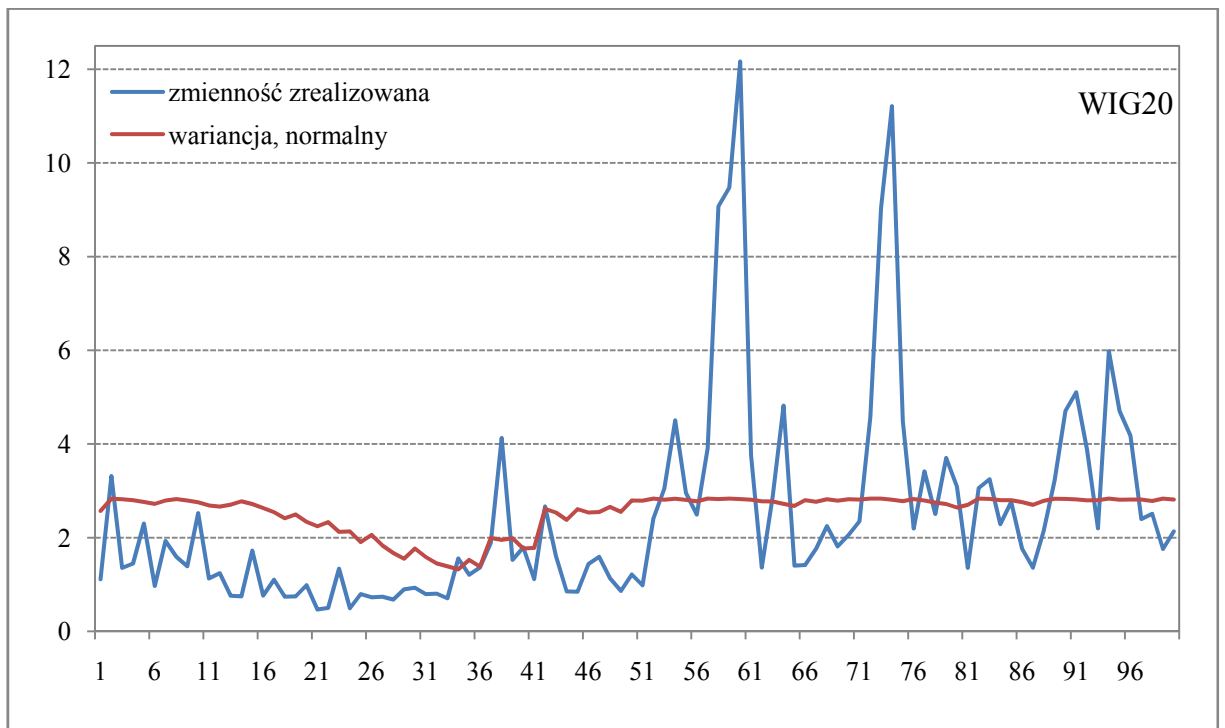
Źródło: Opracowanie własne

Tabela 5.11. Ranking estymowanych modeli przełącznikowych ze względu na jakość prognoz.

WIG20			KGH			PEO		
model			model			model		
przełączenia	rozkład	pkt.	przełączenia	rozkład	pkt.	przełączenia	rozkład	pkt.
1.wariancja	normalny	15	1. wariancja	normalny	27	1. wariancja	Studenta	23
2.wariancja	Studenta	12	2. wariancja	Studenta	16	2. wariancja	skośny Studenta	19
			3. wariancja	skośny Studenta	11	3. wariancja	normalny	12
PKM			PKN			TPS		
model			model			model		
przełączenia	rozkład	pkt.	przełączenia	rozkład	pkt.	przełączenia	rozkład	pkt.
1.wariancja	Studenta	45	1. wariancja	normalny	18	1. średnia i wariancja	skośny Studenta	53
2.średnia i wariancja	Studenta	33	2. wariancja	Studenta	9	2. wariancja	skośny Studenta	45
3. średnia i wariancja	skośny Studenta	28				3. średnia i wariancja	Studenta	36
4. średnia i wariancja	normalny	15				4. wariancja	Studenta	25
5. wariancja	normalny	14				5. średnia i wariancja	normalny	21
						6. wariancja	normalny	9

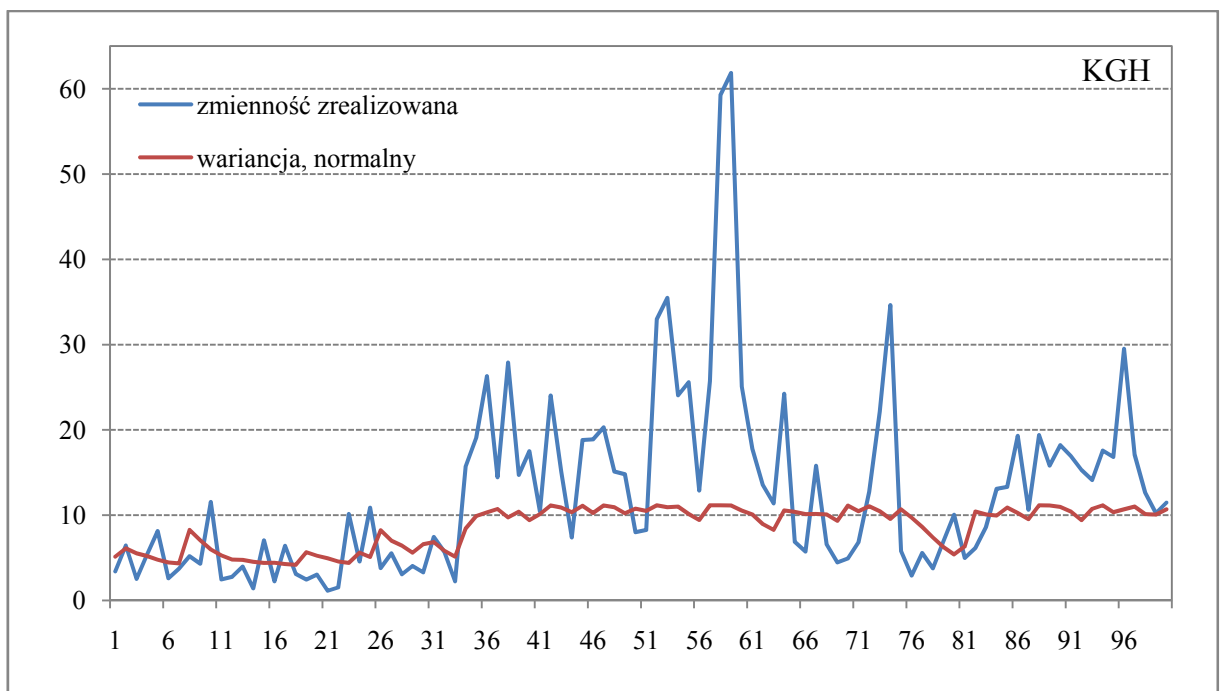
Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.7. Prognoza zmienności indeksu WIG20 uzyskana z modelu przełącznikowego na tle zmienności zrealizowanej.



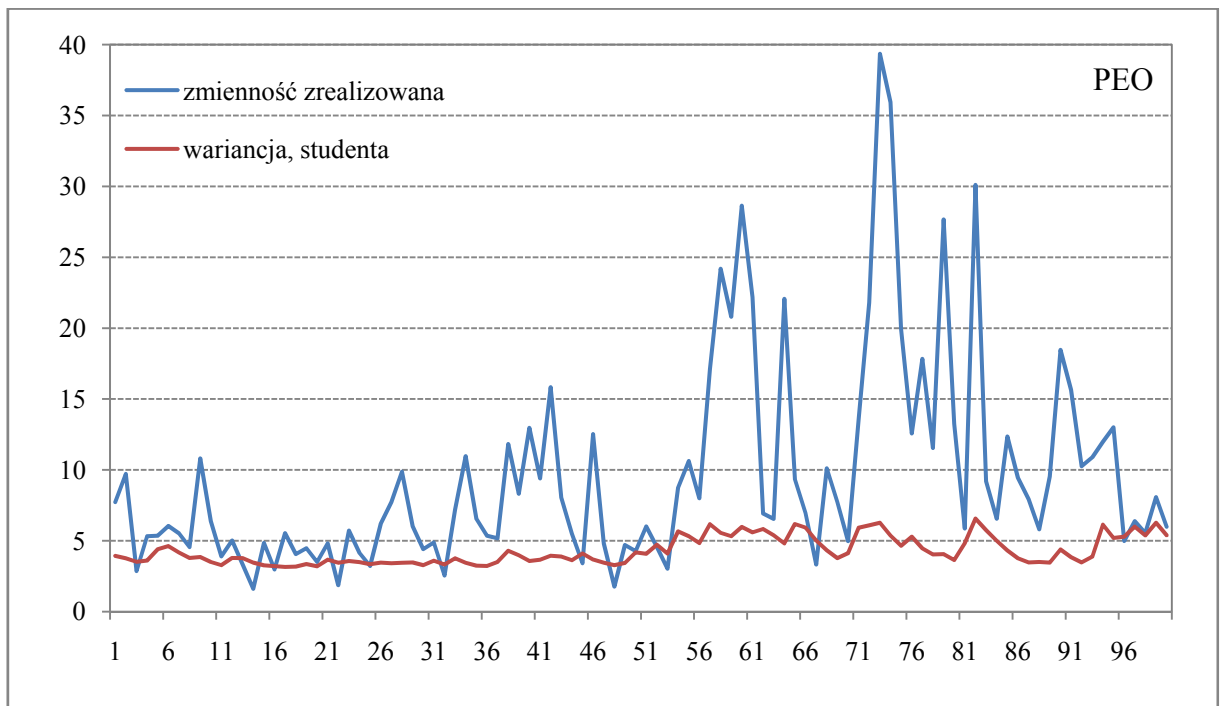
Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.8. Prognoza zmienności indeksu KGH uzyskana z modelu przełącznikowego na tle zmienności zrealizowanej.



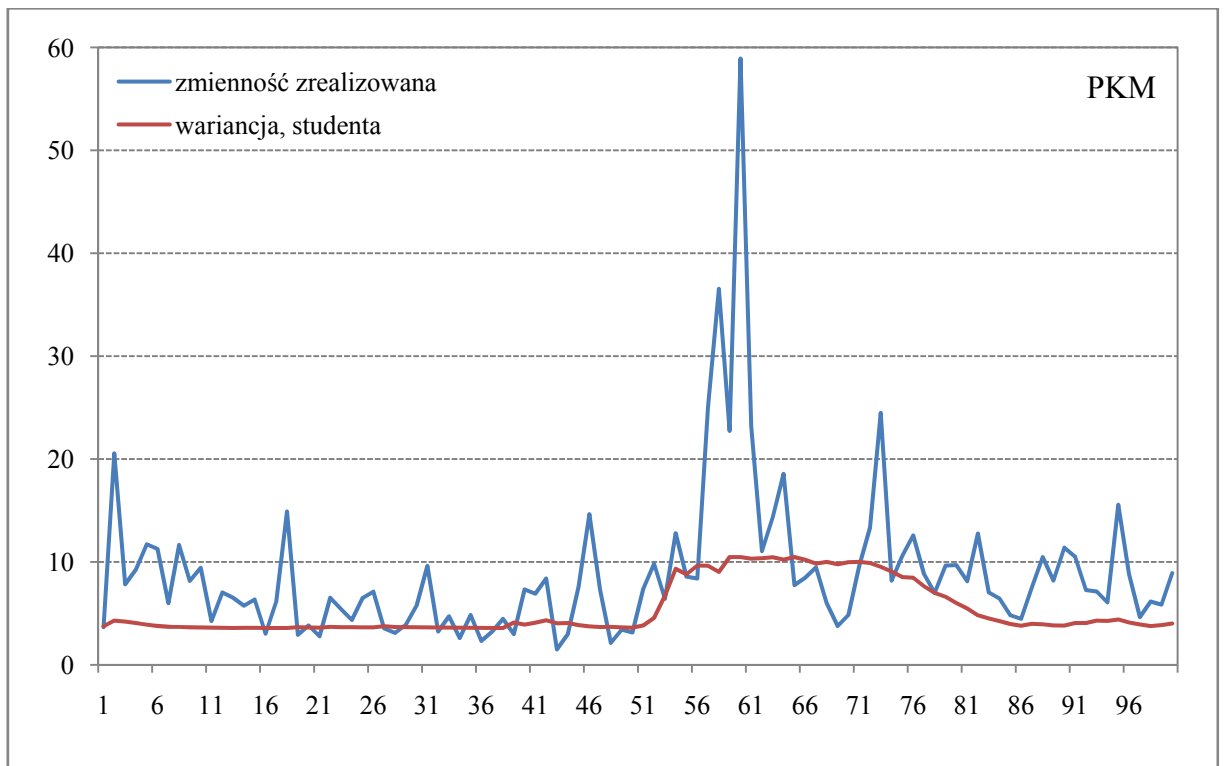
Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.9. Prognoza zmienności indeksu PEO uzyskana z modelu przełącznikowego na tle zmienności zrealizowanej.



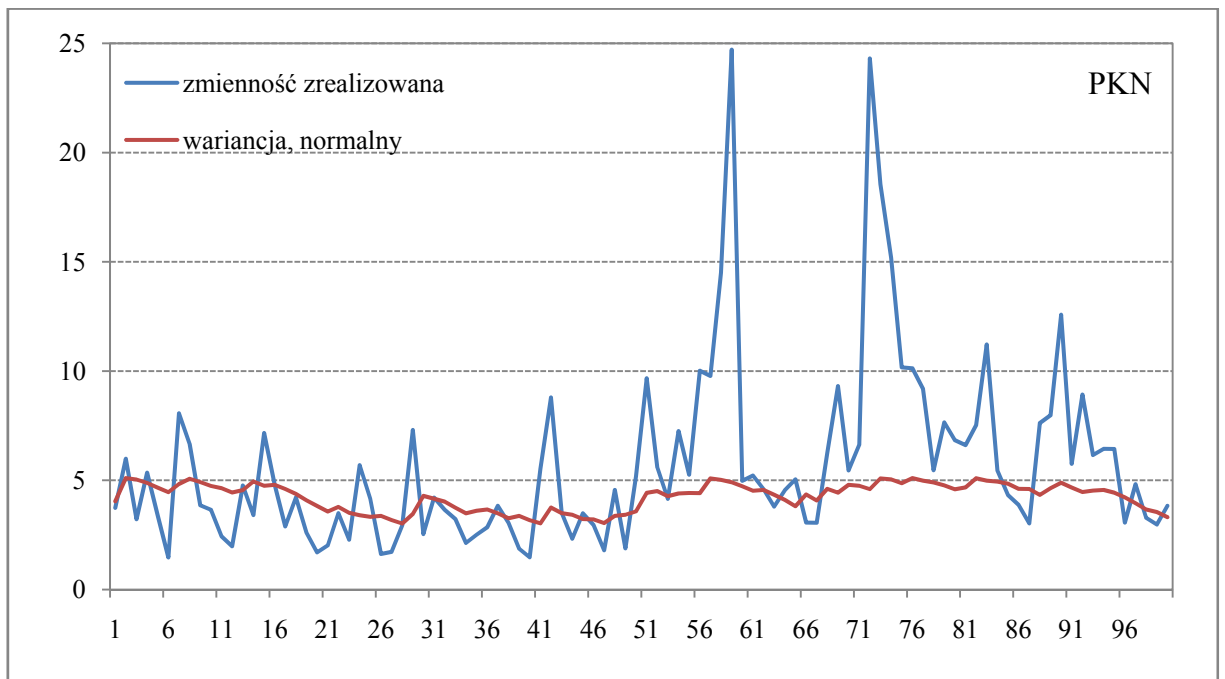
Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.10. Prognoza zmienności indeksu PKM uzyskana z modelu przełącznikowego na tle zmienności zrealizowanej.



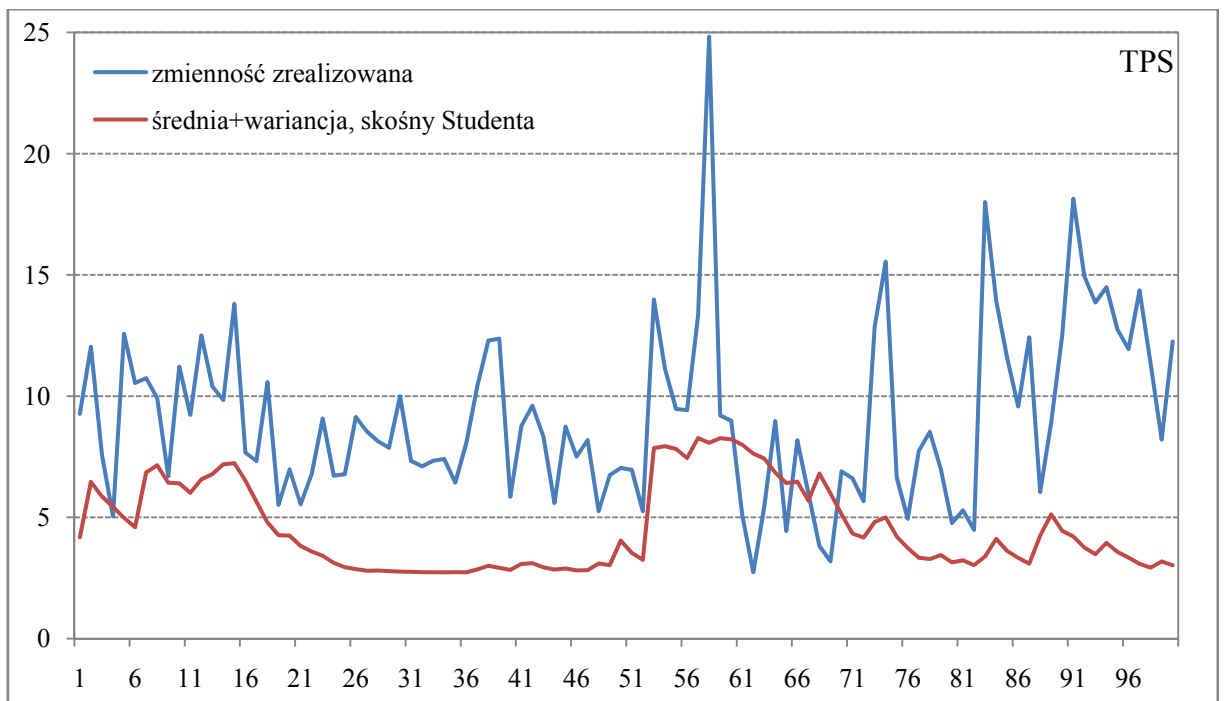
Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.11. Prognoza zmienności indeksu PKN uzyskana z modelu przełącznikowego na tle zmienności zrealizowanej.



Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.12. Prognoza zmienności indeksu TPS uzyskana z modelu przełącznikowego na tle zmienności zrealizowanej.



Źródło: Opracowanie własne

Słabe własności prognostyczne zarówno modeli GARCH i przełącznikowych są dość zaskakujące<sup>7</sup> i trudno wskazać jednoznacznie na przyczyny takiej sytuacji. Być może jest to powodem wystąpienia w okresie, dla którego generowane są prognozy, dwóch okresów dużej zmienności. Niemniej dla dłuższych szeregów, prognozy dla tego samego okresu były zdecydowanie lepsze.

Parametry modeli przełącznikowych, które wybrano do wyceny opcji zamieszczono w tabeli 5.12. Dla wszystkich szeregów reżim pierwszy charakteryzuje niższa zmienność, niemniej różnice w poziomie zmienności nie są duże, nie przekraczają 2 jednostek. Najmniejsze są dla szeregu WIG20 i PKN (dla obu rozpatrywanych modeli przełącznikowych). W jedynym modelu, w którym uwzględniane są również przełączenia średniej (estymowanym dla szeregu TPS), średnia w stanie o niższej zmienności jest bliska zeru, ale dodatnia, natomiast w stanie o większej zmienności jest ujemna. We wszystkich modelach reżimy są stabilne, to znaczy prawdopodobieństwa przejścia z jednego reżimu do drugiego mają niskie wartości. Przy czym rynek przechodzi łatwiej z fazy dużej aktywności do uspokojenia dla szeregów WIG20, KGH, PKN i TPS. Natomiast odwrotnie dla szeregów PEO, PKM. Prawdopodobieństwo znajdowania się w reżimie o niższej aktywności jest większe niż prawdopodobieństwo znajdowania się w reżimie o wyższej aktywności dla szeregów WIG20, KGH, PKN i TPS. Dla pozostałych dwóch (PEO, PKM) większe jest prawdopodobieństwo znajdowania się w fazie wysokiej aktywności. Oczekiwane czasy trwania w reżimach są z wyjątkiem szeregu PEO długie, co oznacza, że na rynku występują przede wszystkim długie okresy aktywności i uspokojenia. Na rysunkach 5.13-5.18 zamieszczono wykresy prawdopodobieństwa warunkowego pozostawania w reżimie pierwszym (niskiej aktywności), które potwierdzają, że jedynie dla szeregu PEO następują stosunkowo częste zmiany stanów.

Modele zmienności stochastycznej estymowane były tylko w jednej specyfikacji, nie było więc problemu wyboru. Wysokie wartości parametru skalującego  $\sigma$  wskazują na wysoki poziom zmienności. Z kolei duże wartości parametru  $\phi$  oznaczają silną persystencję zmienności (zwłaszcza dla szeregu WIG20 i KGH).

---

<sup>7</sup> Również w przypadku modeli przełącznikowych przeprowadzono badanie dla dwukrotnie dłuższego szeregu WIG20 uzyskując modele o znacznie lepszych własnościach prognostycznych, por. Bartkowiak M. [2007], *Zastosowanie modeli przełącznikowych do wyceny opcji na WIG20*, w: Panek E., *Kapitał ludzki i wiedza w gospodarce. Wyzwania XXI wieku*, Wydawnictwo AE Poznań, Poznań, ss. 15-27



Tabela 5.12. Parametry modeli przełącznikowych.

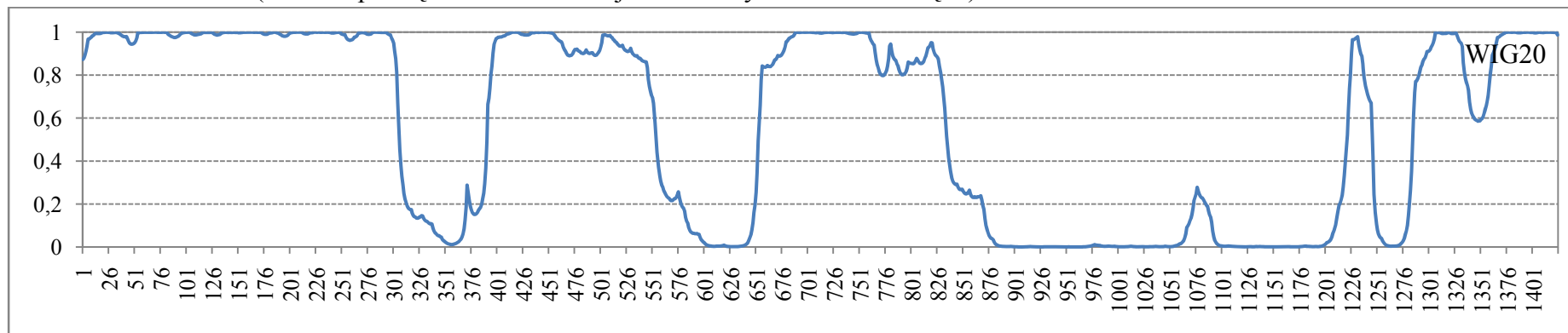
szereg rozkład	WIG20		KGH				PEO			
	normalny		skośny Studenta		normalny		normalny		Studenta	
$\sigma(1)$	1,0246 (0,1051)		2,1105 (0,1349)		1,9642 (0,0927)		1,6134 (0,1161)		1,6525 (0,1373)	
$\sigma(2)$	1,7255 (0,0966)		3,7176 (0,4025)		3,6999 (0,2938)		2,9183(0,3741)		2,7061 (0,4449)	
$\varphi_1$	0,0600 (0,0250)		0,0384 (0,0275)		0,0497 (0,0278)		0,0297 (0,0260)		0,0305 (0,0282)	
$\nu$	-		9,3486 (0,4738)		-		-		16,7251 (1,1233)	
$\xi$	-		0,8847 (0,0409)		-		-		-	
Prawdopodobieństwa przejścia										
reżim	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	0,9923	0,0077	0,9912	0,0088	0,9809	0,0191	0,8422	0,1578	0,9087	0,0913
2	0,0112	0,9888	0,0289	0,9711	0,0525	0,9475	0,0462	0,9538	0,0311	0,9689
$P(s_t = 1)$	0,5938		0,7671		0,7335		0,2266		0,2541	
$P(s_t = 2)$	0,4062		0,2328		0,2665		0,7734		0,7459	
$m(1)$	1,6839		1,3035		1,3633		4,4128		3,9347	
$m(2)$	2,4621		4,2945		3,7526		1,2930		1,3407	
$d(1)$	130,5483		114,1553		52,4109		6,3367		10,9529	
$d(2)$	89,2857		34,6500		19,0404		21,6263		32,1440	

Tabela 5.12. Parametry modeli przełącznikowych (c.d.).

szereg rozkład	PKM		PKN				TPS			
	Studenta		Studenta		normalny		normalny		Skośny Studenta	
$\mu(1)$	-	-	-	-	-	-	-	-	0,0970 (0,0621)	
$\mu(2)$	-	-	-	-	-	-	-	-	-0,2172 (0,1467)	
$\sigma(1)$	1,7978 (0,1131)		1,5830 (0,1980)		1,6275 (0,0709)		1,6275 (0,0709)		1,6262 (0,0573)	
$\sigma(2)$	3,2338 (0,1662)		2,2461 (0,4426)		2,5976 (0,3423)		2,5976 (0,3423)		2,9212 (0,1311)	
$\varphi_1$	0,0401 (0,0272)		3,5401 (0,7236)		0,0274 (0,0177)		0,0274 (0,0177)		0,0296 (0,0065)	
$\nu$	8,6283 (0,4189)		12,5316 (0,7236)		-		-		79,0637 (10,6166)	
$\xi$	-		-		-		-		1,1631 (0,0442)	
Prawdopodobieństwa przejścia										
reżim	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
1	0,9847	0,0153	0,9857	0,0143	0,9817	0,0183	0,9817	0,0183	0,9887	0,0228
2	0,0092	0,9908	0,0189	0,9811	0,0604	0,9396	0,0604	0,9396	0,0113	0,9772
$P(s_t = 1)$	0,3761		0,5686		0,7679		0,7679		0,6681	
$P(s_t = 2)$	0,6239		0,4314		0,2321		0,2321		0,3319	
$m(1)$	2,6591		1,7587		1,3023		1,3023		1,4967	
$m(2)$	1,6027		2,3180		4,3076		4,3076		3,0132	
$d(1)$	65,2316		69,8812		54,7345		54,7345		88,2613	
$d(2)$	108,2251		53,0223		16,5481		16,5481		43,8404	

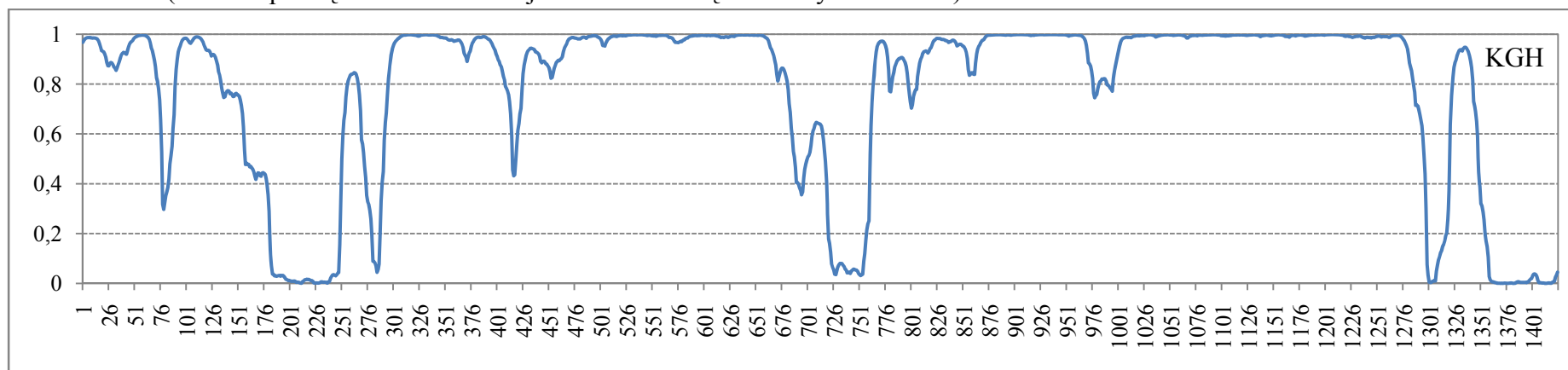
Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.13. Wyznaczone przez model przełącznikowy prawdopodobieństwa warunkowe przebywania w pierwszym reżimie dla szeregu WIG20 (model z przełączeniami wariancji i normalnym rozkładem błędu).



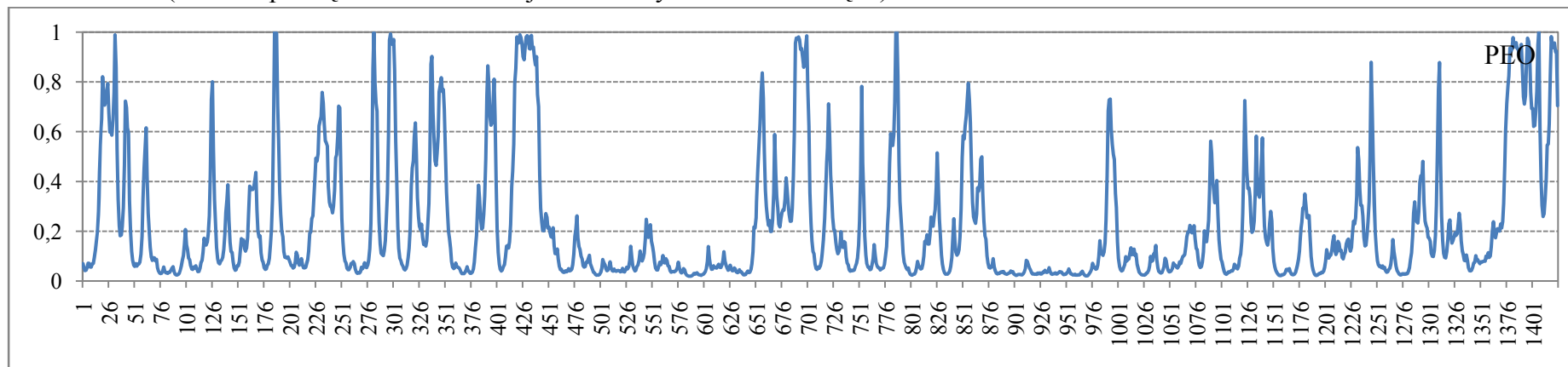
Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.14. Wyznaczone przez model przełącznikowy prawdopodobieństwa warunkowe przebywania w pierwszym reżimie dla szeregu KGH (model z przełączeniami wariancji i rozkładem błędu skośnym Studenta).



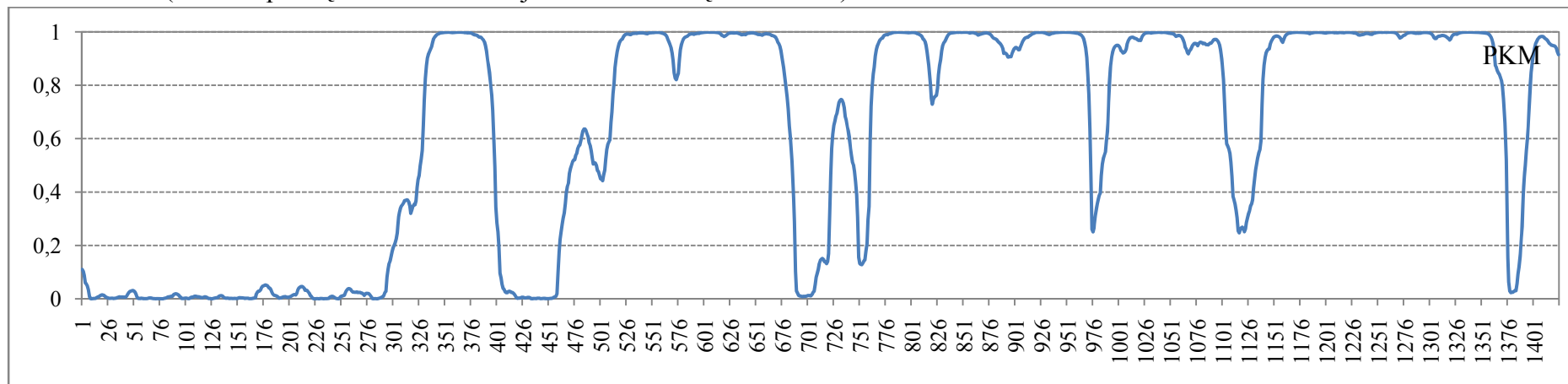
Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.15. Wyznaczone przez model przełącznikowy prawdopodobieństwa warunkowe przebywania w pierwszym reżimie dla szeregu PEO (model z przełączeniami wariancji i normalnym rozkładem błędu).



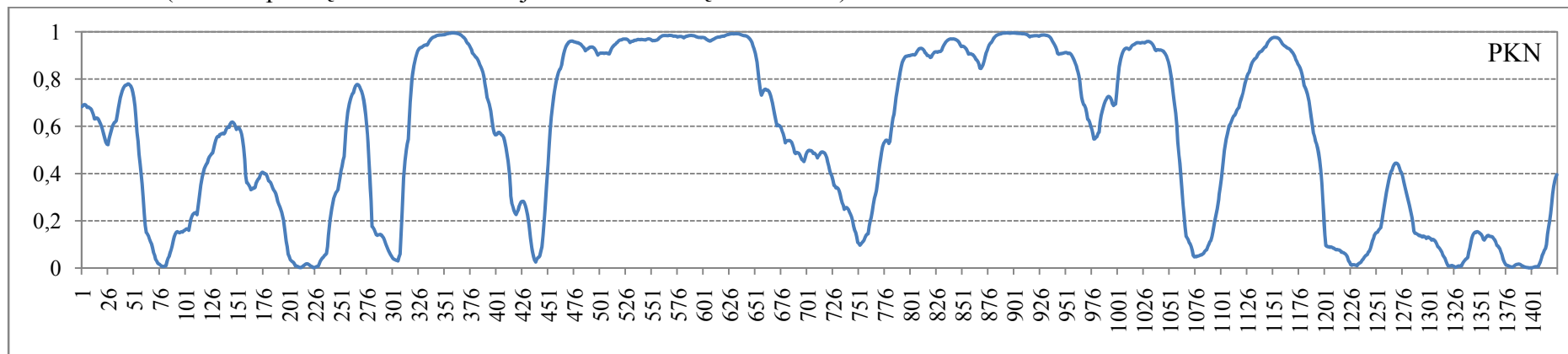
Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.16. Wyznaczone przez model przełącznikowy prawdopodobieństwa warunkowe przebywania w pierwszym reżimie dla szeregu PKM (model z przełączeniami wariancji i rozkładem błędu Studenta).



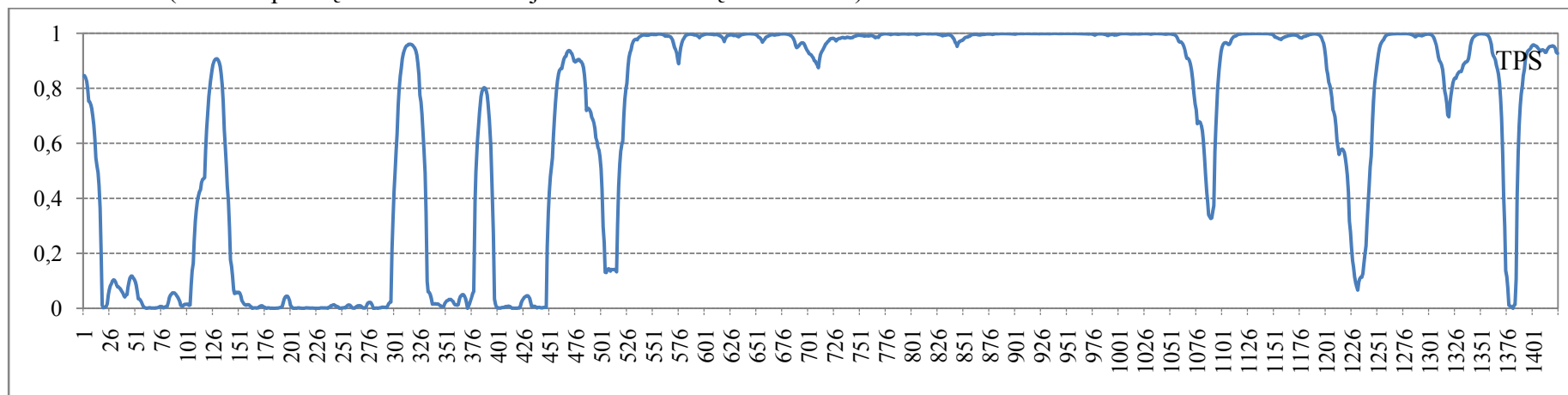
Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.17. Wyznaczone przez model przełącznikowy prawdopodobieństwa warunkowe przebywania w pierwszym reżimie dla szeregu PKN (model z przełączeniami wariancji i rozkładem błędu Studenta).



Źródło: Opracowanie własne

Rysunek 5.18. Wyznaczone przez model przełącznikowy prawdopodobieństwa warunkowe przebywania w pierwszym reżimie dla szeregu TPS (model z przełączeniami wariancji i rozkładem błędu Studenta).



Źródło: Opracowanie własne

Tabela 5.13. Parametry modeli zmienności stochastycznej

parametry	Szereg		
	WIG20	KGH	PEO
$\phi$	0,9909 (0,9728;0,9970)	0,9722 (0,9553;0,9828)	0,7851 (0,6776;0,8640)
$\sigma_{\eta}$	0,0055 (0,0023; 0,0134)	0,0186 (0,0101;0,0339)	0,1143 (0,0655;0,1995)
$\sigma$	2,0018 (1,3260;3,0221)	5,4838 (4,1618;7,2257)	3,3219 (2,9569;3,7319)
	PKM	PKN	TPS
$\phi$	0,9545 (0,9201;0,9745)	0,9441 (0,9091;0,9661)	0,9069 (0,8740;0,9230)
$\sigma_{\eta}$	0,0361 (0,0169;0,0772)	0,0218 (0,0112;0,0423)	0,1501 (0,0268;0,4511)
$\sigma$	4,7277 (3,7710;5,9272)	3,2521 (2,7823;3,8014)	5,0421 (3,2310;7,1551)

Źródło: Opracowanie własne

## 5.2 Wycena opcji w oparciu o modele zmienności

Po wyborze modeli zmienności wyceniono opcje kupna na indeks WIG20 i porównano je z ceną uzyskaną z modelu Blacka-Scholesa. Cena ta jest wyznaczana przez Krajowy Depozyt Papierów Wartościowych i podawana przez GPW w Warszawie jako Teoretyczny Kurs Otwarcia (TKO).

W przypadku modeli GARCH nie jest możliwe wyznaczenie w sposób analityczny granicznych parametrów rozkładu cen instrumentu bazowego, zatem wycena oparta jest na procedurze Monte Carlo i przebiega według algorytmu:

- 1) Estymacja parametrów procesu stóp zwrotu względem miary  $\mathbf{P}$ .
- 2) Wygenerowanie  $m$  trajektorii szeregu cen instrumentu bazowego względem miary  $\mathbf{Q}$  (cenę instrumentu bazowego  $S_T$  w chwili  $T$  można wyznaczyć z równania pierwszego dla miary  $\mathbf{Q}$  (3.22)).
- 3) Wycena europejskiej opcji kupna.

Podstawiając do wzoru (3.22) funkcję wypłaty europejskiej opcji kupna (1.1) otrzymujemy wzór na cenę europejskiej opcji kupna:

$$c_t = \exp[-r(T-t)]E^{\mathbf{Q}}[\max\{S_T - K, 0\} | \mathcal{F}_{t-1}], \quad (5.1)$$

który symulujemy następująco:

$$c_t = \exp[-r(T-t)] \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [\max(S_{T,i} - K, 0)] \quad (5.2)$$

Dla modeli przełącznikowych korzystano z formuły 3.28. Natomiast dla modeli zmienności stochastycznej, znając parametry modelu zmienności stochastycznej, można dokonać wyceny opcji korzystając ze wzoru (3.40). Wybrano model Hulla i White'a

ponieważ badania przeprowadzone przez innych autorów<sup>8</sup> wskazują, że stochastyczna stopa procentowa ma niewielki wpływ na ceny opcji. Jest to związane z niewielką, bo bliską zero, zmiennością stopy procentowej. Ponadto zdecydowano się wykorzystać w pracy właśnie ten model, by porównać wyceny opcji uzyskane z modeli GARCH i przełącznikowych z pierwszym historycznie modelem wyceny opartym o modelowanie zmienności. W symulacjach dla modeli GARCH i SV generowano po 10 000 trajektorii.

Tabela 5.14-5.19 zawiera wyceny opcji kupna o różnych cenach wykonania i terminie wygaśnięcia 15 września 2006. Wyceny dokonano na dzień 21 lipca 2006. Błędy wyceny zostały podane w nawiasach. Rzeczywiste wartości opcji (uzyskane *ex post* jako zdyskontowana wartość funkcji wypłaty) na ogół znacznie się różnią od ceny teoretycznej wyliczonej z modelu Blacka-Scholesa. Podobnie rzecz ma się z cenami uzyskanymi z wykorzystaniem modeli GARCH, niemniej są one niższe niż uzyskane z modelu  $\mathcal{M}^{BS}$ . Modele GARCH i  $\mathcal{M}^{BS}$  dają zbliżone ceny w przypadku opcji in-the-money. Dla opcji at-the-money i out-of-the-money ceny z modeli GARCH są niższe niż wartości teoretyczne. Trudno jednoznacznie jest wskazać, który z modeli ma przewagę dla danego instrumentu bazowego, czy najlepszy ze względu na kryterium informacyjne, czy najlepszy ze względu na jakość prognoz. Nie można też odpowiedzieć na pytanie, czy uwzględnienie innych rozkładów niż normalny poprawia wyceny. Do wyceny przy użyciu modeli GARCH zostały wybrane głównie rozkłady GED, niemniej wyceny z modeli z rozkładem normalnym nie różnią się bardzo. Natomiast można zauważyć, że modele prostsze dają lepsze wyceny niż modele bardziej złożone.

Wycena uzyskana z modelu przełącznikowego zaniża w porównaniu z modelem  $\mathcal{M}^{BS}$  wartości opcji in-the-money, jednocześnie zawyżając wartości opcji out-of-the-money. Własność ta może być związana z cechą prognoz modeli przełącznikowych, które są średnią ważoną prognoz po wszystkich możliwych konfiguracjach reżimów, gdzie wagami są prawdopodobieństwa realizacji tych konfiguracji.

Wyceny uzyskane z modelu SV w porównaniu do cen z modelu  $\mathcal{M}^{BS}$  są niższe dla opcji in-the-money i out-of-the-money, natomiast wyższe dla opcji w okolicy at-the-money. Największe różnice zanotowano właśnie dla opcji w okolicach at-the-money. Niemniej różnice w wycenie są stosunkowo nieduże. Uzyskany wyniki zgodny jest z badaniami przeprowadzonymi przez innych autorów.

---

<sup>8</sup> por. Bakshi G., Cao C., Chen Z. [1997], *Empirical performance of alternative option pricing models*, Journal of Finance 32, 2003-2049  
Jiang G.J., Sluis P.J. [1999], *Index option pricing models with stochastic volatility and stochastic interest rates*, European Finance Review, 1999, 3, 273-310

Tabela 5.14. Wycena opcji kupna indeksu WIG20 z terminem wygaśnięcia 15.06.2006. Wycena na dzień 21.07.2006

<i>money</i>	cena wykonania	nazwa opcji	wartość w dniu wygaśnięcia	zdyskontowana wartość z dnia wygaśnięcia	BSM	cena rynkowa	GARCH (1,1) GED	EGARCH (1,1) GED	Przełącznikowy wariacja Studenta	SV
1,21	2500	OW20I6250	488	406,17	515	515	509,31 (0,2732)	513,22 (0,1845)	425,62	516,04 (0,3201)
1,17	2600	OW20I6260	388	322,94	450	450	411,52	412,99	384,62	452,32
1,12	2700	OW20I6270	288	239,71	400	395	311,15	312,36	357,14	403,29
1,08	2800	OW20I6280	188	156,48	335	335	211,53	212,11	310,19	339,23
1,05	2900	OW20I6290	88	73,24	252	252	112,09	114,66	240,00	264,45
1,01	3000	OW20I6300	0	0	178	178	12,21	15,19	176,24	176,23
0,98	3100	OW20I6310	0	0	128	134	0	0	130,61	126,76
0,95	3200	OW20I6320	0	0	96	99	0	0	101,05	95,99
0,92	3300	OW20I6330	0	0	66	69	0	0	71,74	66,78
0,89	3400	OW20I6340	0	0	44	46,75	0	0	49,44	44,43
0,87	3500	OW20I6350	0	0	33	30,3	0	0	37,93	33,5

Źródło: Opracowanie własne



Tabela 5.15. Wycena opcji kupna akcji KGH z terminem wygaśnięcia 15.06.2006. Wycena na dzień 21.07.2006

<i>moneyess</i>	cena wykonania	nazwa opcji	wartość w dniu wygaśnięcia	zdyskontowana wartość z dnia wygaśnięcia	BSM	cena rynkowa	GARCH (1,1) GED	AR(1)-APARCH (1,1) GED	Przelącznikowy wariancja skośny Studenta	Przelącznikowy wariancja normalny	SV
1,69	65	OKGHI6065	39,5	39,27	40,80	40,80	40,37 (0,2211)	40,35 (0,2359)	24,19	23,89	41,57 (0,5521)
1,57	70	OKGHI6070	34,5	34,30	36,15	36,15	32,72	32,82	23,08	22,95	37,48
1,44	75	OKGHI6075	29,5	29,32	31,75	31,75	24,62	24,88	22,01	21,63	35,91
1,37	80	OKGHI6080	24,5	24,35	27,60	27,60	17,43	17,24	20,14	20,32	29,17
1,29	85	OKGHI6085	19,5	19,38	23,75	23,75	10,44	10,64	18,41	18,04	25,88
1,22	90	OKGHI6090	14,5	14,41	20,20	20,20	1,18	1,24	16,58	16,49	23,12
1,15	95	OKGHI6095	9,5	9,44	17,05	17,05	0,14	0	14,77	14,94	20,99
1,10	100	OKGHI6100	4,5	4,47	14,30	14,30	0,02	0	13,04	13,23	27,44
1,00	110	OKGHI6110	0	0,00	9,75	9,90	0,08	0	9,78	9,63	12,22
0,91	120	OKGHI6120	0	0,00	6,50	6,90	0	0	7,11	7,09	6,11
0,84	130	OKGHI6130	0	0,00	4,20	4,20	0	0	4,98	5,06	5,98
0,78	140	OKGHI6140	0	0,00	2,67	2,67	0	0	3,41	3,35	3,41
0,73	150	OKGHI6150	0	0,00	1,67	1,67	0		2,28	2,33	2,28

Źródło: Opracowanie własne

Tabela 5.16. Wycena opcji kupna akcji PEO z terminem wygaśnięcia 15.06.2006. Wycena na dzień 21.07.2006

<i>money</i>	cena wykonania	nazwa opcji	wartość w dniu wygaśnięcia	zdyskontowana wartość z dnia wygaśnięcia	BSM	cena rynkowa	EGARCH(2,1) GED	EGARCH(2,1) normalny	Przelącznikowy wariancja Studenta	Przelącznikowy wariancja normalny	SV
1,37	150	OPEOI6150	55,3	54,97	35,45	35,45	35,05 (0,1811)	35,02 (0,1779)	25,91	26,39	37,53 (0,6522)
1,28	160	OPEOI6160	45,3	45,03	27,50	27,50	24,85	25,26	21,44	21,06	29,54
1,21	170	OPEOI6170	35,3	35,09	20,60	20,60	15,95	15,98	17,06	17,21	25,71
1,14	180	OPEOI6180	25,3	25,15	14,95	14,95	9,31	9,42	13,11	13,18	19,09
1,08	190	OPEOI6190	15,3	15,21	10,50	10,50	4,72	4,73	9,72	9,81	15,07
1,03	200	OPEOI6200	5,3	5,27	7,15	7,15	0,51	0,52	6,97	6,94	10,34
0,98	210	OPEOI6210	0	0,00	4,71	4,71	0,03	0	4,82	4,85	7,82
0,93	220	OPEOI6220	0	0,00	3,02	3,02	0,02	0	3,24	3,28	3,59
0,89	230	OPEOI6230	0	0,00	1,89	1,89	0,00	0	2,12	2,12	1,99

Źródło: Opracowanie własne

Tabela 5.17. Wycena opcji kupna akcji PKM z terminem wygaśnięcia 15.06.2006. Wycena na dzień 21.07.2006

<i>money</i>	cena wykonania	nazwa opcji	wartość w dniu wygaśnięcia	zdyskontowana wartość z dnia wygaśnięcia	BSM	cena rynkowa	GARCH(1,1) GED	AR(1)-EGARCH(1,1) normalny	Przełącznikowy wariancja Studenta	SV
1,13	120	OPKMI6120	15,25	15,16	11,05	11,05	10,95 (0,098)	10,86 (0,101)	9,80	12,46
1,04	130	OPKMI6130	5,25	5,22	6,10	6,10	5,56	5,57	5,86	7,35
0,97	140	OPKMI6140	0	0	3,04	3,04	2,35	2,39	3,15	4,15
0,90	150	OPKMI6150	0	0	1,38	1,38	0,88	0,86	1,53	1,83
0,85	160	OPKMI6160	0	0	0,58	0,58	0,26	0,26	0,69	0,79
0,80	170	OPKMI6170	0	0	0,22	0,22	0	0	0,28	0,28

Źródło: Opracowanie własne

Tabela 5.18. Wycena opcji kupna akcji PKN z terminem wygaśnięcia 15.06.2006. Wycena na dzień 21.07.2006

<i>money</i>	cena wykonania	nazwa opcji	wartość w dniu wygaśnięcia	zdyskontowana wartość z dnia wygaśnięcia	BSM	cena rynkowa	EGARCH(1,1) GED	APARCH(1,1) GED	Przelącznikowy wariancja Studenta	Przelącznikowy wariancja normalny	SV
1,27	44	OPKNI6044	4,69	4,66	11,65	11,65	11,52 (0,7213)	11,57 (0,698)	9,18	9,03	11,78 (0,021)
1,21	46	OPKNI6046	2,69	2,67	9,95	9,95	9,17	9,13	8,20	8,27	10,08
1,16	48	OPKNI6048	0,69	0,69	8,35	8,35	6,54	6,50	7,18	7,07	9,51
1,12	50	OPKNI6050	0	0	6,90	6,90	4,29	4,33	6,18	6,30	7,70
1,02	55	OPKNI6055	0	0	4,01	4,01	1,76	1,80	3,95	4,00	5,07
0,93	60	OPKNI6060	0	0	2,10	2,10	0,12	0,12	2,26	2,24	3,26
0,86	65	OPKNI6065	0	0	1,01	1,01	0	0,00	1,18	1,20	1,68
0,80	70	OPKNI6070	0	0	0,45	0,45	0	0,00	0,56	0,56	0,66
0,74	75	OPKNI6075	0	0	0,19	0,19	0	0,00	0,26	0,26	0,26

Źródło: Opracowanie własne

Tabela 5.19. Wycena opcji kupna akcji TPS z terminem wygaśnięcia 15.06.2006. Wycena na dzień 21.07.2006

<i>money</i>	cena wykonania	nazwa opcji	wartość w dniu wygaśnięcia	zdyskontowana wartość z dnia wygaśnięcia	BSM	cena rynkowa	GARCH(1,1) GED	EGARCH(0,2) GED	Przelącznikowy wariacja normalny	Przelącznikowy Wariacja i średnia Studenta	SV
1,17	18	OTPSI6018	3,01	2,99	2,73	2,73	2,72 (0,056)	2,69 (0,055)	2,34	2,51	2,89 (0,020)
1,11	19	OTPSI6019	2,01	2,00	2,01	2,01	1,85	1,84	1,82	1,75	2,12
1,05	20	OTPSI6020	1,01	1,00	1,42	1,42	1,09	1,11	1,35	1,34	1,89
0,96	22	OTPSI6022	0	0	0,62	0,95	0,39	0,39	0,65	0,69	0,75
0,88	24	OTPSI6024	0	0	0,23	0,23	0,10	0,10	0,26	0,26	0,36
0,81	26	OTPSI6026	0	0	0,07	0,07	0	0	0,09	0,09	0,09

Źródło: Opracowanie własne

Ciekawie wygląda zestawienie wycen opcji w różnych modelach ze zdyskontowaną wartością rzeczywistych wypłat opcji, którą można traktować jako rzeczywistą wartość opcji w dniu wyceny ustaloną *post factum*. Niestety nie można prognozować przyszłej funkcji wypłaty za pomocą prezentowanych modeli zmienności, bowiem prognoza byłaby obarczona bardzo dużą niepewnością.

Modele zmienności wydają się być ciekawym kierunkiem badań. Umożliwiają nie tylko modelowanie zmienności rynków finansowych, ale okazują się być również użyteczne do wyceny opcji. Zaprezentowane modele są bardziej skomplikowane od modelu  $\mathcal{M}^{BS}$  ale ewentualne zyski z jego stosowania powinny rekompensować trud implementacyjny.

Z przeprowadzonej analizy, dla pewnego wycinka danych wynika, że modele zmienności mogą stanowić użyteczne narzędzi wyceny opcji, również na polskim rynku kapitałowym. Należy jednak pamiętać, że polski giełdowy rynek instrumentów pochodnych jest mało płynny. Większość transakcji jest zawieranych po cenach równych, bądź bardzo bliskich teoretycznych kursów otwarcia, co *de facto* oznacza, że ceny są ustalane przez inwestorów w oparciu o model  $\mathcal{M}^{BS}$ .

## Zakończenie

W pracy przedstawiono wybrane metody wyceny opcji w oparciu o modele zmienności. Zaprezentowano teoretyczne własności modeli zmienności, wskazano w jaki sposób można je wykorzystać do wyceny opcji, a także przeprowadzono badania empiryczne dotyczące wyceny opcji, które były przedmiotem obrotu na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie.

Oceniając wykorzystywane modele wyceny opcji (czy szerzej instrumentów pochodnych) należy zwrócić uwagę na kilka kwestii. Po pierwsze trzeba wziąć pod uwagę jak proponowana metoda wyceny mieści się w teorii finansów, to znaczy czy uwzględnia podstawowe założenia modeli finansowych i ewentualnie, które z nich uchyla. Po drugie należy uwzględnić złożoność obliczeniową danego modelu. Jest to ważny problem, często jednak pomijany, zwłaszcza w pracach o charakterze teoretycznym. W matematyce finansowej wciąż zdarza się bowiem, że problem ma rozwiązanie teoretyczne, którego jednak nie można zastosować w praktyce, ze względu na trudności obliczeniowe. Trzecim i najważniejszym kryterium jest ocena praktyczna. Trzeba zweryfikować dany model wyceny na prawdziwych rynkach finansowych.

Wykorzystywane w pracy modele wyceny swoje źródło mają w arbitrażowej metodzie wyceny instrumentów finansowych. Umożliwiają jednak uchylenie jednego z najczęściej krytykowanych założeń klasycznego już modelu Blacka-Scholesa – założenia o stałości w czasie współczynnika zmienności. Rezygnacja z tego założenia wiąże się jednak z utratą cennej cechy modelowanego rynku, a mianowicie zupełności. To z kolei pociąga za sobą znaczną komplikację modelu – trzeba skorzystać ze sposobów umożliwiających wycenę przy wielości miar martyngałowych. Traci się więc elegancję związaną z brakiem założeń dotyczących preferencji uczestników rynku.

Natomiast komplikacja obliczeniowa jest uzależniona od użytego do wyceny modelu zmienności. W przypadku modeli GARCH i SV stosowane jest podejście symulacyjne (choć istnieją wzory analityczne, które można aproksymować numerycznie). Symulacje Monte Carlo są jednak dobrze znaną i powszechnie wykorzystywaną techniką i jej stosowanie nie stanowi problemu nawet dla praktyków. Natomiast w przypadku modeli przełącznikowych przedstawiony wzór analityczny trzeba numerycznie przybliżyć. Ponadto dla wszystkich modeli zmienności należy wyestymować ich parametry. Podsumowując – wycena opcji w oparciu o modele zmienności z pewnością jest bardziej złożona obliczeniowo i wymaga większych nakładów niż klasyczne metody wyceny. Jednak postęp technologiczny (zarówno

w zakresie sprzętu jak i oprogramowania) w coraz większym stopniu niweluje niedogodności związane ze stosowaniem tych modeli.

Pozostaje omówić praktyczną przydatność wyceny opcji opartej na modelach zmienności. W rozdziale 5 pracy przedstawiono wyniki badań empirycznych dla opcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie w roku 2006 (z wrześnieowym terminem wygaśnięcia). Wyniki obliczeń różnią się w zależności od użytego modelu. Można jednak wyciągnąć kilka ogólnych wniosków.

Jak się okazało można dopasować do szeregow z wciąż jeszcze niedojrzałego rynku polskiego modele zmienności. Liczba modeli zmienności, które można ewentualnie wykorzystać do opisu dynamiki różni się w zależności od rodzaju szeregu. Co znamienne, wśród dopasowanych modeli dominują dość proste modele (wyjątkiem był szereg PEO). Nie udało się dopasować żadnego modelu FIEGARCH, HYGARCH, czy też modeli przełącznikowych z większą niż dwa liczbą reżimów. Niemniej badane modele wykazały słabe zdolności prognostyczne i to niezależnie od specyfikacji – błędy prognoz były znaczące. Szczególnie było to zauważalne dla modeli przełącznikowych.

Ceny uzyskane z wykorzystaniem modeli GARCH są na ogół niższe dla opcji at-the-money i out-of-the-money niż ceny uzyskane z modelu  $\mathcal{M}^{BS}$ . Natomiast dla opcji in-the-money modele te dają zbliżone ceny. Niestety nie można jednoznacznie wskazać, który z modeli ma przewagę dla danego instrumentu bazowego, czy najlepszy ze względu na kryterium informacyjne, czy najlepszy ze względu na jakość prognoz. Nie można też odpowiedzieć na pytanie, czy uwzględnienie innych rozkładów niż normalny poprawia wyceny. Do wyceny przy użyciu modeli GARCH zostały wybrane głównie rozkłady GED, niemniej wyceny z modeli z rozkładem normalnym nie różnią się bardzo. Natomiast można zauważyć, że modele prostsze dają lepsze wyceny niż modele bardziej złożone.

Wycena uzyskana z modelu przełącznikowego zaniża w porównaniu z modelem  $\mathcal{M}^{BS}$  wartości opcji in-the-money, jednocześnie zawyżając wartości opcji out-of-the-money. Własność ta jest wiązana z cechą prognoz modeli przełącznikowych, które są średnią ważoną prognoz po wszystkich możliwych konfiguracjach reżimów, gdzie wagami są prawdopodobieństwa realizacji tych konfiguracji.

Wyceny uzyskane z modelu SV w porównaniu do cen z modelu  $\mathcal{M}^{BS}$  są niższe dla opcji in-the-money i out-of-the-money, natomiast wyższe dla opcji w okolicy at-the-money. Największe różnice zanotowano właśnie dla opcji w okolicach at-the-money. Niemniej różnice w wycenie są stosunkowo nieduże.

Rzeczywiste wartości opcji (uzyskane *ex post* jako zdyskontowana wartość funkcji wypłaty) na ogół znacznie się różnią od ceny uzyskanej z modeli zmienności, jednak różnica ta jest na ogół mniejsza niż dla cen z modelu  $\mathcal{M}^{BS}$ . Niestety nie można prognozować przyszłej



funkcji wypłaty za pomocą prezentowanych modeli zmienności, bowiem prognoza byłaby obciążona bardzo dużą niepewnością.

Trzeba zwrócić uwagę na ograniczone możliwości praktycznej oceny używanych w pracy modeli wyceny. Ze względu na niską płynność giełdowego rynku opcji nie było możliwe zbadanie czy modele zmienności usuwają charakterystyczny dla modelu  $\mathcal{M}^{BS}$  uśmiech zmienności.

## Dodatek 1. Najważniejsze giełdy kontraktów futures i opcji

American Stock Exchange	AMEX	<a href="http://www.amex.com">www.amex.com</a>
Australian Stock Exchange	ASX	<a href="http://www.asx.com.au">www.asx.com.au</a>
Bolsa de Mercadorias y Futuros, Sao Paulo	BM&F	<a href="http://www.bmf.com.br">www.bmf.com.br</a>
Boston Option Exchange	BOX	<a href="http://www.bostonoptions.com">www.bostonoptions.com</a>
Bourse de Montreal	MGE	<a href="http://www.m-x.ca">www.m-x.ca</a>
Bolsa de Valores de Sao Paulo	Bovespa	<a href="http://www.bovespa.com.br">www.bovespa.com.br</a>
Budapest Stock Exchange	BSE	<a href="http://www.bse.hu">www.bse.hu</a>
Bursa Malaysia Derivatives Berhad	BMYS	<a href="http://www.mdex.com.my">www.mdex.com.my</a>
Central Japan Commodity Exchange	C-COM	<a href="http://www.c-com.or.jp">www.c-com.or.jp</a>
Chicago Board of Trade	CBOT	<a href="http://www.cbot.com">www.cbot.com</a>
Chicago Board Options Exchange	CBOE	<a href="http://www.cboe.com">www.cboe.com</a>
Chicago Mercantile Exchange	CME	<a href="http://www.cme.com">www.cme.com</a>
Dalian Commodity Exchange	DCE	<a href="http://www.dce.com.cn">www.dce.com.cn</a>
Eurex	EUREX	<a href="http://www.eurexchange.com">www.eurexchange.com</a>
Euronext.liffe	EURONEXT	<a href="http://www.euronext.com">www.euronext.com</a>
Hong Kong Exchanges & Clearing	HKEx	<a href="http://www.hkex.com.hk">www.hkex.com.hk</a>
ICE, London	ICE	<a href="http://www.theipe.com">www.theipe.com</a>
International Securities Exchange	ISE	<a href="http://www.iseoptions.com">www.iseoptions.com</a>
Italian Derivatives Market	IDEM	<a href="http://www.borsaitaliana.it">www.borsaitaliana.it</a>
JSE Securities Exchange South Africa	JSE	<a href="http://www.jse.co.za">www.jse.co.za</a>
Kansas City Board of Trade	KCBT	<a href="http://www.kcbt.com">www.kcbt.com</a>
Korea Exchange	KSE	<a href="http://www.kse.or.kr">www.kse.or.kr</a>
London Metal Exchange	LME	<a href="http://www.lme.co.uk">www.lme.co.uk</a>
MEFF Renta Fija and Variable, Madrid	MEEFF	<a href="http://www.meff.es">www.meff.es</a>
Mercado a Termino de Rosario	ROFEX	<a href="http://www.rofex.com.ar">www.rofex.com.ar</a>
Mexican Derivatives Exchange	MexDer	<a href="http://www.mexder.com">www.mexder.com</a>
Minneapolis Grain Exchange	ME	<a href="http://www.mgex.com">www.mgex.com</a>
National Stock Exchange of India	NSE	<a href="http://www.nse-india.com">www.nse-india.com</a>
New York Board of Trade	NYBOT	<a href="http://www.nybot.com">www.nybot.com</a>
New York Mercantile Exchange	NYMEX	<a href="http://www.nymex.com">www.nymex.com</a>
OMX Exchanges	OMX	<a href="http://www.omxgroup.com">www.omxgroup.com</a>

One Chicago	oneChicago	onechicago.com
Osaka Mercantile Exchange	OME	www.osamex.com
Osaka Securities Exchange	OSE	www.ose.or.jp
Oslo Stock Exchange	OBX	www.oslobors.no
Pacific Exchange	PXS	www.pacificex.com
Philadelphia Stock Exchange	PHLX	www.phlx.com
Shanghai Futures Exchange	SHFE	www.shfe.com.cn
Singapore Exchange	SGX	www.ses.com.sg
Sydney Futures Exchange	SFE	www.sfe.com.au
Taiwan Futures Exchange	TAIFEX	www.taifex.com.tw
The Tokyo Commodity Exchange	TOCOM	www.tocom.or.jp/
Tokyo Financial Exchange	TFX	www.tfx.co.jp
Tokyo Grain Exchange	TGE	www.tge.or.jp
Tokyo International Financial Futures Exchange	TIFFE	www.tiffe.or.jp
Toronto Stock Exchange	TSE	www.tse.com
Warsaw Stock Exchange	WSE	www.wse.com.pl
Winnipeg Commodity Exchange	WCE	www.wce.mb.ca
Zhengzhou Commodity Exchange	ZCE	english.czce.com.cn

## Dodatek 2. Miary dokładności prognoz:

1. Błąd średni (Mean Error, ME)

$$ME = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)$$

2. Średni błąd bezwzględny (Mean Absolute Error, MAE)

$$MAE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |y_i - \hat{y}_i|$$

3. Błąd średniokwadratowy (Mean Square Error, MSE)

$$MSE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2$$

4. Medianowy błąd kwadratowy (Median Square Error, MedSE)

$$MedSE = \text{mediana}\{(y_i - \hat{y}_i)^2\}_{i=1}^N$$

5. Pierwiastek błędu średniokwadratowego (root mean square error, RMSE)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}$$

6. Średni bezwzględny błąd procentowy (mean absolute percentage error, MAPE)

$$MAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right|$$

7. Skorygowany średni bezwzględny błąd procentowy (AMAPE)

$$AMAPE = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i + \hat{y}_i} \right|$$

8. Udział prawidłowych znaków (PCS)

$$PCS = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \max(\text{sgn}(y_i \cdot \hat{y}_i), 0)$$

9. Współczynnik rozbieżności Theila (TIC)

$$TIC = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}}{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i^2} + \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{y}_i^2}}$$

10. Logarytmiczna funkcja straty

$$LLF = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln \left( \frac{\hat{y}_i}{y_i} \right)$$

## Dodatek matematyczny

### A. Procesy stochastyczne w czasie dyskretnym

Zakładamy, że ustalona jest przestrzeń probabilistyczna  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ . Niech  $\mathcal{T}$  będzie zbiorem chwil. W przypadku czasu dyskretnego  $\mathcal{T}$  jest zbiorem przeliczalnym i na ogół zakłada się, że  $\mathcal{T} \subseteq \{0, 1, \dots, T\}$ .

#### Definicja A.1

Filtracją nazywamy niemalejącą rodzinę  $\sigma$ -ciał  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$ , to znaczy  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$  dla  $s < t$  i  $s, t \in \mathcal{T}$ .  $\mathcal{F}_t$  interpretujemy jako zbiór wszystkich informacji zebranych do chwili  $t$ , to znaczy zdarzeń, o których wiemy czy zaszły, czy też nie do chwili  $t$ .

#### Definicja A.2

Rodzinę zmiennych losowych  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  nazywamy procesem stochastycznym. Proces  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  jest adaptowany do filtracji  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$  ( $\mathbb{F}$ -adaptowany), jeśli dla każdego  $t \in \mathcal{T}$  zmienna losowa  $X_t$  jest  $\mathcal{F}_t$ -mierzalna. Proces stochastyczny  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  będzie również oznaczany  $(X_t)$  lub  $X$  w zależności od kontekstu.

#### Definicja A.3

Filtrację  $\mathbb{F}^X = (\mathcal{F}_t^X)_{t \in \mathcal{T}} = \sigma(X_s; s \leq t)$  nazywamy naturalną filtracją procesu  $X$ . Zatem proces  $X$  jest zawsze adaptowany do naturalnej filtracji  $\mathbb{F}^X$ . Ponadto, filtracja  $\mathbb{F}^X$  jest najmniejszą filtracją, względem której proces  $X$  jest adaptowany.

#### Definicja A.4

Proces  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$  jest prognozowalny względem filtracji  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$  ( $\mathbb{F}$ -adaptowany), jeśli dla każdego  $t \in \mathcal{T}$  zmienna losowa  $X_t$  jest  $\mathcal{F}_{t-1}$ -mierzalna. Wobec relacji  $\mathcal{F}_{t-1} \subset \mathcal{F}_t$  proces prognozowalny jest również adaptowany.

#### Definicja A.5

Proces  $(X_t)_{t \in \mathcal{T}}$ , gdzie zmienne losowe są adaptowane do filtracji  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$  oraz  $E(|X_t|) < \infty$  dla każdego  $t \in \mathcal{T}$ , jest nazywany:

- martyngałem względem  $\mathbb{F}$ , jeśli  $E(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = X_{t-1}$ , dla każdego  $t \in \mathcal{T}$ ,
- nadmartyngałem (supermartyngałem) względem  $\mathbb{F}$ , jeśli  $E(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) \leq X_{t-1}$ , dla każdego  $t \in \mathcal{T}$ ,
- podmartyngałem (submartyngałem) względem  $\mathbb{F}$ , jeśli  $E(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) \geq X_{t-1}$ , dla każdego  $t \in \mathcal{T}$ .

Mówimy krótko, że proces  $(X_t)$  jest martyngałem, gdy jest jasne jaka filtracja jest rozważana. Jeśli nie jest to sprecyzowane, za  $\mathbb{F}$  przyjmowana jest naturalna filtracja  $\mathbb{F}^X$  procesu  $(X_t)$ . Czasem używane jest określenie proces  $(X_t)$  jest  $\mathbb{F}$ -martyngałem by podkreślić rolę filtracji  $\mathbb{F}$ . Warto zaznaczyć, że to czy proces jest martyngałem jest własnością zależną od wyboru prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}$ . Jeśli zostanie zmieniona miara probabilistyczna na  $(\Omega, \mathcal{F})$ , powiedzmy z  $\mathbf{P}$  na  $\mathbf{Q}$ , to proces który jest  $\mathbb{F}$ -martyngałem względem prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}$  nie musi być martyngałem względem prawdopodobieństwa  $\mathbf{Q}$  (i na ogół nie jest). Zwykle w matematyce finansowej problem jest postawiony odwrotnie, to znaczy mamy proces stochastyczny  $(X_t)$  i szukamy miary probabilistycznej, względem której proces ten jest martyngałem.

Można zauważyć, że proces  $X$  jest podmartyngałem (nadmartyngałem) wtedy i tylko wtedy gdy  $-X$  jest nadmartyngałem (podmartyngałem). Ponadto  $X$  jest martyngałem wtedy i tylko wtedy gdy jest jednocześnie nadmartyngałem i podmartyngałem.

### Definicja A.6

Jeżeli  $(X_t)$  jest martyngałem, a  $(V_t)$  ciągiem prognozowalnym, to ciąg  $(Z_t)$  dany wzorem:

$$Z_t := V_0 X_0 + V_1 (X_1 - X_0) + \dots + V_t (X_t - X_{t-1}), \text{ gdzie } t = 1, 2, \dots,$$

nazywamy transformatą martyngałową  $(X_t)$  przez proces  $(V_t)$ .

Ciąg  $(Z_t)$  jest sumą pewnych zmiennych losowych  $V_{t+1}$  mnożonych przez przyrosty martyngałowe  $X_t - X_{t-1}$ , jest więc dyskretnym analogonem całki stochastycznej. Łatwo sprawdzić, że zachodzi następująca zależność:

$$E(Z_{t+1} | \mathcal{F}_t) = Z_t + E(V_{t+1}(X_{t+1} - X_t) | \mathcal{F}_t) = Z_t + V_{t+1} E((X_{t+1} - X_t) | \mathcal{F}_t) = Z_t,$$

zatem  $(Z_t)$  jest martyngałem.

### Definicja A.7

Jeśli dwie miary  $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{Q}$  są zdefiniowane na tym samym  $\sigma$ -ciele  $\mathcal{F}$ , wówczas  $\mathbf{P}$  jest absolutnie ciągła względem  $\mathbf{Q}$ , co zapisujemy

$$\mathbf{P} \ll \mathbf{Q},$$

jeżeli  $\mathbf{P}(A) = 0$  dla każdego zbioru  $A \in \mathcal{F}$ , takiego że  $\mathbf{Q}(A) > 0$ .

### Definicja A.8

Jeżeli  $\mathbf{P} \ll \mathbf{Q}$  oraz  $\mathbf{Q} \ll \mathbf{P}$  to miary  $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{Q}$  nazywamy równoważnymi i zapisujemy  $\mathbf{P} \sim \mathbf{Q}$ .

### **Twierdzenie A.1**

Następujące stwierdzenia są równoważne:

$P \sim Q$  wtedy i tylko wtedy gdy  $P$  i  $Q$  mają te same zbiory miary 0.

$P \sim Q$  wtedy i tylko wtedy gdy  $P$  i  $Q$  mają te same zbiory prawie pewne.

$P \sim Q$  wtedy i tylko wtedy gdy  $P$  i  $Q$  mają te same zbiory miary dodatniej.



## B. Procesy stochastyczne w czasie ciągłym

Podobnie jak w czasie dyskretnym zakładamy, że dana jest przestrzeń probabilistyczna  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ , a  $\mathcal{T} = [0, T]$  oznacza zbiór chwil.

### Definicja B.1

Filtracją nazywamy niemalejącą rodzinę  $\sigma$ -ciał  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ , to znaczy  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$  dla  $0 \leq s < t < \infty$  i  $s, t \in \mathcal{T}$ .

### Definicja B.2

Mówimy, że filtracja  $\mathbb{F}$  spełnia warunki zwykłe, gdy jest:

1. Prawostronnie ciągła, to znaczy  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ , gdzie  $\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{s < t} \mathcal{F}_s$ ,
2. Zupełna, to znaczy  $\mathcal{F}_0$  zawiera wszystkie zbiory  $\mathbf{P}$ -miary zero (czyli każde  $\sigma$ -ciało  $\mathcal{F}_t$  jest zupełne).

### Definicja B.3

Rodzinę zmiennych losowych  $(X_t)_{t \geq 0}$  nazywamy procesem stochastycznym. Proces jest adaptowany do filtracji  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  ( $\mathbb{F}$ -adaptowany), jeśli dla każdego  $t \geq 0$  zmienna losowa  $X_t$  jest  $\mathcal{F}_t$ -mierzalna.

Oczywiście rodzina zmiennych losowych  $(X_t)_{t \geq 0}$  jest adaptowana do naturalnej filtracji  $\mathbb{F}^X$  wprowadzonej w definicji A.3.

Jeśli zaszło pewne zdarzenie elementarne  $\omega$ , to funkcja  $t \rightarrow X_t(\omega)$  opisuje jak zmieniają się obserwacje wraz ze zmianą czasu. Funkcję tę nazywa się trajektorią procesu. Trajektoriami procesu może być ciągła, ale najczęściej rozważa się trajektorie ze skokiem. Zakłada się wówczas, że proces jest prawostronnie ciągły z lewostronnymi granicami (RCLL – *right continuous with left limits* lub càdlàg – *continue à droite, limite à gauche*).

Proces jest nazywany progresywnie mierzalnym, jeśli jego trajektoria jest mierzalna dla każdego  $t \geq 0$

### Definicja B.4

Mierzalność ciągłego procesu stochastycznego  $X$ , to łączną mierzalność względem produktowego  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{B}([0, T]) \times \mathcal{F}_T$ , a w przypadku gdy  $T = \infty$ , względem produktowego  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{B}([0, T]) \times \mathcal{F}_\infty$ , gdzie  $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$ .

### Definicja B.5

$\sigma$ -ciałem zbiorów prognozowalnych  $\mathcal{P}$  w  $\Omega \times [0, \infty)$  nazywamy najmniejsze  $\sigma$ -ciało, względem którego są mierzalne wszystkie procesy ciągłe i adaptowane. Proces  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  jest nazywany prognozowalnym, jeśli odwzorowanie  $X: \Omega \times [0, \infty) \rightarrow R$  jest  $\mathcal{P}$ -mierzalne.

Definicja martyngału, nadmartyngału i podmartyngału jest analogiczna do podanej dla czasu dyskretnego.

### Definicja B.6

Proces  $(X_t)_{0 \leq t < \infty}$ , gdzie zmienne losowe są adaptowane do filtracji  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  oraz  $E(|X_t|) < \infty$  dla każdego  $0 \leq t < \infty$ , jest nazywany:

1. martyngałem względem  $\mathbb{F}$ , jeśli  $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$ , dla każdego  $t \in \mathcal{T}$ ,
2. nadmartyngałem (supermartyngałem) względem  $\mathbb{F}$ , jeśli  $E(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s$ , dla każdego  $0 \leq t < \infty$ ,
3. podmartyngałem (submartyngałem) względem  $\mathbb{F}$ , jeśli  $E(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$ , dla każdego  $0 \leq t < \infty$ .

### Definicja B.7

Momentem stopu względem filtracji  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  nazywamy zmienną losową  $\tau: \Omega \rightarrow R_+$ , spełniającą warunek:  $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$  dla każdego  $t$ .

### Definicja B.8

Proces  $X^\tau$ , czyli proces zastopowany w momencie  $\tau$ , jest dany wzorem:

$$X_t^\tau := X_{t \wedge \tau}.$$

### Definicja B.9

Proces  $(X_t)_{t \geq 0}$ , gdzie zmienne losowe są adaptowane do filtracji  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  jest martyngałem lokalnym, jeśli istnieje rosnący ciąg momentów stopu  $(\tau_n)$ , taki że dla każdego  $n$  proces  $X^{\tau_n}$  jest martyngałem. Ciąg  $(\tau_n)$  nazywany jest ciągiem lokalizującym.

### Definicja B.10

Semimartyngałem ciągłym nazywamy proces  $X$  jednoznacznie określony równaniem:

$$X_t = X_0 + M_t + B_t,$$

gdzie  $M$  jest lokalnym martyngałem, a  $B$  procesem ciągłym o wahanu skończonym prawie na pewno.

W 1828 roku szkocki botanik Robert Brown zaobserwował i opisał nieregularny i niesymetryczny ruch cząsteczek pyłku kwiatowego w wodzie. Matematyczny opis ruchu Browna powstał dopiero w 1923 roku, dzięki pracy Norberta Wienera. Dla uhonorowania wkładu tego ostatniego ruch Browna często nazywany jest procesem Wienera. Ruch Browna znalazł zastosowanie nie tylko w biologii, ale również w fizyce, chemii oraz finansach, gdzie wykorzystywany jest do modelowania cen na giełdach.

### Definicja B.11

Proces stochastyczny  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  z czasem ciągłym nazywamy standardowym procesem Wienera lub krótko procesem Wienera jeśli spełnia następujące warunki:

1.  $W_0 = 0$ ,
2. przyrosty procesu  $W$  są niezależne, czyli dla dowolnego  $n$  i dowolnego ciągu  $0 < t_1 \dots < t_n$ , zmienne losowe  $W_{t_1}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$  są niezależne,
3. dla dowolnych  $0 < s \leq t$  przyrost  $W_t - W_s$  ma rozkład normalny  $N(0, t - s)$ ,
4. proces  $W$  jest ciągły, to znaczy prawie wszystkie trajektorie procesu  $W$  są ciągłe.

Warunek 2 może zostać zapisany równoważnie: dla dowolnych  $0 \leq s \leq t$  przyrost  $W_t - W_s$  jest zmienną losową niezależną od  $\sigma$ -ciała  $\mathcal{F}_s^W = \sigma(W_u; u \leq s)$ .

Z warunków 1-3 wynika postać funkcji kowariancji procesu Wienera:

$$\text{Cov}(W_s, W_t) = \min(s, t).$$

Proces  $W = (W^1, \dots, W^d)$ , gdzie  $W^i$  są niezależnymi procesami Wienera, nazywamy  $d$ -wymiarowym procesem Wienera.

Naturalna filtracja związana z procesem Wienera spełnia zwykle warunki (definicja B.2). Definicja B.10 ogranicza się do naturalnej filtracji, można jednak rozważać procesy Wienera względem większej filtracji  $\mathbb{F}$ .

### Definicja B.12

Proces stochastyczny  $W$  z czasem ciągłym nazywamy procesem Wienera względem filtracji  $\mathbb{F}$ , gdy  $W$  jest  $\mathbb{F}$ -adaptowany spełnia warunki:

1.  $W_0 = 0$ ,
2. przyrosty procesu  $W$  są niezależne od filtracji  $\mathbb{F}$ , to znaczy dla dowolnych  $0 \leq s < t$  zmienna losowa  $W_t - W_s$  jest niezależna od  $\mathcal{F}_s$ ,
3. dla dowolnych  $0 < s \leq t$  przyrost  $W_t - W_s$  ma rozkład normalny  $N(0, t - s)$ ,
4. proces  $W$  jest ciągły, to znaczy prawie wszystkie trajektorie procesu  $W$  są ciągłe.

### Definicja B.13

Proces  $Z$  nazywamy wariacją kwadratową procesu Wienera na przedziale  $[0, t]$ , jeżeli dla  $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^{k_n} \left( W_{t_{i+1}^{(n)}} - W_{t_i^{(n)}} \right)^2 \xrightarrow{P} Z_t,$$

Dla dowolnego ciągu  $\mathcal{P}_n = \{t_0^{(n)}, t_1^{(n)}, \dots, t_{k_n}^{(n)}\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$  podziałów odcinka  $[0, t]$ ,  $t \leq T$ , takiego że  $\max |t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}| \rightarrow 0$ . Proces wariacji kwadratowej procesu  $W$  oznaczamy  $\langle W \rangle_t$

Oto najistotniejsze własności procesu Wienera:

#### 1. Własność martyngałowa

Proces Wienera jest jednym z najprostszych przykładów martyngału: dla  $0 \leq s \leq t$ ,  
 $E[W_t | \mathcal{F}_s] = E[W_t | W_s] = W_s$ ,

Innymi słowy, najlepszą prognozą przyszłej pozycji procesu Wienera jest pozycja obecna.

#### 2. Własność trajektorii

Z definicji prawie wszystkie trajektorie procesu Wienera są ciągłe, ale bardzo nieregularne. Między innymi są nieróżniczkowalne w każdym punkcie. Ponadto prawie każda trajektoria ma wahanie nieograniczone na dowolnym przedziale:

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{n-1} |W_{t_{j+1}} - W_{t_j}| = \infty \text{ (p. n)}$$

Konsekwencją tego faktu jest niemożność zdefiniowania całki Lebesgue'a-Stieltjesa względem trajektorii procesu Wienera.

#### 3. Własność skalowania

Można dokonać wielu użytecznych przekształceń procesu Wienera, które dają w wyniku również procesu Wienera. Jednym z nich jest skalowanie:

jeśli  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  jest procesem Wienera, wtedy dla  $c \neq 0$ ,  $\tilde{W} = \left( \tilde{W}_t = \frac{1}{\sqrt{c}} W_{ct} \right)_{t \geq 0}$  jest także procesem Wienera.

#### 4. Wariacja kwadratowa procesu Wienera na przedziale $[s, t]$ jest równa $t - s$ .

Całka stochastyczna została wprowadzona przez Kiyosi Itô w 1944 roku. Nadaje ona sens wyrażeniu postaci:

$$\int_0^t X dY = \int_0^t X_u dY_u,$$

Gdzie  $X$  i  $Y$  są procesami stochastycznymi. Najczęściej jako funkcja całkująca rozważany jest proces Wienera:  $Y = W$ .<sup>1</sup> Powyższa całka nie może być zdefiniowana analogicznie do całki Lebesgue'a-Stieltjesa, jako granica sum całkowych postaci:

$$\sum_{j=1}^{n-1} X_{\tau_j} (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}), \quad (1)$$

bowiem wariacja procesu Wienera jest nieskończona (własność 2). Ponadto suma (1) zależy (nawet w najprostszych przypadkach) od wyboru punktów  $\tau_j \in [t_j, t_{j+1}]$ . Istnieją dwa szczególnie ważne sposoby wyboru punktów  $\tau_j$ :

1.  $\tau_j = t_j$ , otrzymujemy wówczas całkę Itô, w której całkuje się procesy mierzalne i adaptowane (takie procesy nazywane są nieantycypującymi), a wynik jest martyngałem. W praktyce jest to najczęściej rozważana całka w matematyce finansowej i dalsze rozważania będą ograniczone do niej.
2.  $\tau_j = \frac{t_j + t_{j+1}}{2}$ , co prowadzi do całki Stratonowicza, która nie jest martyngałem, co ogranicza możliwość jej wykorzystywania w finansach.

Całka Itô definiowana jest najpierw dla procesów prostych, a następnie dla szerszej klasy procesów, które mogą być aproksymowane przez procesy proste.

### Definicja B.14

Dla procesu  $X$  z klasy procesów prostych, to znaczy procesów postaci:

$$X_u = \sum_{j=0}^n \xi_j \mathbb{1}_{(t_j, t_{j+1}]}(u),$$

gdzie  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ , a zmienna losowa  $\xi_j$  jest ograniczona i  $\mathcal{F}_{t_j}$ -mierzalna, całka Itô jest definiowana następująco:

$$\int_0^T X_u dW_u = \sum_{j=0}^n \xi_j (W_{t_{j+1}} - W_{t_j}).$$

<sup>1</sup> W literaturze rozważany jest również ogólniejszy przypadek gdy  $Y$  jest ciągłym martyngałem, porównaj: Revuz D., Yor M., *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer, 3rd Edition, New York 1999, ss.119-142

Natomiast na przedziale  $[s, t] \subset [0, T]$  całka Itô jest definiowana poniższym równaniem:

$$\int_s^t X_u dW_u = \int_0^T \mathbb{1}_{(s,t]}(u) X_u dW_u.$$

Tak zdefiniowana całka ma wiele dobrych własności.

### Twierdzenie B.1

Niech  $X$  i  $Y$  będą procesami prostymi, zachodzi wówczas:

1. Liniowość:  $\int_0^T (aX_u + bY_u) dW_u = a \int_0^T X_u dW_u + b \int_0^T Y_u dW_u$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$ ,
2.  $\int_0^s X_u dW_u + \int_s^t X_u dW_u = \int_0^t X_u dW_u$ , dla  $0 < s < t \leq T$ ,
3.  $E \left( \int_0^t X_u dW_u \mid \mathcal{F}_s \right) = \int_0^s X_u dW_u$ , zatem proces  $\left( \int_0^t X_u dW_u \right)_{t \in [0, T]}$  jest martyngałem o średniej zero i ciągłych trajektoriach,
4. Izometria Itô:  $E \left( \int_0^t X_u dW_u \right)^2 = E \left( \int_0^t X_u^2 du \right)$ , dla  $t \leq T$ ,
5.  $E \left( \left( \int_0^t X_u dW_u - \int_0^s X_u dW_u \right)^2 \mid \mathcal{F}_s \right) = E \left( \int_s^t X_u^2 du \right)$  (p.n.) dla  $0 < s < t \leq T$ .

Definicja B.14 może być uogólniona na szerszą klasę procesów stochastycznych.

### Definicja B.15

Dla procesu  $X$  spełniającego następujące warunki:

1. proces  $X$  jest adaptowany i mierzalny,
2. istnieje ciąg  $X^{(n)}$  procesów prostych, takich, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left( \int_0^T |X_s - X_s^{(n)}|^2 ds \right) = 0,$$

3.  $E \left( \int_0^T |X_s|^2 ds \right) < \infty$ ,

całka Itô jest definiowana jako granica:

$$\int_0^T X_u dW_u = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T X_u^{(n)} dW_u.$$

Innymi słowy by obliczyć całkę Itô dla bardziej złożonych procesów należy znaleźć aproksymację procesu  $X$  procesami prostymi, dla których łatwo wyznaczyć całkę a następnie przechodzi się do granicy.

### Definicja B.16

Załóżmy, że  $X$  ma ciągle trajektorie i istnieją adaptowane oraz mierzalne procesy  $\sigma$  i  $b$  takie, że dla każdego  $t \geq 0$  istnieją całki  $\int_0^t b(s)ds$ ,  $\int_0^t \sigma^2(s)ds$ , to znaczy

$$P\left(\int_0^T |b(s)|ds < \infty\right) = 1, \quad P\left(\int_0^T \sigma^2(s)ds < \infty\right) = 1.$$

Wówczas proces  $X$  określony równaniem:

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s)ds + \int_0^t \sigma(s)dW_s,$$

Jest nazywany procesem Itô.

Powyzsze równanie można zapisać w skrócie:

$$dX_t = b(t)dt + \sigma(t)dW_t.$$

Mówimy wówczas, że  $X$  ma różniczkę stochastyczną.

### Twierdzenie B.2 (lemat Itô)

Niech  $X$  będzie procesem Itô i  $f \in C^2$ , wtedy zachodzi wzór:

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \left( \frac{\partial f}{\partial s}(s, X_s) + b_s \frac{\partial f}{\partial X}(s, X_s) + \frac{1}{2} \sigma_s^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(s, X_s) \right) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X}(s, X_s) \sigma_s dW_s,$$

lub w postaci różniczkowej:

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + b_t \frac{\partial f}{\partial X}(t, X_t) + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}(t, X_t) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial X}(t, X_t) \sigma_t dW_t.$$

Lemat Itô mówi, że funkcja gładka od procesu Itô jest procesem Itô, oraz daje przedstawienie całkowe tego procesu.

### Twierdzenie B.3 (Radona-Nikodýma)

$P \ll Q$  wtedy i tylko wtedy gdy istnieje  $\mathcal{F}$ -mierzalna funkcja  $f$  taka, że dla każdego  $A \in \mathcal{F}$

$$P(A) = \int_A f dQ.$$

Ponieważ  $P(A) = \int_A dP$ , to  $\int_A dP = \int_A f dQ$ , dla każdego  $A \in \mathcal{F}$ . Poprzez analogię do

pochoďnej z funkcji złożonej w klasycznym rachunku różniczkowym funkcje  $f$  można

zapisać jako  $\frac{dP}{dQ}$ . Otrzymujemy wówczas:

$$\int_A d\mathbf{P} = \int_A \frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}} d\mathbf{Q}.$$

Funkcja mierzalna  $\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}}$  nazywana jest pochodną Radona-Nikodýma z  $\mathbf{P}$  względem  $\mathbf{Q}$ .

#### Twierdzenie B.4

Załóżmy, że miary  $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{Q}$  są równoważne. Wtedy istnieją pochodne Radona-Nikodýma  $\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}}$  i  $\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}$  oraz zachodzi równość:

$$\frac{d\mathbf{P}}{d\mathbf{Q}} = \frac{1}{\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}}.$$

#### Twierdzenie B.5 (Girsanowa)

Niech  $\mathbf{Q}$  będzie miarą probabilistyczną równoważną  $\mathbf{P}$  na  $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ , taką że pochodna Radona-Nikodýma ma postać:

$$\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}} = L(T) = \exp\left(\int_0^T \gamma(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \gamma^2(s) ds\right)$$

dla pewnego mierzalnego i adaptowanego procesu  $\gamma$ , który spełnia warunek  $\int_0^T \gamma(s) ds < \infty$  (p. n). Jeśli  $(W_t)_{t \in [0, T]}$  jest procesem Wienera względem prawdopodobieństwa  $\mathbf{P}$  i filtracji  $\mathbb{F}$ , to proces  $(\tilde{W}_t)_{t \in [0, T]}$  dany wzorem

$$\tilde{W}_t = W_t - \int_0^t \gamma(s) ds, \quad (0 \leq t \leq T),$$

jest procesem Wienera względem prawdopodobieństwa  $\mathbf{Q}$  i filtracji  $\mathbb{F}$ .

Twierdzenie Girsanowa opisuje zachowanie procesu Wienera  $W$  przy zmianie miary probabilistycznej na równoważną. W szczególności gdy proces  $\gamma(t)$  jest stały ( $\gamma(t) = \gamma$ ), zmiana miary za pomocą pochodnej Radona-Nikodýma  $\exp\left[-\gamma W_t - \frac{1}{2} \gamma^2 t\right]$  sprowadza się do zmiany dryfu z  $c$  na  $c - \gamma$ .



**Twierdzenie B.6 (o reprezentacji zmiennej losowej)**

Niech  $\xi$  będzie  $\mathcal{F}_T$ -mierzalną zmienną losową, gdzie  $0 < T < \infty$ , taką że  $E(|\xi|) < \infty$ . Wówczas istnieje proces  $X$ , który jest progresywnie mierzalny i spełnia warunek  $P\left(\int_0^t X_s^2 dW_s < \infty\right) = 1$ , taki że

$$\xi = E(\xi) + \int_0^T X_s dW_s.$$

**Twierdzenie B.7 (o reprezentacji martynału)**

Jeśli  $M = (M_t)_{t \geq 0}$  jest martynałem lokalnym względem filtracji generowanej przez proces Wienera  $(\mathbb{F}^W)$ , to ma on przedstawienie

$$M_t = M_0 + \int_0^t X_s dW_s, \quad t \geq 0,$$

gdzie proces  $X = (X_t)_{t \geq 0}$  jest progresywnie mierzalnym oraz  $P\left(\int_0^t X_s^2 dW_s < \infty\right) = 1$ .

**Twierdzenie B.8 (wzór Feynmana-Kaca)**

Niech  $\mu(x)$ ,  $\sigma(x)$  będą funkcjami spełniającymi warunek Lipschitza. Wówczas rozwiązanie  $F = F(t, x)$  cząstkowego równania różniczkowego

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) + \mu \frac{\partial F}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t, x) = 0,$$

z warunkiem początkowym  $F(T, x) = h(x)$ , ma przedstawienie

$$F(t, x) = E[h(X_T) | X_t = x],$$

gdzie  $X$  jest rozwiązaniem stochastycznego równania różniczkowego

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,$$

z warunkiem początkowym  $X_t = x$ .

### C. Rynki niezupełne

Najczęściej używane w praktyce funkcje użyteczności:

- a.  $U(x) = \ln x$ ,
- b.  $U(x) = \frac{1}{\alpha} x^\alpha$  dla  $\alpha \in (-\infty, 1) \setminus \{0\}$ ,
- c.  $U(x) = \frac{1}{\alpha} (x^\alpha - 1)$ , dla  $\alpha \in (-\infty, 1)$ , dla  $\alpha = 0$  przyjmujemy  $U(x) = \ln x$ ,
- d.  $U(x) = 1 - e^{-cx}$ ,  $c > 0$ .

#### Definicja C.1 (Addytywna funkcja użyteczności)

Funkcja użyteczności  $U$  jest addytywna jeśli istnieją funkcje  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , takie że

$$U(x_1, x_2, \dots, x_n) = U_1(x_1) + U_2(x_2) + \dots + U_n(x_n).$$

#### Definicja C.2 (czasowo separowalna funkcja użyteczności)

Funkcja użyteczności jest czasowo separowalna, jeśli przeszła konsumpcja i nakłady pracy nie mają wpływu na obecne i przyszłe upodobania uczestnika rynku.

#### Twierdzenie C.1 (prawo oczekiwań iterowanych)

Niech  $I_t$  oraz  $J_t$  będą zbiorami informacji takimi, że  $I_t \subset J_t$ . Prawo oczekiwań iterowanych mówi, że

$$E[X|I_t] = E[E[X|J_t]|I_t].$$

Zatem, jeśli dysponujemy ograniczonym zbiorem informacji  $I_t$ , to najlepszą prognozą jaką możemy uzyskać w chwili  $t$  jest prognoza prognozy, jaką byśmy uzyskali, gdybyśmy dysponowali szerszym zbiorem informacji  $J_t$ . Można zapisać to równoważnie:

$$E[X - E[X|J_t]|I_t] = 0.$$

#### Definicja C.3 (proces Markowa nieprzywiedlny i nieokresowy)

Proces Markowa jest:

- a. nieprzywiedlny, jeśli wszystkie stany komunikują się ze sobą, tzn. stan  $i$ -ty jest osiągalny ze stanu  $j$ -tego dla każdego  $i$  oraz  $j$ .
- b. nieokresowy, jeśli wszystkie jego stany są nieokresowe (stan  $i$  ma okres  $k > 1$  jeżeli każdy powrót do stanu  $i$  następuje w ilości kroków będących wielokrotnością  $k$ :  $k = \text{NWD}\{n: P(X_n = i|X_0 = i) > 0\}$  i  $k > 0$ ).

## Literatura:

- Andersen T. G., Bollerslev T., Diebold F. X., Ebens H. [2001], *The distribution of realized stock return volatility*, Journal of Financial Economics 61, ss. 43-76
- Baillie R., Bollerslev T., Mikkelsen H. [1996], *Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, Journal of Econometrics 74, ss.3-30
- Bartkowiak M. [2007], *Zastosowanie modeli przełącznikowych do wyceny opcji na WIG20*, w: Panek E., Kapitał ludzki i wiedza w gospodarce. Wyzwania XXI wieku, Wydawnictwo AE Poznań, Poznań, ss. 15-27
- Bartkowiak M. [2008], *Zastosowanie modeli GARCH do wyceny opcji na WIG20*, w: Welfe A. [red.], *Metody ilościowe w naukach ekonomicznych 8*, Wydawnictwo SGH, Warszawa, ss. 31-53
- Bingham N.H., Kiesel R. [2004], *Risk neutral valuation. Pricing and Hedging of Financial Derivatives*. Springer
- Bjork T., *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press 1999
- Black F., Scholes M. [1973], *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy 81, ss. 637-659
- Bollen N.P.B. [1998], *Valuing options in regime-switching models*, Journal of Derivatives 6, ss. 38-49
- Bollerslev T, Engle R. [1986], *Modelling the Persistence of Conditional Variances*, Econometric Reviews 5, ss. 1-50
- Bollerslev T. [1986], *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, Journal of Econometrics 31, ss. 307-327
- Bollerslev T., Mikkelsen H. [1996], *Modeling and Pricing Long Memory in Stock Market Volatility*, Journal of Econometrics 73, ss. 151-184
- Buffington J., Elliott R.J. [2002], *American options with regime switching*, International Journal of Theoretical and Applied Finance 5, ss. 497-514
- Campbell J.Y., Hentschel L. [1992], *No News is Good News: An Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock Returns*, Journal of Financial Economics 31, ss 281-318
- Campbell J.Y., Lo A.W., MacKinlay A.C [1997], *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press, New Jersey
- Christie A.A. [1982], *The Statistic Behaviour of Common Stock Variances: Value, Leverage and Interest Rate Effects*, Journal of Financial Economics 10, ss. 407-432

- Chung C. -F. [1999], *Estimating the Fractionally Integrated GARCH Model*, National Taiwan University Working Paper
- Clark P.K. [1973], *A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative price*, *Econometrica* 41, ss. 135-155
- Cont R. [2001], *Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues*, *Quantitative Finance*, vol.1, ss. 223-236
- Cox J.C., Ross S.A. [1976], *The valuation of options for alternative stochastic processes*, *Journal of Financial Economics* 3, ss. 145-166
- Cox J.C., Rubinstein M. [1985], *Option Markets*, Prentice-Hall, New Jersey
- Davidson J. [2004], *Moment and memory Properties of Linear Conditional Heteroscedasticity Models, and a new Model*, *Journal of Business and Economics Statistics*, 2, ss. 16-29
- Delbaen F., Schachermayer W. [2006], *The Mathematics of Arbitrage*. Springer Finance,
- Di Masi G.B., Kabanov Y.M., Runggaldier W.J. [1994], *Mean-variance hedging of options on stocks with Markov volatility*, *Theory of Probability and Its Applications* 39, ss.173-181
- Ding Z., Granger C.W.J, Engle R.F. [1993], *A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model*, *Journal of Empirical Finance* 1, ss. 83-106
- Duan J.-C. [1995], *The GARCH Option Pricing Model*, *Mathematical Finance* 5, ss. 13-32
- Duan J.-C. [1999], *Conditionally fat-tailed distributions and the volatility smile in options*, Working Paper, Department of Finance, Hong Kong University of Science and Technology
- Duan J.-C., Gauthier G., Sasseville C., Simonato, J.-G. [2006], *Approximating the GJR-GARCH and EGARCH Option Pricing Models Analytically*, *Journal of Computational Finance* 9, ss. 41-69
- Duan J.-C., Gauthier G., Simonato J.-G., [1998], *An Analytical Approximation for the GARCH Option Pricing Model*, Working paper, Rotman School of Management, University of Toronto
- Duffie D. [1989], *Futures Markets*, Prentice Hall, New Jersey
- Dybvig P.H., Ross S.A. [1997], *Arbitrage w: The New Palgrave: Dictionary of Economics*, red. Milgate M., Eatwell J., Newman P., Macmillan, London
- Engle R.F. [1982], *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation*, *Econometrica* 50, ss. 987-1007
- Fernandez C., Steel M. [1998], *On Bayesian Modeling of Fat Tails and Skewness*, *Journal of the American Statistical Association* 93, ss. 359-371
- Grąt A. [2004], *Rozwój giełdowych instrumentów pochodnych w Polsce na tle tendencji światowych*, w: *Bank i Kredyt* 4, ss. 4-15

- Guo X. [2001], *Information and option pricings*, Quantitative Finance, 1, ss. 38-44
- Hamilton J.D. [1989], *A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time series and the Business Cycle*, Econometrica 57, ss. 357-384
- Harrison J.M., Kreps D.M. [1979], *Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets*, Journal of Economic Theory 203, ss. 81-408
- Heston S.L., Nandi, S. [2000], *A Closed-Form GARCH Option Valuation Model*. Review of Financial Studies 13(3), ss. 585–625
- Hol E., Jungbacker B., Koopman S.J. [2004], *Forecasting Daily Variability of the S&P 100 Stock Index using Historical, Realised and Implied Volatility Measurements*, Tinbergen Institute Discussion Paper 2004-016/4,
- Hol E., Koopman S.J. [2002], *Stock Index Volatility Forecasting with High Frequency Data*, Tinbergen Institute Discussion Paper 2002-068/4,
- Hull J., White A. [1987], *The pricing of options on assets with stochastic volatilities*, Journal of Finance 42, ss. 281-300
- Hull J.C. [2002], *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, wyd. 5
- Jajuga K. [2005], *Trzydzieści lat nowoczesnej teorii wyceny instrumentów pochodnych*. Uniwersytet Szczeciński, Zeszyty naukowe nr 389, s. 55
- Jakubowski J., Palczewski A., Rutkowski M., Stettner Ł. [2003], *Matematyka finansowa. Instrumenty pochodne*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa
- Jiang G.J. [2002], *Stochastic volatility and option pricing*, [w:] Knight J., Satchell S. [red.], *Forecasting volatility in the financial markets*, Elsevier, Oxford, ss. 47-98
- Kallsen J., Taqqu M.[1998], *Option Pricing in ARCH-Type Models*, Mathematical Finance 8, ss. 13-26
- Ling S., McAleer M. [2002], *Stationarity and Existence of Moments of a Family of GARCH Processes*, Journal of Econometrics 106, ss. 109-117
- Martens M. [2002], *Measuring and forecasting S&P 500 index-futures volatility using high-frequency data*, Journal of Futures Markets 22 (2002), ss. 497-518,
- Melino A., Turnbull S.M. [1990], *Pricing foreign currency options with stochastic volatility*, Journal of Econometrics 45, ss. 239-265
- Merton R.C. [1973], *Theory of rational option pricing*, Bell Journal of Economics and Management Science 4, ss. 141-183
- Neftci S. N. [2000], *An introduction to the Mathematics of financial Derivatives*, Academic Press

- Nelson D.B. [1991], *Conditional Heteroskedacity in Asset Returns: A New Approach*, *Econometrica* 59, ss. 347-370
- Osiewalski J., Pipień M. [1999], *Bayesian forecasting of exchange rates using GARCH models with skewed t conditional distributions*. MACROMODELS'98 – Conference Proceedings, vol.2, ss. 195-218
- Osiewalski J., Pipień M. [2000], *GARCH-in-Mean through skewed t conditional distributions: Bayesian inference for exchange rates*, MACROMODELS'99 – Conference Proceedings, ss. 354-369
- Osiewalski J., Pipień M. [2005], *Bayesian Pricing of an European Call Option using a GARCH Model with Asymmetric*, w: Milo W., Wdowiński P., [red.], *Rynki Finansowe. Prognozy a decyzje*, Zeszyt Naukowy Folia Oeconomica 177, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź, ss. 219-238
- Rubinstein M. [1991], *Exotic Options*, Finance Working Paper 220, Haas School of Business, University of California, Berkeley
- Rubinstein M. [2000], *Rubinstein on derivatives*, Haas School of Business, University of California Berkeley
- Schachermayer W. [1994], *Martingale measure for discret-time process with infinite horizon*, *Mathematical finance* 4, ss. 25-50
- Scott L.O. [1987], *Option pricing when the variance changes randomly: theory, estimation and an application*, *Journal of Financial Quantitative Anal.* 22, ss. 419-438.
- Swan E.J. [2000], *Building the global market. A 4000 Year History of Derivatives*, Kluwer Law International, The Hague
- Szyska A. [2003], *Efektywność GPW w Warszawie na tle rynków dojrzałych*, Wydawnictwo AE Poznań, Poznań,
- Tarczyński W. [2003], *Instrumenty pochodne na rynku kapitałowym*, PWE, Warszawa, s. 15
- Tarczyński W., Zwolankowski M. [1999], *Inżynieria finansowa*, Agencja Wydawnicza Placet, Warszawa, s.101
- Tsay R.S. [2002], *Analysys of Financial Time Series*, Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley&Sons, New York
- Tse Y.K. [1995], *The Conditional Heteroscedasticity of the Yen-Dollar Exchange Rate*, *Journal of Applied Econometrics*, 193, ss. 49-55
- Yan H., Yin G., Zhang Q. [2006], *A Regime-Switching Model For European Option Pricing*, w: Zhang Q. (red.), *Stochastic Processes, Optimization, and Control Theory Applications in*

*Financial Engineering, Queueing Networks, and Manufacturing Systems*, Springer, 2006,  
ss. 281-300

*BIS Quarterly Review December 2004, 2005, 2006, 2007*

*Rocznik giełdowy 2006, 200, 7 GPW*, Warszawa 2006, 2007

*Sytuacja finansowa banków w 2004 r. Synteza*. GINB, Maj 2005

*Sytuacja finansowa banków w 2005 r. Synteza*. GINB, Maj 2006